ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δ. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ, Β΄ ΜΕΡΟΣ (§2.8 - §2.10)

Δημήτρης Ι. Μπουνάκης

Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

dimitrmp@sch.gr

Ηράκλειο, 29 Ιανουαρίου 2011

Συνάδελφοι,

Το διδακτικό αυτό υλικό είναι συνέχεια των τριών προηγουμένων-βελτιωμένων-αρχείων στα Μαθηματικά κατεύθυνσης, που σας έχω ήδη στείλει, και αναφέρεται στο Β΄ μέρος του διαφορικού λογισμού (ενότητες 2.8 - 2.10).
Ελπίζω και στις σημειώσεις αυτές να βρείτε κάτι χρήσιμο στην διδασκαλία και στην επιμόρφωσή σας.
Υπενθυμίζω ότι οι σημειώσεις αυτές δεν απευθύνονται στους μαθητές, αλλά στους καθηγητές και προπάντων σε όσους διδάσκουν το μάθημα. Ευπρόσδεκτες είναι και δικές σας σχετικές παρατηρήσεις και σχόλια που θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν τις σημειώσεις αυτές.
Ένα αντίγραφο του αρχείου αυτού να μείνει όπως πάντα στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) του σχολείου.

Καλή δύναμη

Συμπληρώσεις, Παρατηρήσεις, Επισημάνσεις και Ασκήσεις στο δεύτερο μέρος του 2ου κεφαλαίου της Ανάλυσης (§ 2.8, 2.9, 2.10)

Α. § 2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

1. Σύμφωνα με τις οδηγίες του Π. Ι., στην ενότητα αυτή *«η μελέτη των κυρτών, κοίλων και σημείων καμπής να περιοριστεί σε συνεχείς συναρτήσεις που είναι δυο τουλάχιστον φορές παραγωγίσιμες σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους»* (ας την ονομάσουμε «υπόθεση Δ-έλτα»). Προτείνω η θεωρία να διδαχθεί κατ' αρχάς όπως την έχει το βιβλίο (που δεν λαμβάνει υπόψη την υπόθεση «Δ») και μετά να αναφερόμαστε διακριτά, στις συνέπειες της υπόθεσης Δ στα διάφορα θεωρήματα κλπ, ώστε να μην μπερδεύονται οι μαθητές.

2. Κίνητρο για την κυρτότητα: η ανάγκη να διακρίνουμε τις γν. μονότονες συναρτήσεις με το ίδιο είδος μονοτονίας : σε αυτές που «κοιτούν πάνω» και αυτές που «κοιτούν κάτω», αλλά και να διακρίνουμε τα μεγέθη που έχουν αυξανόμενο ή ελαττωμένο ρυθμό μεταβολής. Ποιος θα μας αποκαλύψει το μυστικό τους; Ποιος θα μπει στα άδυτα της γεωμετρικής εποπτείας; Δεν διαθέτει και πολλά μέσα ο άνθρωπος: μόνο το Διαφορικό Λογισμό!

3. Ορισμός κυρτότητας σελ. 273.

3α.Το «αν» στον ορισμό αυτό, όπως και σε άλλους ορισμούς του βιβλίου, ή το «όταν», έχει, μάλλον καταχρηστικά, την έννοια του «αν και μόνο αν». Αυτό καλό είναι να επισημαίνεται κατά καιρούς προς αποφυγήν πιθανών παρεξηγήσεων από τους μαθητές.

3β. Εκτός από την *γεωμετρική* ερμηνεία της κυρτότητας, μέσω της εφαπτομένης που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, υπάρχει και η *φυσική* ερμηνεία της κυρτής (αντίστοιχα κοίλης) συνάρτησης : ο ρυθμός μεταβολής αυξάνεται-η εφαπτομένη στρέφεται κατά την θετική φορά (αντίστοιχα ελαττώνεται- η εφαπτομένη στρέφεται κατά την αρνητική φορά) και αυτό μπορεί συμβαίνει με την συνάρτηση γν. αύξουσα είτε γν. φθίνουσα.

3γ. Η f' ενώ είναι γν. μονότονη στο εσωτερικό του Δ, δεν είναι πάντα γν. μονότονη στο Δ (όταν αυτό δεν είναι ανοικτό και είναι παραγωγίσιμη στα άκρα). Αυτό θα συμβαίνει αν π.χ. η f' είναι συνεχής στα (πραγματικά) άκρα του Δ.

3δ. Με δεδομένο ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα, εξ' ορισμού, είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Επομένως, αν το Δ είναι ανοικτό διάστημα, τότε είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αυτό ξεχνιέται συχνά από πολλούς μαθητές και πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα.

3ε.Να αναφερθούμε στην κυρτότητα γνωστών και βασικών συναρτήσεων ($y = \alpha x^2$, $y = x^3$, $h = \alpha^x$, $0< \alpha < 1$, $\lambda = e^x$, $x = \ln t$, $y = \eta\mu\varphi$, $z = \sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varphi\in[0, 2\pi]$) που παραλείπει το βιβλίο.

4. Σχόλιο σελ. 74

Ειδική επισήμανση και υπογράμμιση του πρώτου σχολίου της σελ. 74, το οποίο είναι χρησιμότατο: βοηθά στην απόδειξη ανισοταυτοτήτων και στον υπολογισμό εμβαδών.
Να τονιστεί στους μαθητές ότι μπορούν να το χρησιμοποιούν στις ασκήσεις, χωρίς απόδειξη. Η απόδειξή του καλό είναι να δοθεί ως άσκηση:

- Αν $T(x)$ κυρτή στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε $T(x) \geq T(\xi) + (x - \xi)T'(\xi)$, $x \in (\alpha, \beta)$
- Αν $L(x)$ κοίλη στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε $L(x) \leq L(\xi) + (x - \xi)L'(\xi))$, $x \in (\alpha, \beta)$, με ισότητες μόνο για $x = \xi$.

- Άλλο γεωμετρικό χαρακτηριστικό μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης: μια οποιαδήποτε χορδή της ΑΒ βρίσκεται πάνω (κάτω) από την γ. π. με άκρα τα Α, Β. (βλ. άσκηση 23(β))

5. Στο θεώρημα της σελ. 274.

Το αντίστροφό του δεν ισχύει, όπως αναφέρεται και στο σχόλιο του βιβλίου. Είναι εντελώς όμοιο με το θεώρημα μονοτονίας. Αυτό που ισχύει και εδώ είναι ότι: αν f κυρτή στο διάστημα (α, β) και διπλά παραγωγίσιμη, τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
Το συχνό λάθος των μαθητών, *«για να είναι η f κυρτή **πρέπει** f ΄΄(x)>0...»* είναι καλό ευθύς εξ αρχής να το επισημάνουμε. Επ' ευκαιρία πρέπει να έχουμε υπόψη ότι, με το *« πρέπει να ισχύει...»* εκφράζεται μια αναγκαία συνθήκη (και όχι ικανή). Να τονιστεί η σημασία του αυτή και σε άλλες περιπτώσεις στα Μαθηματικά, ώστε να χρησιμοποιείται όσο το δυνατόν *λιγότερο και σωστά*.

6. i) Στον ορισμό του σημείου καμπής, σελίδα 275.

Ο ορισμός του βιβλίου διατυπώνεται για να καλύψει και την περίπτωση της κατακόρυφης εφαπτομένης που υπάρχει στο βιβλίο. Εφόσον όμως έχει παραλειφθεί από την εξεταστέα ύλη η κατακόρυφη εφαπτομένη και πολύ περισσότερο εφόσον ισχύει η «υπόθεση Δ», η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι μόνο πλάγια (ή οριζόντια), δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Έτσι δεν πρέπει να λάβουμε υπόψη την εξαίρεση της παραγωγισιμότητας της f στο σημείο x_0 , δηλαδή ο ορισμός πρέπει να διατυπωθεί τελικά με την f *παραγωγίσιμη* στο (α, β).

ii) Επισημαίνουμε τέλος ότι τα σημεία καμπής είναι μόνο σε εσωτερικά σημεία των διαστημάτων του πεδίου ορισμού, ενώ τα τοπικά ακρότατα μπορεί να είναι και σε άκρα.

iii) Με δεδομένο ότι ένα σημείο $(\kappa, f(\kappa))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης, εξυπακούεται (από τον ορισμό) ότι η f *παραγωγίζεται* σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το κ και η f ΄ διατηρεί διαφορετικό είδος μονοτονίας εκατέρωθεν του κ στο διάστημα αυτό. Κάτι ανάλογο δεν συμβαίνει στην περίπτωση ακρότατου σε θέση ξ: δεν διατηρείται η μονοτονία της f εκατέρωθεν του ξ, όπως έχουμε ήδη επισημάνει στις παρατηρήσεις του Α΄ μέρους.

iv) Να επισημάνουμε και την συχνή χρήση στη καθημερινή ζωή εκφράσεων που περιέχουν τις λέξεις «σημείο καμπής», π.χ. λέει κάποιος: «ο γάμος μου ήταν ένα σημείο καμπής για την ζωή μου» κλπ.

v) Η μοναδικότητα του σημείου καμπής μιας συνάρτησης σ' ένα διάστημα, συχνά εξασφαλίζεται από την (γνήσια) μονοτονία της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. Μια ειδική περίπτωση έχουμε στη περίπτωση πολυωνυμικής συνάρτησης που αρκεί η τρίτη παράγωγός της να μην μηδενίζεται στο διάστημα αυτό (;).

