

Μιγαδικοί αριθμοί

1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού

$$(α') i^2 = -1$$

1.1 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $i(1-2i) + 2(i-1)$ β) $(i^2 - 2i + 3)(i^2 + i - 1)$
 γ) $(i^2 + i)(1+2i)$ δ) $(i^2 - i)(1-i)(2+i^2)(2-i^2)$
 ε) $i(2-i) + 2i(1-i) - 3i(i^2-2)$ ζ) $(i-1)(3i^2+2i+5)$
 η) $(3i^2 - 7i + 5)(4i^2 - 2i + 7) + (1-i^2)(2+3i-5i^2)$
 θ) $ix(i-x-2) - i(2x-3) + i(x^2-3)$, με $x \in \mathbb{R}$

1.2 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $\frac{5}{1-2i}$ β) $i - \frac{1}{i}$ γ) $\frac{1+2i}{2-i}$ δ) $\frac{3-7i}{1+i} + \frac{7-3i}{1-i}$
 ε) $\frac{3+i}{2i}$ ζ) $\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$ η) $\frac{3i^2+i}{2i-1}$ θ) $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$
 ι) $\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ κ) $\frac{(2+3i)(1-i)}{1-2i}$ λ) $\frac{1-2i}{3+i} \cdot \frac{1+2i}{1+3i}$
 μ) $\frac{(2-5i)(1+i) - (-2+3i)}{3+4i}$ ν) $\frac{1+2i}{2-i} + \frac{2}{i}$

1.3 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $(i-3)^2 + (2+i)^2$ β) $(3+4i)^2 + (4-3i)^2 + i^2$
 γ) $(1-\sqrt{2}i)^2$ δ) $(3+4i)^2(1-i) + (3-4i)^2(1+i)$
 ε) $(1-i)(1-2i)(1+i)(1+2i) + i^2$ ζ) $(1-2i)^3$
 η) $(1+i)^3 - (1-i)^3$ θ) $(2+3i)^3 + (2-3i)^3$
 ι) $(2-i)^5(2+i)^6$

1.4 Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών:

α) $(i-1)i^{-1} - 2(1-i)^{-2}$ β) $(1-2i)^{-2} + (1+2i)^{-2}$
 γ) $(6-4i)(1-i)^{-1} + (17+19i)(1-5i)^{-1}$

1.5 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $\frac{(2+i)^2}{3+i}$ β) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ γ) $\left(\frac{1-5i}{3-2i}\right)^2 + \left(\frac{4-2i}{1-3i}\right)^2$
 δ) $\frac{(1-i)^3 + (1+i)^3}{(1-i)^3 - (1+i)^3}$ ε) $\left(\frac{i-3}{2}\right)^3 - \left(\frac{i+3}{2}\right)^3$
 ζ) $\left(\frac{3+3i}{i-1}\right)^2$ η) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-4}$
 θ) $\frac{(x+i)^2 - (x-i)^2}{(3+i)^3 + (3-i)^2}$, με $x \in \mathbb{R}$

1.6 Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i) = x^4 + 4$$

1.7 Αν $z = 3 + 4i$ και $w = 2 - 3i$, να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z + w, zw, \frac{26}{w} \text{ και } \frac{25w}{z}$$

1.8 Αν $z = 2 - 3i$, να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τον μιγαδικό αριθμό $w = \frac{z+2i}{z-2i}$

1.9 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \frac{(1-i)^2}{1+i} \text{ και } w = \frac{z^2+1}{z}$$

Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού w

1.10 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2}$. Να αποδείξετε ότι $4z^2 - 8z + 5 = 0$

1.11 Δίνεται ο μιγαδικός $z = 9 + xi$, με $x > 0$. Να βρείτε την τιμή του x ώστε τα φανταστικά μέρη των z^2 και z^3 να είναι ίσα

1.12 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta}$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z = -i$ β) $(1+z)^6 = 8i$

1.13 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ ώστε να είναι:

$$\frac{a}{7+4i} = \frac{b}{1+2i} = \frac{c}{1+3i}$$

Να αποδείξετε ότι $\frac{a}{a-6b+2c} = 1+2i$

1.14 Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1+i^{-1}}{1-i} + \frac{1-i^{-1}}{1+i} + \frac{1+i}{1-i^{-1}} + \frac{1-i}{1+i^{-1}} = 4$

β) $\frac{1}{i} \left(\frac{1}{i} - 1 \right) - \left(\frac{1}{i} - i \right) \left(\frac{1}{i} + 1 \right) = 1 + 3i$

