ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Δ . Ε . ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

a. **Τι ονομάζεται μιγαδικός αριθμός και τι γνωρίζουμε για το σύνολο στο οποίο ανήκει ;**
b. **Τι γνωρίζεις για το i ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

a. Το σύνολο $\mathbb{C}$ θα έχει στοιχεία :

- Όλους τους **πραγματικούς αριθμούς**.
- Όλα τα στοιχεία της μορφής: **$\beta.i$,** που είναι γινόμενο του $\mathbb{R}$ με το i **(φανταστική μονάδα) και**
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής **$\alpha+\beta.i$, α ,β** $\in \mathbb{R}$ **.**

Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το $\mathbb{C}$ **: σύνολο μιγαδικών αριθμών.**

Άρα το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο :

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/μού , έτσι ώστε να έχουν τις ιδιότητες , όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολ/μού.
- Υπάρχει ένα στοιχείο (i) τέτοιο ώστε $\boxed{\boldsymbol{i^2=-1}}$
- Κάθε στοιχείο $z \epsilon \mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή:**.**$\boxed{\mathbf{z=\alpha+\beta.}\,\boldsymbol{i} \;\; ,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\epsilon}\mathbb{R}}$

b. Το στοιχείο (i) ονομάζεται φανταστική μονάδα και έχει την ιδιότητα: $\boldsymbol{i^2=-1}$ **,** δηλ. είναι η ρίζα της εξίσωσης: $\boxed{\boldsymbol{\chi^2=-1}}$**.**

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η
Ποια είναι η μορφή ενός μιγαδικού και ενός φανταστικού αριθμού; Πως συμβολίζουμε το πραγματικό και πως το φανταστικό του μέρος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- **Μιγαδικός αριθμός:** είναι ο αριθμός της μορφής:
  $\boldsymbol{z = \alpha + \beta . i}$, $\boldsymbol{\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}}$. Π.χ. $\mathbf{z = 6 + 3.}\boldsymbol{i}$

- **φανταστικός αριθμός:** είναι ο αριθμός της μορφής: $\boldsymbol{\beta . i}$, $\boldsymbol{\beta \epsilon \mathbb{R}}$

  Π.χ. $\mathbf{z = 2013.}\boldsymbol{i}$

- **Πραγματικό μέρος :** ενός μιγαδικού αριθμού:
  $\boldsymbol{z = \alpha + \beta . i}$, $\boldsymbol{\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}}$ είναι το $\boldsymbol{\alpha \epsilon \mathbb{R}}$ και συμβολίζεται με **Re(z),**
  δηλ. $\boxed{\mathbf{Re(z) = \alpha}}$. **Π.χ.** . $\mathbf{z = 6\chi + 3y.}\boldsymbol{i} \xrightarrow{x,y\epsilon\mathbb{R}} \mathbf{Re(z) = 6}\boldsymbol{\chi}$.

Φανταστικό μέρος : ενός μιγαδικού αριθμού: $\boldsymbol{z = \alpha + \beta . i}$, $\boldsymbol{\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}}$ είναι το $\boldsymbol{\beta \epsilon \mathbb{R}}$ και συμβολίζεται με **Im(z),** δηλ. $\boxed{\mathbf{Im(z) = }\boldsymbol{\beta}}$.

Π.χ. . $\mathbf{z = (6 - \chi) + (3 + y).}\boldsymbol{i} \xrightarrow{x,y\epsilon\mathbb{R}} \mathbf{I}\boldsymbol{m}\mathbf{(z) = 3 + y}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η
Πότε λέμε ότι 2 μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta . i$, $z_2 = \gamma + \delta . i$, $\mu\varepsilon\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \epsilon \mathbb{R}$.

  Θα λέμε ότι: $\boxed{\mathbf{z_1 = z_2} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = \gamma} \\ \textbf{και} \\ \boldsymbol{\beta = \delta} \end{cases}.}$

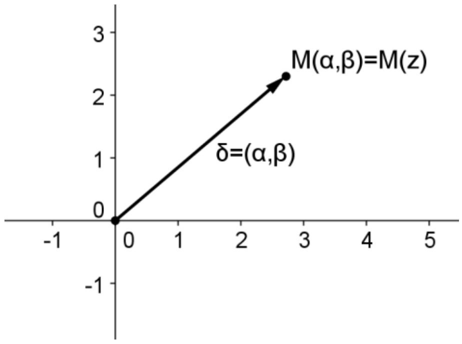
  Δηλ. τα πραγματικά μέρη να είναι ίσα και τα φανταστικά μέρη να είναι ίσα: $\boxed{\mathbf{Re(z_1) = Re(z_2)}\ \textbf{και}\ \boldsymbol{Im}\mathbf{(z_1) = Im(z_2)}}$