7. Σχετικά με το θεώρημα της σελ. 275.

α) Υποθέτει την συνάρτηση διπλά παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, αλλά αρκεί να είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και διπλά παραγωγίσιμη (μόνο) στο x_0. Το θεώρημα εκφράζει μια *αναγκαία* (μόνο) συνθήκη για να είναι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής. Ουσιαστικά είναι ένα πόρισμα του θ. Fermat, αφού στην περίπτωση αυτή η f' είναι συνεχής στο x_0 και αλλάζει μονοτονία, οπότε έχει ακρότατο στη θέση x_0 κλπ.

β) Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει: κάθε ρίζα της δεύτερης παραγώγου δεν είναι θέση σημείου καμπής, κατ' αναλογία με το ότι κάθε ρίζα της πρώτης παραγώγου δεν είναι θέση τοπ. ακρότατου. Απαιτείται και η αλλαγή της μονοτονίας της f' εκατέρωθεν του x_0 (θεώρημα της σελ. 276). Έτσι οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου είναι οι μόνες *πιθανές* θέσεις σημείων καμπής, λαμβάνοντας υπόψη και την «υπόθεση Δ» (διαφορετικά έχομε και τα σημεία που δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος ως πιθανά σημεία καμπής).

8. Σχετικά με το θεώρημα της σελ. 276.

i) Μας δίνει μια *ικανή* συνθήκη σημείου καμπής. Το αντίστροφό του δεν ισχύει, ακόμη και με την f διπλά παραγωγίσιμη στο (α, β). Αυτό συμβαίνει γιατί αν η f' είναι π.χ. γν. αύξουσα αριστερά κοντά του x_0, δεν συνεπάγεται ότι η f'' είναι θετική, μπορεί ως γνωστό και να μηδενίζεται.

ii) Στη θέση x_0 η συνάρτηση για μας παραγωγίζεται, όπως έχουμε επισημάνει και στον ορισμό του σημείο καμπής. Βέβαια γενικά η συνάρτηση θα μπορούσε να μην έχει πρώτη παράγωγο στο x_0, αλλά να έχει κατακόρυφη εφαπτομένη (άπειρο παράγωγο).
iii) Το θεώρημα αυτό συνδυάζεται στην πράξη με το προηγούμενο: εντοπίζονται πρώτα οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου (πιθανά σ. κ.) και στην συνέχεια το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν κάθε μιας.
iv) Η υπόθεση στο θεώρημα, να υπάρχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$, είναι απαραίτητη, έστω και αν είναι συνεχής και αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0:

Η συνάρτηση $\Sigma(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και έχει

$\Sigma''(x) = \begin{cases} 2, x < 0 \\ -1/4x\sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του 0, αλλά δεν έχει εφαπτομένη στη θέση 0. Έτσι δεν έχει σημείο καμπής στη θέση 0.

9. *Ισχυρισμός: ένα σημείο καμπής (κ, f(κ)) της f είναι πάντα ακρότατο για την f΄.*
Αυτό ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f' είναι συνεχής στο σημείο κ. Άρα δεδομένης της «υπόθεσης Δ» αυτό είναι αληθές.

10. *Ισχυρισμός: Ένα τοπικό ακρότατο δεν μπορεί να είναι και σημείο καμπής.*
Εποπτικά φαίνεται αληθής. Ας δούμε αν είναι πραγματικά αληθής. Αν το ακρότατο είναι σε άκρο διαστήματος, τότε προφανώς δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής. Έστω τώρα ότι η θέση του τοπικού ακροτάτου είναι σε εσωτερικό σημείο $\xi\in(\alpha, \beta)$ και συγχρόνως είναι θέση σημείου καμπής. Ας πάρουμε και την φ διπλά παραγωγίσιμη στο (α, β).
Λόγω ακροτάτου έχομε $\varphi'(\xi) = 0$. Έστω στο (κ, ξ) κυρτή και στο (ξ, λ) κοίλη,
$\alpha < \kappa < \xi < \lambda < \beta$. Τότε επειδή φ′ συνεχής στο ξ, η φ′ είναι γν. αύξουσα στο (κ, ξ], οπότε $\varphi'(\chi) < \varphi'(\xi) = 0$ για $\chi\in(\kappa, \xi)$, ενώ $\varphi'(\chi) < \varphi'(\xi) = 0$ για $\chi\in(\xi, \lambda)$. Άρα η φ ′ διατηρεί πρόσημο στο $(\kappa, \xi) \cup(\xi, \lambda)$ οπότε η φ δεν έχει ακρότατο στη θέση ξ, άτοπο. Παρατηρείστε ότι από την υπόθεση «φ διπλά παραγωγίσιμη στο (α, β)», χρησιμοποιήθηκε μόνο η συνέχεια της φ′ στο ξ.

11.Ερώτηση συναδέλφου: Στην άσκηση 5, σελ.279, αναφέρεται ως διάστημα ορισμού της f το (-2, 2), το οποίο όμως δεν χρησιμοποιείται στην απόδειξη. Ποιος είναι ο ρόλος του εκεί;

- Η y = f(x) από την δοσμένη σχέση δίνεται ως λύση της εξίσωσης $y^2-2y+x^2-3 = 0$. Έτσι για να υπάρχουν $y\in R$ πρέπει και αρκεί η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική, ισοδύναμα $x\in[-2, 2]$. Αν x = -2, 2 τότε y=1, ενώ αν $x\in(-2, 2)$ υπάρχουν $y\in R$ (και είναι συνάρτηση του x).

Αυτή η άσκηση μπορεί να συμπληρωθεί με ένα ενδιαφέρον ερώτημα: να βρεθούν οι (συνεχείς τουλάχιστον) συναρτήσεις f(x), $x\in(-2, 2)$ (ή [-2, 2]) που έχουν αυτή τη ιδιότητα (υπ. $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, διατήρηση προσήμου κλπ)

Β. § 2.9 ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ιστορικά στοιχεία: Ο Γάλλος Μαθηματικός *De L' Hospital* (1661-1704) ήταν μαθητής του Johann Bernoulli και έχει εκφραστεί η υποψία ότι μάλλον σ' αυτόν να οφείλονται οι κανόνες αυτοί. Πάντως οι κανόνες διατυπώθηκαν πρώτα γεωμετρικά και όχι αυστηρά, ενώ η αυστηρή διατύπωση και απόδειξή τους έγινε πολύ αργότερα, τον $19^{ο}$ αιώνα.

12. Οι κανόνες De L' Hospital (D - L) είναι προτιμότερο να διδαχθούν πριν τις ασύμπτωτες, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη ευχέρεια στην αντιμετώπιση δύσκολων ορίων.

13. Α. Στα θεωρήματα 1 και 2 είναι επιβεβλημένο να επισημάνουμε την *αυστηρή τήρηση* όλων των υποθέσεων των θεωρημάτων, ειδάλλως μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθη και παράδοξα. Βέβαια, πριν απ' όλα πρέπει να ελέγχουμε αν τα όρια που θέλουμε να βρούμε έχουν έννοια. Στα θεωρήματα αυτά υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 με $g'(x) \neq 0$, αλλά στο x_0 (όταν $x_0\in R$) μπορεί και να μην παραγωγίζονται ή να μην ορίζονται καν.

Β. Ιδιαίτερα επισημαίνουμε το συμπέρασμα των κανόνων D - L : αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f'(x)/g'(x)$, **τότε υπάρχει και** το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)/g(x)$ (και είναι ίσα) και όχι το αντίστροφο.
Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f'(x)/g'(x)$, ο κανόνας δεν λέει τίποτα: το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)/g(x)$ μπορεί να υπάρχει ή όχι, εξαρτάται από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις. Για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούμε άλλες γνωστές μεθόδους ή το κριτήριο παρεμβολής.
Για παράδειγμα :

Αν $f(x) = x^2 ημ\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $g(x) = x$, $x \in R$, τότε (με Κ. Π.) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\left(2xημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει (ο μειωτέος έχει όριο 0 -με Κ. Π.-, ενώ ο αφαιρετός οδηγεί στο όριο του συνx στο $+\infty$ ή $-\infty$, που όπως έχουμε αναφέρει στις συμπληρώσεις των ορίων-συνέχειας δεν υπάρχει).

Το όριο όμως $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} xημ\frac{1}{x} = 0$, δηλαδή υπάρχει.

- Άρα το αντίστροφο του κανόνα D-L δεν ισχύει: δηλ. αν $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, δεν συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Αν το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, θα μπορούσε το όριο $\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ και να μην υπάρχει:

π.χ. αν $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ και το όριο

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3x}$ δεν υπάρχει.

Δεν υπάρχει όμως και το όριο $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{x}$ (βλ. και ασκήσεις 9, 17.Β).

Γ. Να επισημάνουμε (για αποφυγή λαθών) ότι δεν ισχύει (πάντα)

$\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\mapsto x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$, π.χ. αν $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $x_0 = 1$ δεν ισχύει.