γ) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = 2i^{n-1}$, με $n \in \mathbb{N}$

δ) $(1+i)^{4n} = (1-i)^{4n}$, με $n \in \mathbb{N}$

1.15 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, τότε είναι: $Re(z) > 0 \Leftrightarrow Re\left(\frac{1}{z}\right) > 0$

1.16 Έστω $\alpha, \beta > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $(\alpha + \beta i)^n = (\alpha - \beta i)^n$

α) Να αποδείξετε ότι $n \geq 3$

β) Για $n = 3$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1.17 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός:

$$z = \frac{1}{1 + \sigma \nu \theta + i \eta \mu \theta}, \text{ όπου } \theta \neq 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Να αποδείξετε ότι } (Re(z))^2 + (Im(z))^2 = \frac{1}{2(1 + \sigma \nu \theta)}$$

1.18 Έστω $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{w^3} + \frac{3}{z^2 w} + \frac{3}{z w^2}$$

1.19 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $z^3 = 1$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = z^{2n} + z^n$, με $n \in \mathbb{N}$

1.20 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ και την παράσταση

$$E(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^3 + z^2 + 1}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές $E(z_1)$ και $E(z_2)$

1.21 Αν $\alpha \in (-1, 1)$, βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών:

$$\alpha) z = \frac{\sqrt{1+\alpha} + i\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} - i\sqrt{1-\alpha}} - \frac{\sqrt{1-\alpha} + i\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1-\alpha} - i\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\beta) w = \frac{\sqrt{1-\alpha} - i\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1-\alpha} + i\sqrt{1+\alpha}} - \frac{\sqrt{1+\alpha} - i\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} + i\sqrt{1-\alpha}}$$

1.22 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{Re(z^2) + iIm(z^2)}{Im(z^2) - iRe(z^2)} = \frac{Re(z) + iIm(z)}{Im(z) - iRe(z)}$$

1.23 Έστω οι μιγαδικοί $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 1 + z + z^2 = 0 \text{ και } z^3 = 1$$

$$\beta) 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 1$$

$$\gamma) w^{2n} = z^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\delta) w^{300} = 1 \text{ και } w^{333} = -1$$

$$\epsilon) z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}} = z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}} = 2$$

1.24 Έστω ο μιγαδικός $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ και θεωρούμε την παράσταση:

$$E = (\alpha + \beta z + \gamma z^2)(\alpha + \beta z^2 + \gamma z), \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $z^3 = 1$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση E

(β') Ισότητα μιγαδικών

1.25 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = (2x + y + 5) + 2i$ και $w = (4x - 2y + 4) + (3x - 4y)i$. Αν $z = w$, να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y

1.26 Δίνεται ο μιγαδικός:

$$z = 6i - (3 - 4i)x - 3yi - (3i - 2)x + (4 - 2yi)$$

Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, για τις οποίες είναι $z = 0$

1.27 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) x - 2 + (y - 3)i = (1 + 3i)(y + i)$$

$$\beta) (x + y) + (x^2 - y^2)i = 5 + 5i$$

$$\gamma) x(1 + xi) + 2(1 + xi) = 2(3y - 1)i - y(1 + yi)$$

$$\delta) x(x + 2y + i) + 1 + yi = 6x + 3i$$

$$\epsilon) (x^2 + y^2)i + x^2 = 9(1 + i) + y$$

$$\zeta) (x + yi)^2 = \frac{12 + 5i}{i}$$

$$\eta) \frac{x}{2 + i} + \frac{y}{1 - 2i} = \frac{6 - 2i}{4 - 3i}$$

$$\theta) (x + i)^2 + \frac{4}{i} = (i - x)^2 + y + 1$$

$$\iota) \frac{x - yi}{1 + i} + \frac{1}{i} = \frac{x}{2} + \frac{1}{1 - i}$$

$$\kappa) (x + yi)^2 = \frac{55 + 10i}{1 - 2i}$$

$$\lambda) \frac{x}{1 + 2i} + \frac{y}{3 + 2i} = \frac{5 + 6i}{-1 + 8i}$$

1.28 Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^3 + 2z^2 + \kappa z + \lambda - 4 - i$. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες είναι $f(1 + i) = 0$

1.29 Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους a, b, c για τους οποίους ισχύει η σχέση $c = (a + bi)^3 - 107i$

$$(\gamma) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \text{ και } z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow Re(z) = 0$$