2008(επαν): Θέμα 1ο Σ-Λ

- **Στην ειδική περίπτωση όπου:** $\boxed{\mathbf{z_1 = 0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha + \beta . i} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 0} \\ \textbf{και} \\ \boldsymbol{\beta = 0} \end{cases}.}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η
Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του μιγαδ. αριθμού $z = \alpha + \beta . i$, $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Κάθε μιγαδικό αριθμό $\boldsymbol{z = \alpha + \beta . i}$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε σε ένα σημείο: **M(z)=M(α,β)** ή στην διανυσματική ακτίνα του Μ δηλ. στο διάνυσμα: $\vec{\boldsymbol{\delta}} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \overrightarrow{\mathbf{OM}}$ και αντίστροφα . Το σημείο Μ ονομάζεται εικόνα του z.

Το ορθοκανονικό καρτεσιανό επίπεδο ονομάζεται και **μιγαδικό επίπεδο**, ο άξονας των χ ονομάζεται **πραγματικός άξονας** ενώ ο άξονας των y , ονομάζεται **φανταστικός άξονας** .Προφανώς:

- **Οι z=α** $\boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{M(z) = M(\alpha, 0)\epsilon\ \chi\chi'}$
- **Οι z=β**$\boldsymbol{.\, i\ \mu\varepsilon\ \beta\epsilon}\ \mathbb{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{M(z) = M(0, \beta)\epsilon\ yy'}$**.**

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 5η</u>
Πως ορίζεται η πρόσθεση και η αφαίρεση 2 μιγαδικών αριθμών και ποια η γεωμετρική ερμηνεία τους;

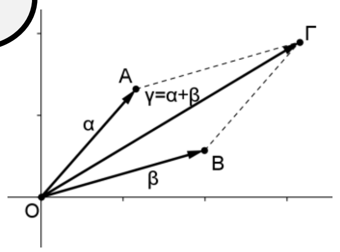
<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

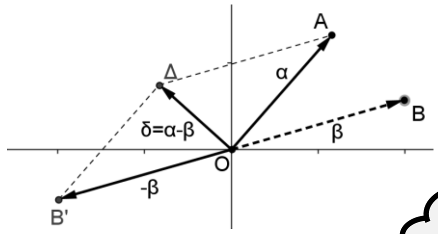
Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta . i$, $z_2 = \gamma + \delta . i$ $\mu\varepsilon\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \epsilon \mathbb{R}$ τότε :

- **<u>ΠΡΟΣΘΕΣΗ</u>** : $z_1 + z_2 = (\alpha + \beta . i) + (\gamma + \delta . i) \Rightarrow$
  $\boxed{\boldsymbol{z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) . i}}$
- **<u>ΑΦΑΙΡΕΣΗ</u>** : $z_1 - z_2 = (\alpha + \beta . i) - (\gamma + \delta . i) \Rightarrow$
  $\boxed{\boldsymbol{z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) . i}}$

2004 και 2012(επαν): Σ-Λ(2Μ)

<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ</u>





2010: Σ-Λ

Παρατηρούμε ότι : $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$, δηλ. όταν προσθέσουμε 2 μιγαδικούς αριθμούς τότε προκύπτει ένας 3ος του οποίου η δια/κή ακτίνα είναι το άθροισμα των δια/κών ακτινών των άλλων 2.

Παρατηρούμε ότι: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\delta}$, όταν αφαιρέσουμε 2 μιγαδικούς αριθμούς τότε προκύπτει ένας 3ος του οποίου η δια/κή ακτίνα είναι η διαφορά των δια/κών ακτινών των άλλων 2.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η
Πως ορίζεται ο πολ/μός 2 μιγαδικών αριθμών;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta . i$, $z_2 = \gamma + \delta . i$ $\mu\varepsilon\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \epsilon \mathbb{R}$

τότε : $z_1 . z_2 = (\alpha + \beta . i).(\gamma + \delta . i) = \alpha . \gamma + \alpha . \delta . i + \beta . \gamma . i + \beta . \delta . i^2 \Rightarrow$