Δ. Οι κανόνες D - L μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές φορές διαδοχικά σε ένα όριο, αν βέβαια οδηγούν σε απλούστερα όρια, και με την προϋπόθεση ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις των θεωρημάτων και προπάντων ότι το τελευταίο όριο υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο). Στην διαδικασία αυτή, συνήθως, είναι συχνά δυο λάθη:

i) Να μην προσεχθεί ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή (0/0 ή $\pm\infty/\pm\infty$) και όμως να εφαρμοστεί κανόνας D-L π.χ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{2x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{2} = 1$ (σωστό όριο -3/2)

Το λάθος αυτό μπορούμε να το αποφύγουμε αν κάθε φορά που εφαρμόζουμε κανόνα D – L γράφομε το είδος της απροσδιόριστης μορφής πάνω από το ίσον.

ii) Να έχουμε οδηγηθεί με τις παραγωγίσεις σε πολύπλοκο κλάσμα που μας απογοητεύει και να μην προσέξουμε ότι *ένας μέρος* (παράγοντας ή κλάσμα) έχει «αθώο» όριο, δηλαδή όριο που προσδιορίζεται χωρίς κανόνες D-L. Έτσι ασχολούμαστε με το άλλο μέρος που είναι η καθαυτό (ανηγμένη) απροσδιόριστη μορφή.

π.χ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{εφx - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{συν^2x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{ημ^2x}\cdot\frac{συν^2x}{1-x}$ (με $0<|x|<1$)

απομονώνοντας το δεύτερο κλάσμα ($συν^2x/(1-x)$) βλέπομε άμεσα ότι έχει όριο 1, οπότε μένει το άλλο κλάσμα ασφαλώς απλούστερο, για να χρησιμοποιηθεί κανόνας D - L (τελικό όριο -1/2).

14. Για να πάρουν οι μαθητές μια ιδέα για την απόδειξη των κανόνων D - L μπορούμε να δώσουμε τη εξής απλή περίπτωση του κανόνα 1 ως άσκηση:
Αν f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β), $g(x) \neq 0$ κοντά στο $\xi \in (α, β)$ και
$f(\xi) = g(\xi) = 0$ με $g'(\xi) \neq 0$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x \mapsto \xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

15. Ειδική επισήμανση των σχολίων της σελίδας 283, για τις άλλες απροσδιόριστες μορφές και την ισχύ των κανόνων και για τα πλευρικά όρια.
Επίσης να σημειώσουμε ότι πολλές άλλες απροσδιόριστες μορφές π.χ. $0(\pm\infty)$, $+\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, μπορούν να οδηγηθούν στις μορφές $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ και να αντιμετωπιστούν με τα θεωρήματα 1, 2. Αυτό γίνεται συνήθως μέσω στοιχειωδών αλγεβρικών πράξεων ή ιδιοτήτων, π.χ.

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad f(x) - g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right), \; f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \text{ κ.ά.}$$

(με τους κατάλληλους περιορισμούς)
π.χ. αν $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, τότε έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\mathbf{1}^\infty$ αλλά λόγω

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$, αλλά :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x+1}}$ δηλαδή τελικά στην μορφή 0/0 και με εφαρμογή

του $1^{ου}$ κανόνα βρίσκουμε όριο ίσο με 1 και τελικά $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = e$.

16. Το όριο $\lim\limits_{x \mapsto 0}\dfrac{ημx}{x}$ δεν νομιμοποιείται να υπολογιστεί με την βοήθεια του κανόνα D- L αφού για την εφαρμογή του απαιτείται η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης ημx, η οποία αποδείχθηκε με την βοήθεια του ορίου αυτού (βλ. σελ. 225) (κυκλικός συλλογισμός). Αν όμως η παραγωγισιμότητα της ημx δεν στηριχθεί στο όριο αυτό, τότε αυτό είναι Μαθηματικά νόμιμα και αυτό γίνεται σε μερικά βιβλία ανώτερων Μαθηματικών, όπου το ημx δεν ορίζεται με τον γνωστό στοιχειώδη τρόπο.

17. Να επισημανθεί τέλος ότι τους κανόνες De L' Hospital τους χρησιμοποιούμε μόνο σε όρια με απροσδιόριστες μορφές 0/0 ή $\pm\infty/\pm\infty$ και αφού προηγουμένως έχουμε δοκιμάσει γνωστές ιδιότητες ορίων ή αλγεβρικά τεχνάσματα που δεν απαιτούν παραγωγίσεις και βέβαια αν οδηγούν σε απλούστερα όρια. Τέλος ότι δεν πρέπει να ξεχνάμε το *κριτήριο παρεμβολής, ιδίως σε δύσκολα όρια, όταν μάλιστα περιέχουν ημίτονο ή συνημίτονο.*

Γ. § 2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

18. Τι εξυπηρετούν οι ασύμπτωτες;

Α. Χρησιμεύουν στην χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, αφού αυτή «περιχαρακώνεται» μεταξύ αυτών.
Β. Με τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση την τιμή μιας συνάρτησης, όταν μάλιστα ο απ' ευθείας υπολογισμός της είναι δύσκολος ή επίπονος.
Έτσι π.χ. αν μια συνάρτηση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x-1$, τότε για μεγάλες τιμές του x μπορούμε να πάρουμε $f(x) \approx 3x - 1$.

19. Στον ορισμό της ασύμπτωτης που έχει συντελεστή διεύθυνσης (μη κατακόρυφης): πριν δοθεί ο ορισμός, ας παρατηρηθεί ότι η διαφορά $f(x) - (\lambda x + \beta)$ (ή $(\lambda x + \beta)- f(x)$) εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση στη θέση x των συναρτήσεων $f(x)$, $y = \lambda x + \beta$. Ο οριακός μηδενισμός της, συνεπάγεται και τον μηδενισμό της αντίστοιχης (κάθετης) απόστασης της γ. π, από την ευθεία που εκφράζει την γεωμετρική εικόνα ότι η ευθεία «πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά» την γ. π. της συνάρτησης.

20. Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι ειδική περίπτωση ($\lambda = 0$) της ασύμπτωτης $\psi = \lambda\chi + \beta$ την οποία το βιβλίο λέει πλάγια αν $\lambda \neq 0$.
Ας σημειωθεί ότι, αν η ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης φ στο $+\infty$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης «την συνοδεύει» στο άπειρο, δηλαδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi) = +\infty$ αν $\lambda > 0$ και $-\infty$ αν $\lambda < 0$ και ανάλογα για ασύμπτωτη στο $-\infty$.
($\varphi(\chi) = (\varphi(\chi)/\chi)\chi$ κλπ). Αν $\lambda = 0$ τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi) = \beta$.
Δηλαδή, αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ($-\infty$) για μια συνάρτηση είναι το όριό της στο $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) να είναι άπειρο. Δεν είναι ικανή η συνθήκη: π.χ. η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει όριο $+\infty$, στο $+\infty$, αλλά δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (ενώ π.χ. η $f(x) = x + 1/x$, έχει και άπειρο όριο και πλάγια ασύμπτωτη). Ανάλογη συνθήκη ισχύει και για την περίπτωση της κατακόρυφης ασύμπτωτης (εξ ορισμού). Εν τέλει, αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων με άκρα πραγματικούς αριθμούς τότε η συνάρτηση δεν έχει ασύμπτωτες.

21. Σχετικά με το θεώρημα της σελ. 280.

Α. Μια καλή άσκηση στα όρια είναι να δειχθεί το πρώτο μέρος του θεωρήματος (το $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x)$, προφανές, ενώ $\frac{f(x)}{x} - \lambda = (f(x) - \lambda x)\frac{1}{x}$ κλπ)

Β. Να τονιστεί ότι και τα δυο όρια πρέπει να υπάρχουν και να είναι πραγματικοί αριθμοί. (υπάρχει το όριο, κατά το σχ. βιβλίο, σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός ή άπειρο)

- Υπάρχει περίπτωση $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in R$ και η συνάρτηση να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$:

π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x+\sigma\upsilon\nu x$ έχει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lambda$ (χρησ. Το Κ.Π.)

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\text{συν}x$, το οποίο δεν υπάρχει (: διαισθητικά από την γ. π. και αυστηρά βλ. σελ. 9, Β αρχείου, «Συναρτήσεις όρια, συνέχεια», αλλά θεωρώντας και τις ακολουθίες $\alpha_\nu=2\nu\pi$, $\beta_\nu=2\nu\pi+\pi/2$, $\nu\in N^*$, που δίνουν διαφορετικά όρια στο συνx).

Γ. Από το θεώρημα αυτό προκύπτει και η *μοναδικότητα μιας μη κατακόρυφης* ασύμπτωτης (στο +∞ ή στο -∞) μιας συνάρτησης, που οφείλεται στην μοναδικότητα των ορίων λ, β.

Δ. Σχετικά με τους τύπους του θεωρήματος για τα λ, β: ας επισημανθεί ότι, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια δεν είναι πραγματικός ή δεν υπάρχει, τότε η συνάρτηση *δεν έχει* ασύμπτωτη (στο +∞, αντίστοιχα στο -∞) που να τέμνει τον y- άξονα.