1.30 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι πραγματικοί:

$$\alpha) (1 - i)^{24} \quad \beta) (1 + i\sqrt{3})^3 \quad \gamma) \left(\frac{1}{1 - i} - \frac{1}{1 + i} \right)^2$$

$$\delta) (\sqrt{3} + i)^6$$

1.31 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1 + ai}{1 - ai}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $w = z + \frac{1}{z}$ είναι πραγματικός

β) Ο αριθμός $u = z - \frac{1}{z}$ είναι φανταστικός

1.32 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό:

$$z = \frac{(1+3i)(2-3i) - (-4+i)}{2x+i}, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z

β) Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες είναι:

ι) $z \in \mathbb{R}$ υ) $z \in \mathbb{I}$

1.33 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι:

ι) $z \in \mathbb{R}$ υ) $z \in \mathbb{I}$

α) $z = 6 + 2x^2i - 3(x+6i)$ β) $z = (2-x+3xi)(i-x)$

γ) $z = (2x+i)(1+i)^2 + (x^2+4)i + x$

δ) $z = \frac{x+2}{x+i}$ ε) $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{x+(x+1)i}$ ζ) $z = \frac{x+i}{x-xi}$

η) $z = \frac{\eta\mu x + i\sigma\nu x}{\sqrt{3}+i}$

1.34 Αν $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$(z-1)(iz-1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -y \text{ ή } x - y = 1$$

1.35 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z = \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} \text{ και } w = \frac{\beta + \alpha i}{\beta - \alpha i}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $z + w \in \mathbb{I}$ β) $zw \in \mathbb{R}$ γ) $z = w \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$

(δ') $z \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ και } \operatorname{Im}(z) = 0$

1.36 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $z^2 \geq 0$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

1.37 Αν z είναι φανταστικός αριθμός, με $z \neq -i$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{z^3 - i}{z + i} < 0$$

1.38 Να βρείτε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

α) $z^2 + z \leq 0$ β) $z^2 - 4z + 3 < 0$ γ) $z + \frac{1}{z} < 0$

(ε') $i^n = i^n$

1.39 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους παρακάτω μιγαδικούς:

α) $\frac{1+i}{i^5} + \frac{i^2-i}{i^7} + \frac{i^4-i}{i^9} + \frac{i-1}{i^3}$

β) $\left(\frac{1}{i^3} + i\right)\left(\frac{1}{i^7} - 1\right) + \left(\frac{1}{i^5} - i\right)\left(\frac{1}{i^9} - 1\right)$

1.40 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $i^{31} + i^{46} + i^{265}$ β) $i^{2012} + i^{2013} + i^{2014} + i^{2015}$

γ) $5i^2 + 7i^{78} - 4i^{31} + 7i - 3i^{44} + 15$

δ) $\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} + \frac{5}{i^5} + \frac{6}{i^6} + \frac{7}{i^7}$

ε) $\frac{1}{4i^3} - \frac{1}{5i^{13}} + \frac{1}{2i^{23}} + \frac{1}{3i^{37}} + \frac{1}{6i^{49}}$

ζ) $i^{10} + \frac{1}{i^{15}} + i^{20} + \frac{1}{i^{25}} + i^{30} + \frac{1}{i^{35}}$

1.41 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους παρακάτω μιγαδικούς:

α) $(1+i)^{20}$ β) $(1+i)^{21}$ γ) $(2+2i)^{20} + (2-2i)^{20}$

1.42 Αν οι φυσικοί αριθμοί k, λ, μ, ν διαιρούνται με το 4 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο, να αποδείξετε ότι $i^{k+\lambda+\mu+\nu} = 1$

1.43 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $i^{57} + i^{58} + i^{59} + \dots + i^{213}$ β) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{2015}$

γ) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4k}$, με $k \in \mathbb{N}$

1.44 Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τον μιγαδικό:

$$z = \left(\frac{1-9i}{5-4i}\right)^{28} + \left(\frac{-2+3i}{3+2i}\right)^{17}$$

1.45 Θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$z = \left(\frac{13+7i}{7-13i}\right)^{36} + \left(\frac{21-4i}{4+21i}\right)^{53}$$

Να αποδείξετε ότι $[z - \operatorname{Re}(z)]^{2015} = i$

1.46 Αν $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$, να υπολογίσετε τον z^{127}

1.47 Αν $n \in \mathbb{Z}$, να αποδείξετε ότι $(\sqrt{3}+i)^{6n} = (\sqrt{3}-i)^{6n}$