$z_1 . z_2 = \alpha . \gamma + \alpha . \delta . i + \beta . \gamma . i - \beta . \delta \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{z_1 . z_2 = (\alpha . \gamma - \beta . \delta) + (\alpha . \delta + \beta . \gamma) . i}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Σε ασκήσεις δεν θα εφαρμόσουμε τον τελικό τύπο , αλλά θα κάνουμε την επιμεριστική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Αν $z_1 = 3 + 6. i$, $z_2 = 7 - 2. i$ να βρεθεί ο : $z_1 . z_2$

ΛΥΣΗ

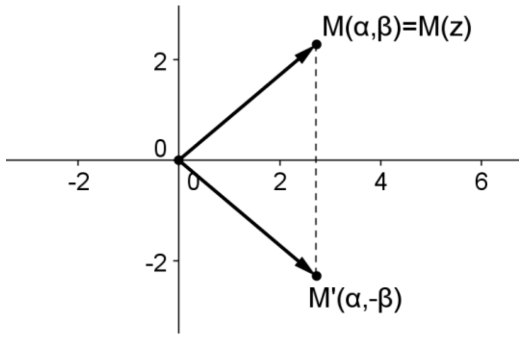
ΕΡΩΤΗΣΗ 7η
Τι ονομάζεται συζυγής του μιγαδικού αριθμού: $\boldsymbol{z = \alpha + \beta . i}$ $\boldsymbol{\mu\varepsilon\ \alpha, \beta \epsilon} \mathbb{R}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εάν $\mathbf{z = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}. i}$ με $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ τότε **ο συζυγής μιγαδικός του z** είναι ο $\boxed{\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\alpha - \beta . i}}$ $\boldsymbol{\mu\varepsilon\ \alpha, \beta \epsilon} \mathbb{R}$

Ο $\mathrm{z} = \alpha + \beta.\mathrm{i}$ με $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ έχει διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM} = (\alpha, \beta)$.

Ο $\bar{z} = \alpha - \beta.\mathrm{i}$ με $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ έχει διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM'} = (\alpha, -\beta)$.



2005(επαν) και 2012:
Θέμα 1ο Σ-Λ(2Μ)

Παρατηρούμε ότι οι 2 δ/ικές ακτίνες είναι συμμετρικές ως προς τον χχ'.

Προφανώς ο συζυγής του συζυγούς είναι ο ίδιος ο μιγαδικός δηλ.

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{z}}} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}.\mathbf{i}}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η
Πως ορίζεται η διαίρεση 2 μιγαδικών αριθμών;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta.i \, , z_2 = \gamma + \delta.i \;\; \mu\varepsilon \; \alpha, \beta, \gamma, \delta \epsilon \mathbb{R}$ και $|\boldsymbol{\gamma}| + |\boldsymbol{\delta}| \neq \mathbf{0}$ (γιατί;) τότε :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha+\beta.i}{\gamma+\delta.i} = \frac{(\alpha+\beta.i)(\gamma-\delta.i)}{(\gamma+\delta.i)(\gamma-\delta.i)} = \frac{\alpha.\gamma-\alpha.\delta.i+\beta.\gamma.i-\beta.\delta.i^2}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{\alpha.\gamma-\alpha.\delta.i+\beta.\gamma.i+\beta.\delta.}{\gamma^2+\delta^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{\boldsymbol{\alpha.\gamma+\beta.\delta}}{\boldsymbol{\gamma^2+\delta^2}} + \frac{\boldsymbol{\beta.\gamma-\alpha.\delta}}{\boldsymbol{\gamma^2+\delta^2}}.\boldsymbol{i}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δηλ. για να βρω το πηλίκο 2 μιγαδικών αριθμών πολ/ζω τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή . Άρα δεν εφαρμόζω τον τύπο αλλά κάνω τις ίδιες πράξεις που έκανα πιο πάνω.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Αν $\boldsymbol{z_1 = 3 + 2.i}$, $\boldsymbol{z_2 = 6 + 2.i}$ να βρεθεί ο : $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}}$

ΛΥΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΗ 9η
Τι ονομάζουμε δύναμη μιγαδικού αριθμού z;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z , ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς δηλ.

Σ-Λ: 2011

- $z^0 = 1, \; z \neq 0$
- $z^1 = z \, , \, z^2 = z.z \, , \ldots \;\; , z^\nu = z^{\nu-1}.z$, **ν**$\in \mathbb{N}^*$**.**
- $z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu} \, , \; \nu \geq 1 \;\; , \; z \neq 0$.

Προσοχή : Επειδή η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολ/μο 2 μιγαδικών z,w ισχύει , θα ισχύουν και όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων αλλά και οι γνωστές ταυτότητες.