Ε. Επίσης μια άλλη αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι: Αν μια συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη (π.χ. στο +∞) τότε αυτή είναι και η μοναδική της πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ (αφήνεται ως άσκηση: Υπ. κατ' ανάγκη λ = 0) .

22. Για την εύρεση των πλάγιων ή οριζόντιων ασύμπτωτων είναι πολλές φορές προτιμότερο να μην εφαρμόζουμε αμέσως τους γνωστούς τύπους για το λ και το β: ίσως μια «προσεκτική ματιά» μας αποκαλύψει την ασύμπτωτη, σύμφωνα με τον ορισμό.

Αν π.χ. έχουμε την συνάρτηση $f(x)=3x-1-\dfrac{2}{2e^x+3\ln x}$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f έχει ασύμπτωτη στο +∞ , *το ορατό γραμμικό μέρος της f*, δηλαδή την ευθεία y = 3x -1. Αυτό μπορεί να γίνει και σε ρητές συναρτήσεις (με διαφορά βαθμών αριθμητή και παρανομαστή 1), όπου το πηλίκο δίνει την ασύμπτωτη, π.χ. αν $\Sigma(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x+2}{x^2-1}$, τότε εκτελώντας την διαίρεση βρίσκουμε πηλίκο x - 2 και εύκολα προκύπτει ως ασύμπτωτη η y = x - 2.

23. Σχετικά με το σχόλιο της σελίδας 281: ας δοθεί και με την μορφή)και ως άσκηση):

- Η μοναδική πολυωνυμική συνάρτηση που έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη είναι η πρωτοβάθμια-ευθεία, της οποίας ασύμπτωτη είναι η ίδια.
- Οι μοναδικές ρητές συναρτήσεις που έχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες είναι όσες έχουν *βαθμό αριθμητή μικρότερο ή ίσο του βαθμού του παρανομαστή αυξημένου κατά 1* (που αντιστοιχεί στο πηλίκο της διαίρεσης). Όταν ισχύει η ισότητα έχουμε πλάγια, ενώ στις άλλες περιπτώσεις οριζόντια ασύμπτωτη.
- Επί πλέον οι ρίζες του παρανομαστή μιας ρητής συνάρτησης, αν υπάρχουν, δίνουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες (με την προϋπόθεση ότι δεν είναι και ρίζες του αριθμητή).

24. Για μια συνάρτηση (ορισμένη σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων):

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται,
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού όπου η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Στα σημεία συνέχειας προφανώς το όριο είναι πραγματικός και όχι άπειρο και δεν δίνουν

κατακόρυφες ασύμπτωτες. Έτσι οι συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα ή στο R δεν έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Μη κατακόρυφες, δηλαδή *πλάγιες ή οριζόντιες* ασύμπτωτες, έχει έννοια να αναζητούμε μόνο όταν η συνάρτηση είναι ορισμένη κοντά στο +∞ ή στο -∞, δηλαδή σε διαστήματα της μορφής (α, +∞), (-∞ , β) αντίστοιχα.
Ας σημειωθεί ότι μια συνάρτηση μπορεί να έχει πολλές κατακόρυφες ασύμπτωτες, αλλά μη κατακόρυφες το πολύ δυο (στο +∞ ή στο -∞) .

25. Με την βοήθεια της θεωρίας των ασύμπτωτων μπορούμε να αντιμετωπίσουμε ευκολότερα μια ορισμένη κατηγορία προβλημάτων στα όρια. Για παράδειγμα :
Να βρεθούν οι λ, μ∈R ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}-\lambda x-\mu\right)=0$. Ουσιαστικά ζητούμε την μη κατακόρυφη ασύμπτωτη y = λx + μ της συνάρτησης φ(x)= $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}$ στο +∞ κλπ (Απ. λ=2, μ=1/2)

26. *Ισχυρισμός*: *Η ασύμπτωτη της γ. π. μιας συνάρτησης μπορεί να έχει κοινά σημεία με αυτήν.*
Αυτό είναι αληθές, όπως και για την εφαπτομένη (βλέπε Α΄ μέρος), έστω και αν μας παραξενεύει, συνηθισμένοι στις απλές αλγεβρικές καμπύλες.
Έτσι π.χ. η συνάρτηση φ(x) = e^{-x}ημx, έχει ασύμπτωτη στο +∞ τον x - άξονα ο οποίος έχει άπειρα κοινά σημεία με την γ. π. (ημx = 0).
Ένα άλλο παράδειγμα είναι η Σ(χ) = $\chi+\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$, αν χ≠0 και Σ(0) = 0, η οποία είναι συνεχής και έχει την ψ = χ ασύμπτωτη στο +∞ και -∞ , η οποία όμως έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτήν. Όμοια, μια κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να έχει (το πολύ ένα) κοινό σημείο με την γ. π. της συνάρτησης, π.χ. η συνάρτηση φ(χ) = χ για χ ≤ 0 και φ(χ) =1/χ για χ > 0, έχει ασύμπτωτη την χ = 0.

- Αν όμως μια συνεχής συνάρτηση έχει πεπερασμένο πλήθος κοινών σημείων με μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτή της (στο +∞ ή στο -∞), τότε «τελικά» δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα η ασύμπτωτη βρίσκεται «τελικά» εξ' ολοκλήρου «πάνω» ή «κάτω» από την γ. π. της συνάρτησης. Βλέπε σχετικά την άσκηση 30 στο τέλος.

Δ. §2.10 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

27. Ο κύριος σκοπός του Διαφορικού Λογισμού είναι η μελέτη των συναρτήσεων μέσω των παραγώγων και η χάραξη καθώς και η ερμηνεία των γραφικών τους παραστάσεων. Τον σπουδαίο αυτό σκοπό δεν πρέπει χάριν των εξετάσεων να τον αγνοήσουμε. Γι' αυτό ανεξάρτητα αν θα τίθενται σχετικά θέματα στις εξετάσεις, πρέπει να γίνει με επιμέλεια πλήρης μελέτη και σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων τουλάχιστον 2 συναρτήσεων μέσα στην τάξη (και μετά, αν είναι δυνατόν, να χρησιμοποιηθεί και κάποιο πρόγραμμα Η.Υ. για την καλύτερη εμφάνισή της). Ιδιαίτερα επισημαίνουμε σχετικά τις ασκήσεις του βιβλίου: 4 σελ.277, 5 σελ. 278 και την άσκηση 1 σελίδα 298.

28. Οι ερωτήσεις κατανόησης (σελ. 295-298) παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον και δεν πρέπει να λησμονηθούν. Επίσης να έχουμε υπόψη ότι προτεραιότητα πρέπει να έχουν οι ασκήσεις του βιβλίου και μετά οι δικές μας. Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 2 και

την σχετική επανάληψή του, που πρέπει να ακολουθήσει, κρίνεται επιβεβλημένη η διεξαγωγή επαναληπτικού δίωρου ή τρίωρου διαγωνίσματος.

Ε. ΑΛΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

29. Ερώτηση συναδέλφου:
"Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος για να δοθεί η άσκηση 1, σελίδα 298 της κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου καθώς και η άσκηση 14, σελίδα 53 της Γενικής παιδείας στους μαθητές, ώστε να γίνει κατανοητή από αυτούς η εύρεση της παραγώγου;"

Απάντηση
Α. Άσκηση 1, σελίδα 298 της κατεύθυνσης.

Η απάντηση στις ερωτήσεις αυτές (και στις αντίστροφες τους, δηλ. από την παράγωγο στην συνάρτηση) γίνεται συνήθως με συνδυασμό των παρακάτω 4 κριτηρίων.

1. Εφαπτομένη.
Βλέπουμε αν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης (γ. π.) της φ που σημαίνει ότι **η φ′ ορίζεται** στο σημείο αυτό.
Έτσι βλέπουμε ότι μόνο στην γ. π. της (β) στο 0 δεν μπορούμε να φέρουμε (μοναδική) εφαπτομένη, άρα η (β) δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, δηλ. δεν ορίζεται η φ′(0).
Αν η εφαπτομένη σε ένα σημείο ξ είναι οριζόντια (παράλληλη στον χ-άξονα) τότε η φ′ μηδενίζεται στο ξ, δηλαδή **η φ′ τέμνει τον χ-άξονα στο ξ**. Ακόμη καλό είναι να έχουμε υπόψη ότι στο διάστημα στα σημεία του οποίου η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία γωνία με τον χ-άξονα, η φ είναι γν. αύξουσα, ενώ αν σχηματίζει αμβλεία γωνία είναι γν. φθίνουσα.

2. Μονοτονία και πρόσημο παραγώγου.
Αν η φ είναι γν. αύξουσα (και παραγωγίσιμη: κριτήριο 1) τότε $\varphi' \geq 0$ (αυτό δεν το έχει το βιβλίο - αποδεικνύεται πάντως εύκολα με βάση τον ορισμό της παραγώγου και το θεώρημα της διάταξης στα όρια- και είναι καλό να το ξέρουν οι μαθητές- και το εξάγουμε διαισθητικά, μάλιστα σε τέτοιου είδους ασκήσεις συνηθέστερα ισχύει το $\varphi'>0$ (σε κάποιο διάστημα πάντα)). Ανάλογα αν φ είναι γν. φθίνουσα, $\varphi'<0$.