1.48 Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{Z}$, για τις οποίες είναι:

α) $i^{3n+31} = i^{n-5}$ β) $i^{3n-13} = i^{3-n}$ γ) $i^{3n-2} = i^{3-2n}$

1.49 Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες είναι:

α) $2i^n + (-1)^n = n - 1$ β) $2i^n - 3(-1)^n = -n - 3$

γ) $8i^n + 5(-1)^n = n + 5$ δ) $2i^{2n+4} + 5(-1)^n = 4n - 1$

1.50 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β . Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta i)^{2014} + (\beta - \alpha i)^{2014} = 0$

1.51 Έστω η συνάρτηση $f(n) = i^n z$, με $z \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $f(7) + f(12) + f(17) + f(22) = 0$

1.52 Αν ισχύει η σχέση $2i^n = 3n - 20$, με $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι:

α) $n = 6$ β) $(3+5i)^n + (5-3i)^n = 0$

1.53 Αν ισχύει η σχέση $i^{n+2} - i = 0$, με $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(1+i)^{n+1}$ είναι πραγματικός

1.54 Έστω ο μιγαδικός $f(n) = i^n(1-i)$, με $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $f(4n) + f(4n+1) + f(4n+2) + f(4n+3) = 0$
 β) $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(101) = 1+i$

1.55 Έστω η συνάρτηση $f(z) = i(z^2 + 1) + z$, με $z \in \mathbb{C}$. Να υπολογίσετε:

- α) τις τιμές $f(i)$ και $f(-i)$
 β) την παράσταση $(f(i))^n + (f(-i))^n$, με $n \in \mathbb{N}$

1.56 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \sqrt{3} + i$ και $w = 1 - \sqrt{3}i$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\frac{z}{w} = i$ υ) $\frac{\alpha z - w}{z + \alpha w} = \frac{z}{w}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

ιι) $z^{22} + w^{22} = 0$

β) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, για τις οποίες είναι $z^n + w^n = 0$

1.57 Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι:

α) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = \frac{1}{i^n} + \frac{1}{i^{n+1}} + \frac{1}{i^{n+2}} + \frac{1}{i^{n+3}}$

β) $i^{2n} + i^{2n+1} + i^{2n+2} + i^{2n+3} = \frac{1}{i^{2n}} - \frac{1}{i^{2n+1}} + \frac{1}{i^{2n+2}} - \frac{1}{i^{2n+3}}$

1.58 Αν $n \in \mathbb{N}$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) i^{5n+7} β) $i^{3n+1} + i^{2n} + i^{5n+3}$ γ) $(1+i^n)(1+i^{2n})$

δ) $i^n + i^{3n+2} + i^{2n+1} + i^{n+3}$ ε) $i^{n+1} + i^{2n+3} + i^{3n} + i^{n+2}$

1.59 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z^8 = 1$ β) $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{79} = 0$

1.60 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^2 - iz - 1 = 0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = z^{63} - z^{42} + z^{33} + z^{120}$$

1.61 Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^{72} = 1$

1.62 Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n} = 2(-1)^n$

β) $\left(\frac{4-2i}{1+2i}\right)^n + \left(\frac{6+2i}{1-3i}\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 2^{n+1}i^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$

γ) $\left(\frac{x+i}{1-xi}\right)^{2n} + \left(\frac{i-x}{1+xi}\right)^{2n} = 2(-1)^n$, με $x, y \in \mathbb{R}$

δ) $\left(\frac{xi-y}{x+yi}\right)^{4n} - \left(\frac{x+yi}{xi-y}\right)^{4n+1} = 1+i$, με $x, y \in \mathbb{R}$

1.63 Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, ώστε να είναι:

α) $(2-3i)^n + (3+2i)^n = 0$ β) $\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^{3n+1} = -1$

γ) $\left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)^{2n} + \left(\frac{4+5i}{5-4i}\right)^{2n} = 2^{n^2-7n+13}$

1.64 Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^{3n}$, με $n \in \mathbb{N}^*$

α) Αν $n = 10$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $f(1+i\sqrt{3}) - f(\sqrt{3}-i)$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του n για την οποία είναι $f(3+4i) + f(4-3i) = 0$

1.65 Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{\kappa=0}^{99} (-1)^\kappa (100-\kappa)i^{\kappa+1}$

(ς) αν $z = w$, τότε $z^n = w^n$

1.66 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $z^2 + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $z^{2014} + w^{2014} = 0$

1.67 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $\sqrt{2}z = (1+i)w$. Να αποδείξετε ότι $z^4 + w^4 = 0$.