Αντίθετα η συνεπαγωγή $\boldsymbol{z^{2\nu} + w^{2\nu} = 0 \Rightarrow z = w = 0}$ δεν ισχύει.

Πράγματι για δοκιμάστε τα παρακάτω :

- $(1+\mathrm{i})^2 + (1-\mathrm{i})^2 =$

  Ενώ $1+\mathrm{i} \neq 0 \neq 1-\mathrm{i}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 10η
Τι γνωρίζουμε για τις δυνάμεις του i;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^\nu = i^{4.\pi+\upsilon} = i^{4\pi}.i^\upsilon = (i^4)^\pi.i^\upsilon = 1^\pi.i^\upsilon$

$= 1.i^\upsilon \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{i^\nu = i^\upsilon, \upsilon = 0,1,2,3.}}$

Οπότε μία δύναμη του i , δηλ. i^ν είναι είναι ίση με μία δύναμη του i , όπου ο εκθέτης είναι το υπόλοιπο της διαί-ρεσης ν:4

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ:</u> Να υπολογισθούν οι δυνάμεις:

$\boldsymbol{i^{2011}} =$

$\boldsymbol{i^{2013}} =$

ΕΡΩΤΗΣΗ 11η
Να γραφτούν και να αποδειχθούν οι ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε $\boxed{z = x + y.i} \overset{x,y\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \bar{z} = \overline{x + y.i} \boxed{\Leftrightarrow \bar{z} = x - y.i}$

- $\boxed{\boldsymbol{z + \bar{z} = 2x = 2.Re(z)}}$

Απόδειξη

$\boldsymbol{z + \bar{z}} = x + y.i + x - y.i = 2\chi = \boldsymbol{2Re(z)}.$

2011(επαν):
Θέμα 1ο
Σ-Λ(2Μ)

- $\boxed{\boldsymbol{z - \bar{z} = 2y.i = 2.Im(z).i}}$

Απόδειξη

$\boldsymbol{z - \bar{z}} = x + y.i - (x - y.i) = x + y.i - x + y.i = 2y.i = \boldsymbol{2Im(z).i}$

- $\boxed{\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}}$

Απόδειξη

$\overline{\boldsymbol{z_1 + z_2}} = \overline{(x_1 + y_1.i) + (x_2 + y_2.i)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2).i} =$

$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2).i = x_1 + x_2 - y_1.i - y_2.i =$

$= (x_1 - y_1.i) + (x_2 - y_2.i) = \boldsymbol{\overline{z_1} + \overline{z_2}}.$

- $\boxed{\boldsymbol{\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}}}$

Απόδειξη

2009(επαν):
Θέμα 1ο
Σ-Λ(2Μ)

- $\boxed{\boldsymbol{\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}}}$ $\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$
- $\boxed{\boldsymbol{\overline{z_1.z_2 \ldots z_\nu} = \overline{z_1}.\overline{z_2} \ldots \overline{z_\nu}}}$
- $\boxed{\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_\nu}}}$ $\boxed{\boldsymbol{\overline{z^\nu} = \bar{z}^\nu}}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 12η
Να γίνει η διερεύνηση της εξίσωσης: $\boldsymbol{\alpha . z^2 + \beta . z + \gamma = 0}$ $\boldsymbol{\mu\varepsilon}$
$\boldsymbol{\alpha \neq 0}$, $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}$**.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε: $\boxed{\boldsymbol{\alpha . z^2 + \beta . z + \gamma = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Longrightarrow} \left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}}}$ (1),

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \mu\varepsilon\ \Delta = \beta^2 - 4.\alpha.\gamma$.

Διακρύνουμε 3 περιπτώσεις για την Δ

- Αν $\boxed{\boldsymbol{\Delta > 0}}$ τότε η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις τις : $\boxed{\boldsymbol{z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}}$
- Αν $\boxed{\boldsymbol{\Delta = 0}}$ τότε η εξίσωση έχει 1 διπλή πραγματική λύση την : $\boxed{\boldsymbol{z_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}}}$
- Αν $\boxed{\boldsymbol{\Delta < 0}}$ τότε η εξίσωση έχει 2 μιγαδικές λύσεις τις : $\boxed{\boldsymbol{z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i.\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}}$, **οι οποίες είναι συζυγείς αφού** :

Σ-Λ: 2007

$$z_1 = \frac{-\beta}{2\alpha} + \frac{i.\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \kappa\alpha\iota \quad z_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} - \frac{i.\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