3. Ευθεία.
Αν ένα τμήμα της φ είναι ευθεία (σε ένα διάστημα) δηλ. $\varphi(\chi) = \alpha\chi + \beta$ τότε $\varphi' = \alpha$. Αυτό συμβαίνει στις γ. π. (β), (δ). Γενικά αν η φ είναι πολυωνυμική ν βαθμού, η παράγωγος είναι ν-1 βαθμού.

4. Κυρτότητα και μονοτονία παραγώγου.
Αν φ είναι κυρτή (κοίλη) τότε η φ′ είναι γν. αύξουσα (φθίνουσα) και «αντίστροφα».

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:
(α) Παρατηρούμε ότι η φ στο 0 έχει οριζόντια εφαπτομένη, άρα η φ′ μηδενίζεται στο 0, άρα τέμνει τον χ-άξονα στο Ο. Λόγω της μονοτονίας της φ, αριστερά του 0 η φ′ θα είναι αρνητική και δεξιά του 0 θετική (στην χειρότερη περίπτωση θα μηδενίζεται και κάπου αλλού). Από αυτά βγαίνει φανερά η απάντηση (Ε) και όχι η (Ζ). (επικουρικά: η φ είναι κυρτή, άρα η φ′ γν. αύξουσα για να αποκλεισθεί η (Ζ))

(β) στο 0 δεν ορίζεται η παράγωγος, ενώ δεξιά του η φ′ είναι σταθερή και θετική (κλίση α>0) και αριστερά του 0 είναι σταθερός αρνητικός αριθμός (κριτήριο1, 3). Φανερή απάντηση η (Α).

(γ) Για το (γ) (η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση):
Η φ είναι μονότονη σε 4 διαστήματα, έστω (-∞, α], [α, 0], [0, θ], [θ, +∞), (α<0, θ>0) ενώ στις θέσεις α, 0, θ έχει τ. ακρότατα) άρα φ′(α) = φ′(0)= φ′(θ)=0, δηλ. η φ′ τέμνει τον χ-άξονα σε 3 σημεία (και απαντάται αμέσως (Β) αλλά ας πούμε ότι υπήρχε και άλλη με 3 σημεία τομής).
Παρατηρούμε εδώ ότι στα διαστήματα [α, 0], [0, θ] αλλάζει και κυρτότητα που σημαίνει (χονδρικά) ότι αλλάζει μονοτονία η φ′. Έτσι έχουμε:
Στο διάστημα (-∞, α) η φ είναι γν. φθίνουσα άρα η φ′ αρνητική μέχρι που μηδενίζεται στο α.
Στο διάστημα (α, 0) η φ είναι γν. αύξουσα άρα η φ′ θετική ενώ λόγω αλλαγής κυρτότητας (από κυρτή, κοίλη) η φ′ αυξάνει και μετά φθίνει (οπότε η φ′έχει μέγιστο μεταξύ α, 0) , παραμένουσα θετική, μέχρι να μηδενιστεί το 0.
Στο διάστημα [0, θ) η φ είναι γν. φθίνουσα άρα η φ′ αρνητική, ενώ λόγω αλλαγής κυρτότητας (από κοίλη σε κυρτή κοίλη) η φ′ φθίνει και μετά αυξάνει (οπότε η φ′έχει ελάχιστο μεταξύ 0, θ), παραμένουσα αρνητική, μέχρι να μηδενιστεί το θ .
Στο διάστημα [θ, +∞) η φ είναι γν. αύξουσα άρα η φ′ είναι θετική.
Φανερή ήδη απάντηση η (Β).

(δ) Προφανώς (κριτήριο 3) η φ′ είναι σταθερή (και θετική αφού έχει θετική κλίση) (Δ).
Για καλύτερη άσκηση σε τέτοια θέματα μπορούμε να μην κοιτάξουμε τις (Α),(Β), (Γ), (Δ), (Ε) αλλά να προσπαθήσουμε να χαράξουμε πρώτα τις γ. π. των παραγώγων των (α),(β),(γ), (δ) και μετά να ελέγξουμε.
Επίσης καλή σχετική άσκηση είναι από την γ. π. της φ′ να χαράξουμε την γ. π. της φ (βλ. άσκηση 4, σελ. 277).

Β. Άσκηση 14, σελίδα 53 Γενικής Παιδείας.

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα παραπάνω κριτήρια 1, 2, 3.

(1) Η φ έχει δυο οριζόντιες εφαπτόμενες, άρα η φ′ τέμνει τον χ-άξονα σε δυο σημεία. Από αυτό και μόνο βγαίνει ως απάντηση η (β). Αν υπήρχε και άλλη με δυο κοινά σημεία θα εξετάζαμε το κριτήριο 2 της μονοτονίας κλπ.
(2) Σε δυο σημεία (γωνιακά σημεία) δεν υπάρχει εφαπτομένη, άρα σε δυο σημεία δεν ορίζεται η φ′. Άρα φανερή απάντηση η (δ).
(3) Στο 0 υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη, άρα η φ′ τέμνει τον χ-άξονα στο σημείο Ο. Επί πλέον η φ αριστερά του 0 είναι φθίνουσα και δεξιά αύξουσα, άρα η φ′ είναι αριστερά του 0 αρνητική και δεξιά θετική. Άρα απάντηση (α).
(4) Δεν προκύπτει μόνο εξ ανάγκης η απάντηση (γ), αλλά και από το ότι η φ έχει 3 οριζόντιες εφαπτόμενες, άρα η φ′ τέμνει σε 3 σημεία τον χ-άξονα.

30. Άσκηση Διδακτικής (ΑΣΕΠ 2009)

Έστω ότι διδάσκετε Μαθηματικά κατεύθυνσης στη Γ΄ Λυκείου. Μετά την απόδειξη της πρότασης *«κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 είναι συνεχής στο x_0»* γίνεται στην τάξη ο παρακάτω διάλογος:
Καθηγητής: Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο, είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο;
Μαθητής Α: Όχι.
Καθηγητής: Γιατί;
Μαθητής Α: Γιατί, αν η συνάρτηση είναι συνεχής, το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι $f(x_0)$ και άρα το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *είναι απροσδιόριστη μορφή. Επομένως δεν υπάρχει αυτό το όριο.*
Καθηγητής (απευθυνόμενος στην υπόλοιπη τάξη): Συμφωνείτε;
Μαθητής Β: Επειδή το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *είναι απροσδιόριστη μορφή, για άλλες συναρτήσεις μπορεί να υπάρχει και για άλλες όχι. Γι' αυτό μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι πάντοτε παραγωγίσιμη.*

Μετά τη συζήτηση των μαθητών με τον καθηγητή η τάξη διχάστηκε. Άλλοι μαθητές συμφώνησαν με το μαθητή Α και άλλοι με το μαθητή Β.
α) Εντοπίστε τις δύο πιο σημαντικές παρανοήσεις που φαίνεται να έχουν δημιουργηθεί στην τάξη και αναφέρετε πώς αναδύονται αυτές από το διάλογο.
β) Πώς θα αντιμετωπίζατε διδακτικά το πρόβλημα που δημιουργήθηκε ώστε να βοηθήσετε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΔΙΑΦ. ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Β΄ ΜΕΡΟΣ)

Κυρτότητα - Ασύμπτωτες - de L' Hospital

1. Ι. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο R, τότε πάντοτε δεν έχει τοπ. ακρότατα Σ - Λ

ΙΙ. Αν μια συνάρτηση είναι γν. αύξουσα σ' ένα διάστημα, τότε πάντοτε δεν έχει σημεία καμπής Σ - Λ

ΙΙΙ. Ένα κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι θέση σημείου καμπής Σ - Λ

IV. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο R τότε έχει πάντα αντίστροφη Σ Λ

V.Τα σημεία καμπής βρίσκονται πάντα σε θέσεις εσωτερικών σημείων διαστημάτων, ενώ τα ακρότατα μπορεί να είναι και σε άκρα. Σ Λ

VI. Αν $\Sigma''(\chi) = \chi(\chi - 1)^2 (\chi - 2)^3 (\chi - 3)^4$, τότε η συνάρτηση Σ έχει σημεία καμπής στις θέσεις Α.0, 1 Β.0, 1, 2 Γ.0, 1, 2, 3 Δ.0, 1, 2, 3 Ε. 0, 2

VII. Αν η συνάρτηση Σ είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή στο R τότε ισχύει πάντα
Α. $\Sigma''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in R$ Β. $\Sigma''(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in R$ Γ. άγνωστο το πρόσημο της Σ''.

VIII. Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της γ.π. μιας κοίλης συνάρτησης στο R μπορεί να έχει δυο κοινά σημεία με αυτήν Σ Λ

2. Ι. Το όριο $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{x}{\eta\mu x}$:
Α. δεν υπάρχει Β. δεν έχει έννοια Γ. είναι ίσο 0 Δ. είναι ίσο με $+\infty$.