1.68 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $z^2 + z + 10 = 0$. Να αποδείξετε ότι $(2z+1)^{10} < 0$

(ζ) ταυτότητες

1.69 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $a, b \neq 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{b+c}{a} \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{c+a}{b} \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $a + b + c = 0$

1.70 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w = 1$ και $z^3 + w^3 = -2$. Να αποδείξετε ότι $z^{100} + w^{100} = -1$

1.71 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^4 + z^2 + 1 = 0$ και $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $z^{6\kappa} + z^{6\lambda+2} + z^{6\mu+4} = 0$

1.72 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c ώστε να είναι:

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $ab + bc + ca = 0$ β) $a^4 + b^4 + c^4 = 0$

γ) $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 0$

1.73 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^2 + z + 1 = 0$. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha + \beta)(\alpha z + \beta z^2)(\alpha z^2 + \beta z) = \alpha^3 + \beta^3$

β) $(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)^3 = (\beta z^2 + \gamma z + \alpha)^3$

(ν) εύρεση τύπου συνάρτησης

- 1.74 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $2f(z) + f(iz) = z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- 1.75 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $f(z) + f(iz) + f(-iz) = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- 1.76 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $f(z) + f(\epsilon z) = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, με $\epsilon^3 = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = \frac{z}{\epsilon + 1}$

2 Συζυγείς μιγαδικοί

(α) ιδιότητες συζυγών μιγαδικών

- 2.77 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2 - i$ και $z_2 = 3 + 2i$. Να βρείτε τους συζυγείς των μιγαδικών $w = z_1 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ και $u = \frac{z_1}{\bar{z}_2}$
- 2.78 Να γράψετε στη μορφή $x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ τους συζυγείς των μιγαδικών:
 α) $w = (1 + i)^3 - (1 - i)^3$ β) $z = \frac{(2 + i)^2 + (2 - i)^2}{1 + i}$
- 2.79 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} - \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = 1 - \bar{z}$$

- 2.80 Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί z, w να είναι συζυγείς, όταν:
 α) $z = x^2 + (y + 3)i$ και $w = xy - 2(x + i)$
 β) $z = 3 + (3x + y)i$ και $z = 2y - x - 5i$
 γ) $z = (x^2 + i)i$ και $w = x(5i - x) + 4i$
 δ) $z = (4x - 9) + (1 + i)(y - 2x)$ και $w = 2y + (1 - 2i)^2 - 10$
- 2.81 Να γράψετε τον συζυγή του μιγαδικού z , στη μορφή $x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, όταν:
 α) $z = \frac{(1 + 2i)^2(3 - i)}{i(1 + i)^5}$ β) $z = \frac{1 - i}{1 + i} - \frac{(1 + i)^{20}}{(1 - i)^{10}}$
- 2.82 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{(3 + i)^2}{-1 + i}$. Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού $w = \frac{1 + \bar{z}}{z}$
- 2.83 Αν $z \in \mathbb{C} - \mathbb{I}$, να αποδείξετε ότι $Re\left(\frac{z}{z + \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}$
- 2.84 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $(z\bar{w} - \bar{z}w)^2 \leq 0$

- 2.85 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{2z + i}{\bar{z} - 2i}$, με $z \neq -2i$. Αν $f(9 - 5i) = w$, τότε:
 α) να αποδείξετε ότι $w = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$
 β) να υπολογίσετε τον αριθμό $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot w\right)^{2014}$
- 2.86 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $Re(z) \cdot Im(w) \neq 0$. Αν είναι $(z + w) \in \mathbb{I}$ και $(z^2 + w^2) \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\bar{z} + w = 0$
- 2.87 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w \in \mathbb{R}$ και $zw \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $z = \bar{w}$
- 2.88 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 0$ και $w = \frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}}$. Να αποδείξετε ότι: α) $w \in \mathbb{I}$ β) $-2 \leq Im(w) \leq 2$

- 2.89 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:
 α) $a \cdot Im(b\bar{c}) + b \cdot Im(c\bar{a}) + c \cdot Im(a\bar{b}) = 0$
 β) αν $Im(\bar{a}b) = Im(\bar{b}c) = Im(\bar{c}a) \neq 0$, τότε είναι $a + b + c = 0$
- 2.90 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:
 • $f(z + w) = f(z) + f(w)$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$
 • $f(zw) = f(z)f(w)$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$
 • $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι $f(z) = z$ ή $f(z) = \bar{z}$