απόδειξη

Εφ' όσων $\Delta < 0$ τότε $\Delta = -1(-\Delta) = i^2\sqrt{-\Delta}^2 = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2}{(2\alpha)^2} \Rightarrow z + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$z = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} .$$

Σημείωση :

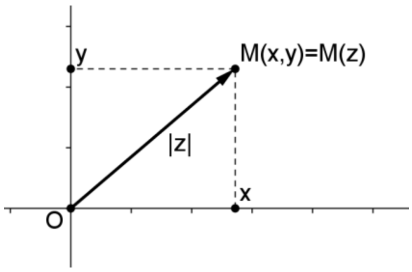
Να βρεθούν τα S , P του παραπάνω τριωνύμου όπου:

$\mathbf{S = z_1 + z_2 =}$

$\mathbf{P = z_1 . z_2 =}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 13η
Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z και ποια η γεωμετρική ερμηνεία;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Έστω ο μιγαδικός z=x+yi με $x, y \in \mathbb{R}$, μέτρο του z ονομάζεται ένας μη αρνητικός , που θα συμβολίζεται με |z| και θα δίνεται , από τον τύπο

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Από το σχέδιο παρατηρούμε ότι το $|z|$ εκφράζει:

- Την απόσταση του M(z) από την αρχή των αξόνων.
- Το μέτρο της διανυσματικής ακτίνας του z.

Εφαρμογή

Αν z=6-3i , να βρεθεί το |z|=;

Λύση

ΕΡΩΤΗΣΗ 14η
Να γραφτούν και να αποδειχθούν οι ιδιότητες του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ο μιγαδικός z=x+yi με $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $\boxed{|z| = |-z|}$ **(Προφανώς $|z| = |\bar{z}|$)**

Σ-Λ: 2003

απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} z = x + yi \quad \text{τότε} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ -z = -x - yi \quad \text{τότε} |-z| &= \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{|z| = |-z|}$.

2006 και 2010(επαν):
Θέμα 1ο Σ-Λ(2Μ)

- $\boxed{|z|^2 = z.\bar{z}}$

απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} z = x + yi \quad \text{τότε } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 \\ z.\bar{z} = (x + yi).(x - y.i) \Rightarrow z.\bar{z} = x^2 - (yi)^2 \Rightarrow z.\bar{z} = x^2 + y^2 \end{aligned}\right\}$$

Σ-Λ: 2009

$\Rightarrow \boldsymbol{|z|^2 = z.\bar{z}}$.

2001:Θ.1ο A_1(7,5Μ)

2007:Θ.1ο A_1(8Μ)

- $\boxed{|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|}$

απόδειξη

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| \Leftrightarrow |z_1.z_2|^2 = (|z_1|.|z_2|)^2 \Leftrightarrow (z_1.z_2)(\overline{z_1.z_2}) = |z_1|^2.|z_2|^2$

$\Leftrightarrow (z_1.z_2)(\overline{z_1}.\overline{z_2}) = z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2} = z_1.\overline{z_1}.z_2.\overline{z_2}$.

που ισχύει.

- $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \mu\varepsilon\ z_2 \neq 0}$

απόδειξη

- $\boxed{|z^\nu| = |z|^\nu}$ $, \nu \in \mathbb{N}$

<u>Εφαρμογή:</u>

Αν $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ να βρεθούν τα παρακάτω μέτρα:

Αντιστοίχιση 2001 (7,5Μ)

$|z_1 . z_2| =$

$|{z_1}^2| =$

$|z_1|^2 =$

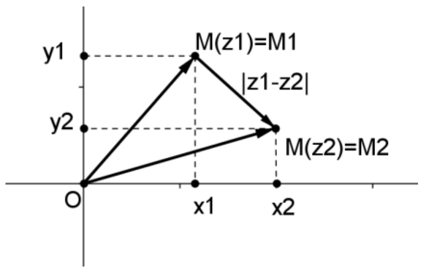
$-|\overline{z_1}| =$

$|i . z_2| =$

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 15η</u>
Τι εκφράζει το μέτρο της διαφοράς 2 μιγαδικών αριθμών;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με εικόνες τα σημεία Μ(z_1) , Μ(z_2) αντίστοιχα.