ΙΙ. Αν $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \Sigma(x) = +\infty$ τότε η Σ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες Σ Λ

ΙΙΙ. Αν η συνάρτηση Σ(x) είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \Sigma(x) = \mu \in R$ τότε η Σ έχει πάντα μοναδική μη κατακόρυφη ασύμπτωτη. Σ Λ

IV. Μια συνεχής συνάρτηση στο R δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Σ Λ

V. Αν μια συνάρτηση έχει ελάχιστο και μέγιστο, τότε δεν έχει ασύμπτωτες Σ Λ

VI. Αν η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \dfrac{\chi^2 - 2\alpha\chi + 4}{\chi^2 - 4}$ έχει μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = 2$ τότε Α. $\alpha = 2$ Β. $\alpha = -2$ Γ. $\alpha = 4$ Δ. $\alpha = -4$.

VII. Ο βαθμός του αριθμητή μιας ρητής συνάρτησης είναι ν, ενώ του παρανομαστή μ ($\nu, \mu \in N^*$). Αν η συνάρτηση έχει πλάγια (όχι οριζόντια) ασύμπτωτη, τότε ισχύει
Α. $\nu = \mu$ Β. $\nu - \mu = 1$ Γ. $\nu - \mu = 2$ Δ. $\nu < \mu + 1$

VIII. Ένας μαθητής έγραψε στο πίνακα : Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{1} = f'(\xi)$.

i) Είναι σωστό αυτό ή λάθος;

ii) Αν διαπιστώνετε λάθη, σε ποια σημεία είναι αυτά και με ποιες επί πλέον υποθέσεις αυτό είναι σωστό. Είναι αυτές οι υποθέσεις περιττές ή όχι για το τελικό εξαγόμενο;

3. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ και να γίνει η γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τι σχήματα είναι οι γραφικές τους παραστάσεις;

4. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)|$ είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και στην συνέχεια ότι στην γ. π. της φ υπάρχουν 3 ακριβώς σημεία στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x-άξονα.

5. Έστω η συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \lambda^6 + x\lambda^4 + y\lambda^3 + z\lambda^2 + 1$, όπου x, y, z θετικοί αριθμοί.
α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
β) Να αποδειχθεί ότι είναι κυρτή και δεν έχει πραγματικές ρίζες.

6. Έστω $\lambda > 0$ και η συνάρτηση $\varphi(x) = x + \lambda\ln(x^2 + \lambda^2)$, $x \in R$.
α) Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της φ.
β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η εφαπτομένη στην γ. π. της φ σ' ένα τουλάχιστον από τα σημεία καμπής της, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
(Απ. $\lambda = \sqrt{e/2}$)

7. Να βρεθούν οι ακέραιοι κ, λ για τους οποίους η γ. π. της συνάρτησης
$\Sigma(\chi) = \frac{\kappa\chi^3 + \lambda\chi^2 - \chi - 2}{\chi^2 - 1}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Για τις τιμές αυτές των κ, λ να εξετάσετε αν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. (Απ. κ = 1, λ = 2)

8. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$ (τμήμα υπερβολής), όπου α, β θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση ενός σημείου Μ(κ, λ), κ > α, της γ. π. της προηγούμενης συνάρτησης από την ασύμπτωτη με θετικό συντελεστή διεύθυνσης μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε.

9. Έστω $\varphi(\chi) = \chi + \eta\mu\chi$, $\gamma(\chi) = \chi$, $\chi \in R$.
α) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi) = +\infty$.
β) Δεδομένου ότι το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\chi$ δεν υπάρχει, να δειχθεί ότι δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \frac{\varphi'(\chi)}{\gamma'(\chi)}$. γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \frac{\varphi(\chi)}{\gamma(\chi)}$.

10. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σύνολο $A = R-\{\pm\sqrt{5}\}$ με $f'(x) = \frac{1}{5-x^2}$.
α) Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα την συνάρτηση φ,
β) Αν f(0) = 2 να δειχθεί ότι ο αριθμός α = 20f(1) δεν είναι ακέραιος.

11. Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\lambda}{2}x^2 + x$, $\gamma(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{\lambda^2}{2}x^2 - x^2$, όπου $\lambda \in R$ σταθερά.
α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R,
β) Να δείξετε ότι αν η φ έχει δυο τοπικά ακρότατα, τότε η γ δεν έχει σημεία καμπής,

γ) Να δείξετε ότι, αν η γ έχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής, τότε η φ δεν έχει τοπικά ακρότατα, αλλά έχει ένα σημείο καμπής!.

12.Α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $x(t) = \sqrt[3]{t^3 + t^2 + 1} - \sqrt[3]{t^3 - 2t^2 + 5}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $x = 1$ και στην συνέχεια να βρεθεί κατά προσέγγιση η τιμή $x(10^4)$.

Β. Έστω φ διπλά παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση γ(x) τέτοια ώστε $\gamma(x)\varphi'(x) = 2\varphi(x)$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδειχθεί ότι, αν η γ.π. της φ έχει σημείο καμπής το $A(\xi, \varphi(\xi))$ τότε η εφαπτομένη στην γ. π. της $\gamma(\chi)$ στο σημείο $B(\xi, \gamma(\xi))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi - 2x + 5 = 0$. (Δ΄ 1995)

13. Έστω $\alpha, \beta \in R$, $\alpha > 0$ και η συνάρτηση με τύπο $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{1 + x^2}$.

α) Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η συνάρτηση να έχει σημείο καμπής στη θέση -1,

β) Μα δεδομένη την συνθήκη που βρήκατε προηγουμένως, να δείξετε ότι όλα τα σημεία καμπής της συνάρτησης βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\alpha x - 4y = 3\alpha$. (Απ. $\alpha+\beta=0$)

14. Α) Έστω Σ κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta)$. Να δειχθεί ότι η Σ έχει μοναδικό τοπικό ελάχιστο καθώς και (ολικό) μέγιστο ίσο με $\Sigma(\alpha)$.

Β) Έστω η συνάρτηση $\Sigma(t) = t^4 - 2t^3 + 6t^2 + 1$, $t \in R$.

i) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της,

ii) να δειχθεί ότι υπάρχουν αριθμοί ρ, θ, $\rho < 0$, $\theta > 0$, ώστε $\Sigma(\rho) = \Sigma(\theta) = 2008$.

iii) Να δειχθεί ότι η Σ έχει μέγιστο στο διάστημα $[\rho, \theta]$ ίσο με 2008.

15. Έστω φ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ζ, ω μιγαδικοί με $\zeta = e^{\alpha} + i\varphi(\alpha)$, $\omega = e^{\beta} + \varphi(\beta)$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών ζ, ω είναι παράλληλες να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\varphi'(\xi) = \varphi(\xi)$.

16. Α. Έστω φ, γ συναρτήσεις κυρτές και γν. αύξουσες στο R με θετικές τιμές.
Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\varphi \cdot \gamma$, $e^{\varphi\gamma}$ είναι γν. αύξουσες και κυρτές.

Β. Να αποδειχθεί ότι η γ. π. κάθε κοίλης συνάρτησης στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχει με την γ. π. της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \kappa + \dfrac{\lambda}{\chi}$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$, $\kappa \in R$, το πολύ δυο κοινά σημεία.

17. Α.Να βρεθούν τα όρια $A = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$, $B = \lim\limits_{x \to +\infty} x\alpha^x$, $0 < \alpha < 1$,

$$\Gamma = \lim_{\chi \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi) - \sigma\upsilon\nu(\beta\chi)}{\chi^2}, \ \alpha\beta \neq 0, \quad \Delta = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^{-2}}, \ E = \lim_{x \to 0^+} x^{\eta\mu x}.$$

Β. Αφού πρώτα δειχθεί ότι έχει έννοια το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$ στην συνέχεια να βρεθεί.

(Απ. 1)

Γ. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\eta\mu x} - \dfrac{1}{x} \right)$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$ (Απ. 0,1/3)

18. Έστω Σ συνάρτηση ορισμένη στο R με θετικές τιμές ώστε η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \ln\Sigma(\chi)$, $x\in R$ να είναι διπλά παραγωγίσιμη . Αν $(\varphi'(x))^2 + \varphi''(x) > 0$ για κάθε $\chi\in$ R να δειχθεί ότι η συνάρτηση Σ είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή.

19. Έστω f(x) συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα (α, β) με f (x) > 0 για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. Αν η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ είναι γν. αύξουσα και κυρτή να δειχθεί ότι
α) η f (x) είναι γν. αύξουσα και παραγωγίσιμη,
β) ισχύει $g'(x) \geq 0$, $x\in(\alpha, \beta)$,
γ) η f (x) είναι κυρτή.

20*. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες ώστε f(x) - g(x) = x - 4 για κάθε $x\in R$ και ότι η ευθεία y = 3x-7 είναι ασύμπτωτη της γ. π. της f καθώς το x τείνει στο +∞ .
α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$,
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = 2x-3 είναι ασύμπτωτη της γ.π. της g καθώς το x τείνει στο +∞ . (Α΄ 2000)

21*. α) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου μπορεί να έχει το πολύ δυο κοινά σημεία με την γ. π. μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης σ' ένα διάστημα.
β) Τι συμπεραίνετε αν τρία σημεία της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης είναι συνευθειακά;
γ) Να δείξετε ότι τρία διαφορετικά σημεία της γ. π. της συνάρτησης $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

22*. Α. Έστω Σ κυρτή συνάρτηση στο R και ξ πραγματικός αριθμός με $\Sigma'(\xi) = \Sigma(\xi) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η Σ έχει ελάχιστο ίσο με 0.
Β. Έστω φ διπλά παραγωγίσιμη στο συνάρτηση η οποία παρουσιάζει στο ξ τοπικό ακρότατο ίσο με 0 και ισχύει $\varphi''(\chi) > 4(\varphi'(\chi) - \varphi(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$. Να αποδειχθεί ότι
i) η συνάρτηση $\Sigma(\chi) = e^{-2\chi}\varphi(\chi)$, $\chi\in R$ είναι κυρτή, ii) ισχύει $\varphi(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi\in R$.