(β) η εξίσωση $f(z, \bar{z}) = 0$

- 2.91 Να βρείτε τον μιγαδικό z που ικανοποιεί κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:
 α) $Im(\bar{z} + 1) + iRe(2 - z) = -2 - i$
 β) $Re(2\bar{z} + 1) + iIm(3 - z) = 5 - 2i$
 γ) $[Re(z) + 3i][Im(z) - i] = 3 - 4i - \bar{z}$
 δ) $3(1 + i) - z - 2\bar{z} = [Re(z) + 5i]i + [Im(\bar{z}) + 2i](1 - i)$
- 2.92 Να βρείτε τον μιγαδικό z που ικανοποιεί κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:
 α) $z(1 + i) = 1 + i \cdot \bar{z}$ β) $z + \bar{z} + i(z + i) + 2 = 0$
 γ) $2z + \bar{z} = 3 + i$ δ) $(3 + 2i)z - (1 - 2i)\bar{z} = 4 - 4i$
 ε) $\bar{z} + i(z - \bar{z}) + 3 = 0$ ζ) $z\bar{z} + 2i(z + \bar{z}) = 4(5 + 2i)$
 η) $z - i(z + \bar{z}) - 1 = 0$ θ) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 6i - 4$
 ι) $(i - 1)(2\bar{z} - i) = z - 1$ κ) $z\bar{z} + 5(z - \bar{z}) = 61 + 50i$
 λ) $(1 + i)^2 z + 5 = \bar{z} + 4i$
- 2.93 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
 α) $z^2 + \bar{z} = 0$ β) $z^2 + 4\bar{z} + 4 = 0$
 γ) $z^2 + 2\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 9 = 0$ δ) $z\bar{z} + z - \bar{z} - z^2 = 18$
 ε) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$ ζ) $z^2 - 2\bar{z} + 1 - 2i = 0$
 η) $iz^2 - 2\bar{z} - i = 0$
- 2.94 Να λύσετε την εξίσωση $1 + z + \bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + \bar{z}^3 = 0$

$$(\gamma) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \text{ και } z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

2.95 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z^2 = \bar{z}$ β) $(xz^2 + yz)(yz^2 + xz) \in \mathbb{R}$

2.96 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι πραγματικοί:

α) $z = a\bar{b} + \bar{a}b$ β) $z = \frac{\bar{a} + b}{a} + \frac{a + \bar{b}}{\bar{a}}$

γ) $z = (a\bar{b} + c)(\bar{a}b + \bar{c})$ δ) $z = i \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{ab - b\bar{a}}$

ε) $z = (a - \bar{b})^{15} + (\bar{a} - b)^{15}$

2.97 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι πραγματικοί:

α) $w = \frac{z - i}{\bar{z} + i} + \frac{\bar{z} + i}{z - i}$ β) $w = \frac{\bar{z}^2 + z^2 - z - \bar{z}}{z\bar{z} + 1}$

γ) $w = \bar{z}^2 - z\bar{z} + z^2$ δ) $w = (z - i)^2 + (\bar{z} + i)^2$

ε) $w = \frac{z + 1}{\bar{z}} + \frac{\bar{z} + 1}{z}$ ζ) $w = \frac{z}{\bar{z}} - \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{2z\bar{z}}$

η) $w = \frac{z - i \cdot \bar{z}}{\bar{z} - i \cdot z}$

2.98 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι φανταστικοί:

α) $(3i - 1)^9 + (3i + 1)^9$ β) $(2 - i\sqrt{3})^5 - (2 + i\sqrt{3})^5$

2.99 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω μιγαδικοί είναι φανταστικοί:

α) $u = z\bar{w} - \bar{z}w$ β) $u = (z - \bar{w})^5 - (\bar{z} - w)^5$

γ) $u = \frac{\bar{z} + w}{1 - z\bar{w}} - \frac{z + \bar{w}}{1 - \bar{z}w}$ δ) $u = \frac{(z + i)^2 - (\bar{z} - i)^2}{(z + i)^3 + (\bar{z} - i)^3}$

ε) $u = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{1 + z\bar{z}}$

2.100 Θεωρούμε τον μιγαδικό z και τη συνάρτηση:

$$f(z) = (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} + 1$$

Να αποδείξετε ότι $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2.101 Αν α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = (\alpha - \beta)(\beta - \bar{\gamma}) - (\beta - \gamma)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$ είναι φανταστικός