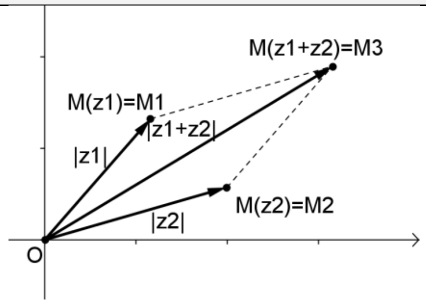


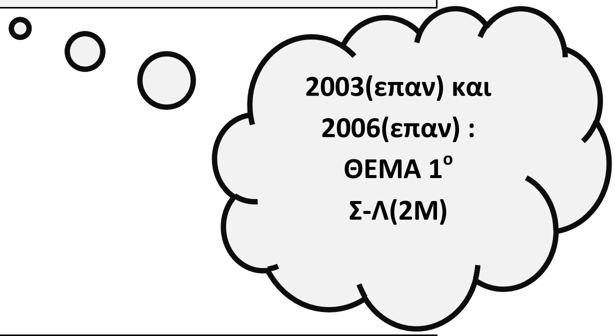
2005(επαν) και 2004(επαν): ΘΕΜΑ 1ο Σ-Λ(2Μ)

Η διαφορά 2 μιγαδικών αριθμών είναι ένας μιγαδικός αριθμός , του οποίου το μέτρο εκφράζει την απόσταση των 2 εικόνων Μ(z_1) , Μ(z_2) δηλ.

$$\boxed{|z_1 - z_2| = (M_1 M_2)}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 16η
Να συμπληρωθεί η σχέση : $\ldots \leq |\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}| \leq \cdots$

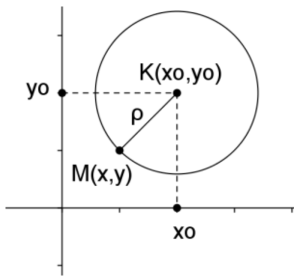




ΕΡΩΤΗΣΗ 17η
Τι εκφράζει η σχέση : $\boxed{|z - z_0| = \rho}$, όπου $\rho > 0$ και $z_0 = x_0 + y_0 . i$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι μιγαδικοί $z = x + y . i$, που ικανοποιούν την πιο πάνω σχέση ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Κ(x_0, y_0) και ακτίνα ρ.



Πράγματι $|z - z_0| = \rho \Leftrightarrow (MK_o) = \rho$,

όπου Μ οι εικόνες των z και K_o η εικόνα του z_o.

<u>Εφαρμογή</u>

Να βρεθεί ο γ.τ. των z με:

2001: (5M)

i. $|z-(3+2i)|=2$

ii. $|z-3-6i|=2$

iii. $|z|=1$(Ν.δ.ο. $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$)

iv. $2|z-3+6i|=4$

v. $3|\bar{z}-3-6i|=6$

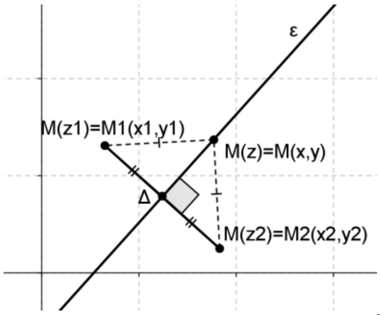
ΕΡΩΤΗΣΗ 17η

Τι εκφράζει η σχέση : $\boxed{|\mathbf{z}-\mathbf{z_1}|=|\mathbf{z}-\mathbf{z_2}|}$,

$\mathbf{z_1}=\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1}$, $\mathbf{z_1}=\mathbf{x_1}+\mathbf{y_1}$ **με** $\chi_1,\chi_2,\mathbf{y_1},\mathbf{y_2}\in\mathbb{R}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι μιγαδικοί $z=x+y.i$, που ικανοποιούν την πιο πάνω σχέση ανήκουν στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 όπου $M_1=M(z_1)\ και\ M_2=M(z_2)$



Πράγματι : Τα 2 μέτρα $|\mathbf{z}-\mathbf{z_1}|,|\mathbf{z}-\mathbf{z_2}|$ δηλώνουν τις αποστάσεις των σημείων $M(z)=M(x,y)$ $από\ τα\ σημεία\ M_1=M(z_1)\ και\ M_2=M(z_2)$ και επειδή είναι ίσες τότε τα σημεία $M(z)=M(x,y)$ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο γ.τ. των z με:

i. $|z-(3+2i)|=|z-3+2i|$

ii. $|-z-3-6i|=|\overline{z}-(3+2i)|$

iii. $\frac{|z|}{|z-(3+2i)|}=1$

iv. $|z-3+6i|-|z-(3+2i)|=$