23*. Έστω Σ κυρτή συνάρτηση στο διάστημα (κ, λ) και κ < α < β < λ. Να δειχθεί ότι
α) η συνάρτηση $A(\chi) = \frac{\Sigma(\chi)-\Sigma(\alpha)}{\chi-\alpha}$ είναι γν. αύξουσα στο διάστημα (α, β],
β) ισχύει $\Sigma(\alpha) + \frac{\Sigma(\beta)-\Sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}(\chi-\alpha) \geq \Sigma(\chi)$ για κάθε $\chi\in[\alpha, \beta]$, με ισότητα μόνο για χ = α ή χ = β. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής; Διατυπώστε ανάλογη για κοίλη συνάρτηση. γ) Ισχύει $\frac{\Sigma(\alpha)+\Sigma(\beta)}{2} \geq \Sigma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

24*. Έστω α, β , α < β, ρίζες της πρώτης παραγώγου μιας πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) με $P'''(x) \neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. Να αποδειχθεί ότι:
i) η P΄΄(x) είναι γν. μονότονη στο (α, β),
ii) η P(x) έχει μοναδικό σημείο καμπής στο διάστημα (α, β),
iii) Αν στο σημείο αυτό η P(x) έχει οριζόντια εφαπτομένη, τότε η P(x) είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

25* .Έστω φ κοίλη συνάρτηση στο διάστημα [α, β].Τότε ισχύουν

α) $\varphi(\chi) + \varphi(\alpha + \beta - \chi) \le 2\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

β) Να δειχθεί ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\Sigma(\chi) = \frac{\varphi(\chi)-\varphi(\alpha)}{\chi-\alpha}$ στο διάστημα (α,. β]

και η μέγιστη της $T(\chi) = \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\chi)}{\beta-\chi}$ στο διάστημα [α, β) είναι ίσες.

γ) Να δειχθεί ότι $\varphi(\chi) > \frac{\chi(\varphi(\beta)-\varphi(\alpha))+\beta\varphi(\alpha)-\alpha\varphi(\beta)}{\beta-\alpha}$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$.

26. α)Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{\alpha^x}{x} - 1$, $\alpha > 1$, $x > 0$.

β) Να αποδειχθεί ότι η γ. π. της $y = \alpha^x$, $\alpha > 1$, έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$ αν και μόνο αν $\alpha \le e^{1/e}$.

γ) Αν $\alpha = e^{1/e}$ ($\cong$1,4446) να δειχθεί ότι η $y = x$ εφάπτεται στην γ. π. της $y = \alpha^x$ στο σημείο (e, e) και δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτήν. Ποια είναι στην περίπτωση αυτή η θέση της $y = x$ ως προς την γ. π. της αντίστροφης της $y = \alpha^x$;

δ) Αν $1 < \alpha < e^{1/e}$ να δειχθεί ότι η $y = x$ τέμνει την $y = \alpha^x$, $x > 0$, σε δυο ακριβώς σημεία (κ, κ), (λ, λ) με $\kappa < e < 1/\ln\alpha < \lambda$. Να βρεθεί στη συνέχεια πόσα κοινά σημεία έχει στην περίπτωση αυτή η γ. π. της $y = \alpha^x$ με την γ. π. της αντίστροφή της.

ε) Τι συμβαίνει στην περίπτωση $\alpha > e^{1/e}$;

27*. α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha^x = x$, $0 < \alpha < 1$, έχει μοναδική ρίζα, έστω ρ, η οποία ανήκει στο διάστημα (0, 1).

β) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $\varphi(x) = x\alpha^x(\ln\alpha)^2 - 1$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

γ) Αν $0 < e^{-e} \le \alpha < 1$ να δειχθεί ότι η γ. π. της $y = \alpha^x$ με την γ. π. αντίστροφή της ($\log_\alpha x$) έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο το (ρ, ρ) με $e^{-1} \le \rho < 1$. Μάλιστα, αν $\alpha = e^{-e}$ ($\cong$0,066) τότε η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην γ. π. της $y = \alpha^x$**,** καθώς και της αντίστροφής της στο σημείο (1/e, 1/e).

δ) Να βρεθεί η θέση της γ. π. της $y = e^{-x}$ με την γ. π. της αντίστροφής της.

28*. α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha^x = x$, $0 < \alpha < 1$, έχει μοναδική ρίζα, έστω ρ, η οποία ανήκει στο διάστημα (0, 1).

β) Αν $0 < \alpha < e^{-e}$ να δειχθεί ότι $\alpha(\ln\alpha)^2 < 1$.

γ) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x\alpha^x(\ln\alpha)^2 = 1$, με $0 < \alpha < e^{-e}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες λ. μ με $0 < \lambda < \rho < \mu < 1$ (μάλιστα $\rho < -1/\ln\alpha < \mu$)

δ) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^x - \frac{\ln x}{\ln\alpha}$, $x > 0$, $0 < \alpha < e^{-e}$.

ε) Αν $0 < \alpha < e^{-e}$ τότε η γ. π. της $y = \alpha^x$ και της αντίστροφή της ($\log_\alpha x = \ln x/\ln\alpha$) έχουν τρία ακριβώς κοινά σημεία με τετμημένες γ, ρ, δ με

$0 < \gamma < \lambda < \rho < \mu < \delta < 1$ και $\alpha^\gamma = \delta$, $\alpha^\delta = \gamma$, $\alpha^\rho = \rho$.

29*. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f'(\chi) = +\infty$.

Να αποδειχθεί ότι: α) Αν $\alpha > 0$ τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(f(\chi+\alpha)-f(\chi)\right) = +\infty$.

β) ισχύει $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(5^{\sqrt{x+2}} - 5^{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.

30*. Έστω Σ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα (1, +∞) με $|\Sigma'(\chi)| \le \frac{1}{\chi}$ για κάθε χ > 1. Να δειχθεί ότι. $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\Sigma(\chi+\sqrt{\chi})-\Sigma(\chi)\right)=0$.

31*. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β) και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}\Sigma'(\chi)=\kappa\in R$. Να δειχθεί ότι η Σ είναι παραγωγίσιμη στο α και ισχύει Σ′(α) = κ.

32*. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$, 0 < x < 1, α >1.

i. Αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) είναι κυρτή στο διάστημα (0, 1).

ii. Αποδείξτε ότι για όλα τα x, y∈(0, 1) και α >1 ισχύει $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$.

iii. Αποδείξτε ότι, αν x > 0, y > 0, α > 1, x + y = 1 τότε ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\ge\frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}.$$ (ΑΣΕΠ 2009)

33*. Α. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α, +∞) η οποία έχει ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία y = λχ + μ. Αν ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης Σ(χ) = λχ + μ να δειχθεί ότι η γ. π. της Σ δεν τέμνει την ασύμπτωτη στο διάστημα (ρ, +∞) και είτε είναι εξ' ολοκλήρου πάνω από αυτήν είτε εξ' ολοκλήρου κάτω από αυτήν. Συμβαίνει το ίδιο και αν η εξίσωση Σ(χ) = λχ + μ δεν έχει ρίζες στο διάστημα (α, +∞);

Β. Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής (β, +∞) όπου η ασύμπτωτη στο +∞ της συνάρτησης $\Sigma(\chi)=\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ έχει με την γ. π. κοινά σημεία.

34*. Α. Να δειχθεί ότι, τρία σημεία Α(α, φ(α)), Β(β, φ(β)), Γ(γ, φ(γ)) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης φ, είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν ισχύει

(α - β)φ(γ) + (β - γ)φ(α) + (γ - α)φ(β) = 0.

Β. Αν μια συνάρτηση φ είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε κάθε ευθεία του επιπέδου έχει το πολύ δυο κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της φ .

Γ. Αν Α, Β, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει

(Α - Β)ημΓ + (Β - Γ)ημΑ + (Γ - Α)ημΒ = 0 τότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

Δ. Έστω λ∈R*. α) να εξεταστεί ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση $\varphi(x)=e^{\lambda x}$, x∈R.

β) να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x)=(3-x)e^{\lambda}+(x-1)e^{3\lambda}-2e^{\lambda x}$, x∈R, με τον x–άξονα. (Βλ. και σχετικό άρθρο στο περιοδικό «φ», τ. 4° , 2007).