2.102 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq -1$ και $w = \frac{z}{z + 1}$. Να αποδείξετε ότι: $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2.103 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq i$ και $w = \frac{z + i}{z - i}$. Να αποδείξετε ότι: $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$

2.104 Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι πραγματικοί:

α) $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ β) $(3 + 4i)^{4n} + (4 + 3i)^{4n}$

γ) $\frac{(\alpha + \beta i)^n}{\alpha - \beta i} + \frac{(\alpha - \beta i)^n}{\alpha + \beta i}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

δ) $\frac{(1 - i)^n}{(2 + i)(3 - i)} + \frac{(1 + i)^n}{(2 - i)(3 + i)} + (5 - 2i)^n(5 + 2i)^n$

ε) $\left(\frac{19 + 7i}{9 - i}\right)^n + \left(\frac{20 + 5i}{7 + 6i}\right)^n$

2.105 Δίνονται οι συζυγείς μιγαδικοί z και w με $z + w \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = i \cdot \frac{1 - zw}{z + w}$ είναι φανταστικός

2.106 Αν $n \in \mathbb{N}$ και ο αριθμός $z = (1 + i)^n + (1 - i)^n + i^n$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι ο n είναι άρτιος

2.107 Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^7 - 2z^8 + 1$, με $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι $f(z) + f(\bar{z}) \in \mathbb{R}$

2.108 Αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $Im\left(\frac{\lambda + 2z}{\lambda - 2z}\right) = 0$, με $z \neq \frac{\lambda}{2}$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

2.109 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ ή } z \in \mathbb{R}^*$$

2.110 Έστω ο μιγαδικός $z \neq \alpha i$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$$

2.111 Έστω ο μιγαδικός z , με $z \neq 0$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \frac{1 - z}{z^2}$. Να αποδείξετε ότι:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ή } z \cdot \bar{z} = 2Re(z)$$

2.112 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w ώστε να είναι:

$$z^7 = 4 + 3i \text{ και } w^7 = 3 + 4i$$

Αν $u = \frac{z}{w}$, να αποδείξετε ότι: α) $u \notin \mathbb{R}$ β) $u \notin \mathbb{I}$

2.113 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ και $w = y + xi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $z^5 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $w^5 \in \mathbb{I}$

2.114 Δίνεται ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C}^*$ και θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό:

$$w = \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $w \in \mathbb{R}$ και $-2 \leq w \leq 2$ β) αν $w = 2$, τότε $z \in \mathbb{R}$
γ) αν $w = -2$, τότε $z \in \mathbb{I}$

2.115 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b και c . Να αποδείξετε ότι:

- α) ο αριθμός $z = \bar{a}(b+c) + \bar{b}(c+a) + \bar{c}(a+b)$ είναι πραγματικός
β) ο αριθμός $w = \bar{a}(b-c) + \bar{b}(c-a) + \bar{c}(a-b)$ είναι φανταστικός

2.116 Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x , ώστε να είναι $(1+xi)^7 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $(x+i)^7 \in \mathbb{I}$

2.117 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $(z+w) \in \mathbb{R}$ και $(z-w) \in \mathbb{I}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $zw \geq 0$
β) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε: ι) $z^n + w^n \in \mathbb{R}$ υ) $z^n - w^n \in \mathbb{I}$

2.118 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $(z-i)(\bar{z}+i) = 1$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{(z-2i)^3}{(z-i)^3 - i^3}$ είναι πραγματικός

2.119 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ και $u = (z-w)(z-\bar{w})$. Να αποδείξετε ότι: $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $(z-w) \in \mathbb{I}$

2.120 Έστω n συνάρτηση $f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}$, με $z \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$

- α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$, με $z \neq 0$
β) Αν $z\bar{z} = 1$, να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R}$
γ) Να βρείτε τις τιμές του n , για τις οποίες ορίζεται η τιμή $f(i)$ και να αποδείξετε ότι $f(i) \in \mathbb{R}$

2.121 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$a+b = \bar{c}, b+c = \bar{a} \text{ και } c+a = \bar{b}$$

Να αποδείξετε ότι: α) $a+b+c = 0$ β) $a, b, c \in \mathbb{I}$

2.122 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$a = b + \bar{c}, b = c + \bar{a} \text{ και } c = a + \bar{b}$$

Να αποδείξετε ότι: α) $a+b+c = 0$ β) $a, b, c \in \mathbb{R}$
γ) $a = b = c = 0$

2.123 Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ και $w \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύει $\alpha w + \beta \bar{w} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$

2.124 Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β και ο θετικός ακέραιος n ώστε να είναι $(\alpha + \beta i)^n + (\beta + \alpha i)^n \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι $n = 4\kappa$, με $\kappa \in \mathbb{N}^*$

2.125 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{2+2\sqrt{3}i}{1+i}$. Αν $z^n \in \mathbb{R}$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι το n είναι πολλαπλάσιο του 12.