Τέσσερις Ιστορικές Καμπύλες*

1. Κισσοειδής του Διοκλέους

α) Η κισσοειδής του Διοκλέους ορίζεται ως γ. τ. του σημείου Μ: έστω κύκλος διαμέτρου ΟΑ = α και Β τυχόν σημείο της εφαπτομένης του στο Α. Αν η ΟΒ τέμνει τον κύκλο στο Γ, το Μ ορίζεται από την ισότητα ΜΒ = ΟΓ.
Αν Μ(x, y) τότε αποδεικνύεται ότι

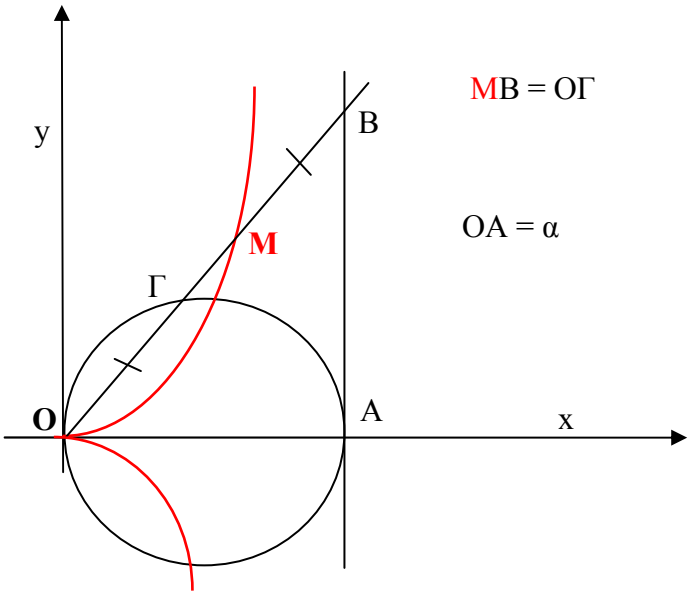
$$x^3 = y^2(\alpha - x),\ 0 \le x < \alpha,\ y > 0$$

β) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις y = f(x) από τις οποίες αποτελείται η καμπύλη με εξίσωση $x^3 = y^2(\alpha - x)$, $0 \le x < \alpha$, όπου α θετική σταθερά
γ) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η μη αρνητική από αυτές τις συναρτήσεις. Στην συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γ. π. της συνάρτηση αυτής στη θέση (α/2, α/2).

Ιστορικά στοιχεία

Με την βοήθεια της *κισσοειδούς ο Διοκλής* (περίπου 180 π. Χ) «έλυσε» το «Δήλιο πρόβλημα», δηλαδή το «πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου».

Η κισσοειδής είναι και ο γεωμετρικός τόπος της προβολής της κορυφής μιας παραβολής πάνω στις διάφορες εφαπτόμενες της («ποδική» παραβολής ως προς την κορυφή της) (άσκηση).



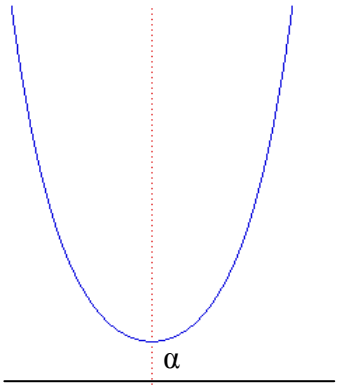
(Βλ. το σχετικό άρθρο *Κισσοειδής του Διοκλέους* στο math-her.gr - Άρθρα)

Άσκηση

Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{\alpha - x}}$, $0 \le x < \alpha$.

2. Αλυσοειδής καμπύλη (J. Bernoulli 1691)

Έστω η συνάρτηση $A(x) = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$, $x \in R$, $\alpha > 0$.



M(x, f(x)) τυχόν σημείο της γραφικής της παράστασης και Η η προβολή του Μ στον x- άξονα. Ισχύουν:

α) Η f είναι κυρτή.

β) Το μήκος της προβολής του τμήματος ΜΗ πάνω στην κάθετη της C_f στο Μ (δηλαδή την κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο Μ) είναι σταθερό.

γ) Το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου ΟΑΜΗ είναι ανάλογο της κλίσης της f στο x, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α το σημείο τομής της C_f με τον y- άξονα. (αφήνεται ως άσκηση)

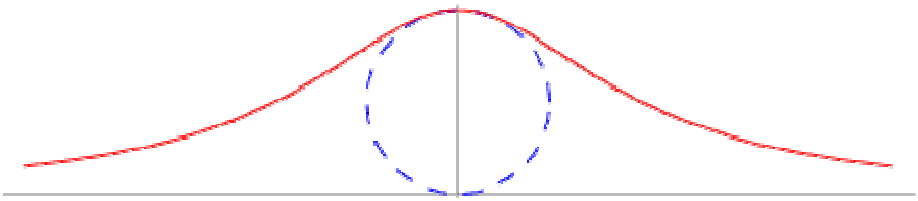
Ιστορικά στοιχεία

Μια λεπτή αλυσίδα κρέμεται από δυο σημεία της, σε ύψος α > 0 από ένα οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους της. Ποια είναι η εξίσωση της καμπύλης που σχηματίζει;
Ο *Γαλιλαίος* (1564-1642) πίστευε ότι είναι παραβολή, αλλά ο *J. Bernoulli* to 1691 απέδειξε ότι είναι μια καμπύλη με εξίσωση y = A(x). Αυτό είναι ένα «πολύ δυνατό» παράδειγμα μελέτης και έκφρασης μιας πραγματικής κατάστασης του κόσμου που ζούμε με την βοήθεια του διαφορικού λογισμού. Δεν μπορεί όμως να διδαχθεί στους μαθητές η πλήρης απόδειξη γιατί απαιτεί στοιχεία από τις διαφορικές εξισώσεις. Η καμπύλη αυτή ονομάστηκε *αλυσοειδής* (Catenary) και έχει, εκτός των (β), (γ), *πολλές άλλες* ενδιαφέρουσες ιδιότητες.
(Βλ. το σχετικό άρθρο *Αλυσοειδής – Έλκουσα*, στο math-her.gr - Άρθρα)

3. Η «Μάγισσα» ή «versiera» της Maria Agnesi (1718-1799)

Έστω κύκλος κέντρου (0, α), α > 0 και ακτίνας R = α και η εφαπτομένη του στο σημείο (0, 2α). Θεωρούμε τυχόν σημείο Σ της εφαπτομένης και την ευθεία ΟΣ η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Η παράλληλη από το Α προς τον άξονα των x και η παράλληλη από το Σ προς τον άξονα των y τέμνονται στο M(x, y). Να αποδειχθεί ότι καθώς το Σ κινείται πάνω στην εφαπτομένη ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι μια καμπύλη με εξίσωση $y = \dfrac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}$.

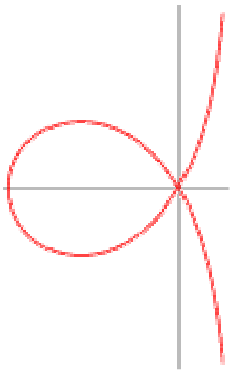
Να μελετηθεί η καμπύλη αυτή, όταν α = 1, και να γίνει η γραφική της παράσταση.



Ιστορικά στοιχεία

Η *Μαρία Ανιέζι* ήταν το πρώτο από τα 21 (!) παιδιά μιας εύπορης και μορφωμένης οικογένειας του Μιλάνου και ο πατέρας ήταν καθηγητής Μαθηματικών. Το πιο σημαντικό της έργο έχει τίτλο Analytical Institutions και προκάλεσε αίσθηση στην τότε ακαδημαϊκή κοινότητα. Είναι ένα έργο πάνω στον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, και αποτελούσε μια σύνθεση των μαθηματικών του Ντεκάρτ, του Νεύτωνα και του Λάϊμπνιτς. Η Agnesi είναι γνωστή από την καμπύλη με το όνομα «Witch of Agnes» (μάγισσα της Agnesi). Το όνομα «μάγισσα» προέκυψε ως εξής: Ονομάστηκε versiera από το Λατινικό ρήμα vertere που σημαίνει αναποδογυρίζω. Όμως η λέξη versiera αποτελεί σύντμηση της ιταλικής λέξης avversiera που σημαίνει «η σύζυγος του διαβόλου». Όταν το κείμενο μεταφράστηκε στα αγγλικά η λέξη versiera μπερδεύτηκε με την avversiera και μεταφράστηκε ως «μάγισσα»!.

4. Τριχοτόμος του C. Maclaurin (1698 - 1746)



Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση y = f(x) με μη αρνητικές τιμές για την οποία ισχύει

$y^2(1 + x) = x^2(3 - x)$, $-1 < x \le 3$ (γενικά $y^2(\alpha - x) = x^2(x+3\alpha)$).

Ιστορικά στοιχεία

Η καμπύλη αυτή χρησιμοποιήθηκε από τον *C. Maclaurin* το 1742 για την τριχοτόμηση μιας γωνίας (ως γνωστόν ένα από τα τρία αρχαία «άλυτα» προβλήματα των Μαθηματικών).

Αν θεωρήσουμε την προβολή της εστίας μιας παραβολής πάνω στην διευθετούσα της, τότε ο γ. τ. των προβολών του σημείου αυτού πάνω στις διάφορες εφαπτόμενες της παραβολής είναι μια *τριχοτόμος* του Maclaurin (άσκηση). –

* * * *