2.126 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq w$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$a = \frac{1-zw}{z-w}, b = \frac{1+zw}{z-w}i \text{ και } c = \frac{z+w}{z-w}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
β) αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, τότε οι μιγαδικοί z και $-\frac{1}{w}$ είναι συζυγείς

3 Εξισώσεις

(α') πρωτοβάθμιες

3.127 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $(1+i)z = 2$ β) $z - (1-i)(1+i) = i(z-2)$
γ) $2iz - (1+i)z = 2$ δ) $(3+i)z + (2+i)^2 = 7+2i$
ε) $(2+3i)z - 2 = (1+2i) + 2z+i$ ζ) $(1-i)^2 z = 4i-2$
η) $(i-z)(1+2i) + (1-iz)(3+4i) = 14+6i$
θ) $(1-i)z + z = 2(1+i)^2 + 7$ ι) $iz + z = i^2 + i^3$
κ) $3iz - (1-i)(z+1) = (5+i)^2 + 23i^2$

3.128 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $\frac{z+3}{1-i} - \frac{z-1}{1+i} = 2i$ β) $2zi - \frac{z+3i}{1-2i} = 9+2i$
γ) $z + \frac{iz}{1-i} = (1+i)^3$ δ) $\frac{z-1}{i+1} = \frac{z+1}{i-1} - i$

3.129 Αν $z_1 = 3-i$ και $z_2 = 2+i$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{z}{z_1} + z_2 = (z_1 - z_2)^2$$

3.130 Έστω n συνάρτηση $f(z) = (1+i)z + 3-i$, με $z \in \mathbb{C}$.

- α) Να λύσετε τις εξισώσεις:
ι) $f(z) = 0$ υ) $f(z) = z$ υι) $f(z) = f(1-i)$
β) Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $f(x-2yi) = f(2-4i)$

3.131 Να λύσετε την εξίσωση $(1-i)^{30}z = (1+i)^{33} - 2^{16}i$

(β') συστήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων

3.132 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- α) $z+w = 4+i$ και $2z-w = -1+5i$
β) $z+iw = i$ και $3z+2w = 3+5i$

- γ) $(1+2i)z - iw = 7$ και $(3-i)z - w = 2 - 10i$
 δ) $w - iz = 3(1+i)$ και $z - 2iw = 3(1-i)$
 ε) $(1+i)z + (1-i)w = 2+i$ και $3z - 2iw = 4-i$
 ζ) $(1-i)z + iw = i(-4+3i)$ και $iz - (2+i)w = -2-3i$
 η) $3z + (1+i)\bar{w} = 2+3i$ και $(2+i)\bar{z} + (1+i)w = 1$

3.133 Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν: $z_1 = z_2 + iz_3, z_2 = z_3 + iz_1$ και $z_3 = z_1 + iz_2$

(γ) δευτεροβάθμιες

3.134 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $z^2 + 1 = 0$ β) $z^2 - 2z + 4 = 0$ γ) $z^2 - 6z + 25 = 0$
 δ) $z^2 + 4z + 8 = 0$ ε) $z^2 = 4z - 13$

3.135 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $\left(\frac{z+7i}{z-3i}\right)^2 + 9 = 0$ β) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - 3\left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 2 = 0$

3.136 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $z^2 = 2i$ β) $z^2 = 5 - 12i$ γ) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
 δ) $z^2 - (5+i)z + 12 + 5i = 0$ ε) $z^2 - iz + 6 = 0$
 ζ) $z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$ η) $z(z-i) = 2(iz+1)$
 θ) $(z^2 - 4z + 5) + i(z+1) = 0$ ι) $z^2 - 5z + 7 - i = 0$
 κ) $(1+i)z^2 - 2\sqrt{2}iz - (1-i) = 0$

3.137 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό $z_1 = 2 - i$.

3.138 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z-1+i}{z^2-2z+2}$, με $z \in \mathbb{C}$

- α) Να βρείτε για ποιές τιμές του z ορίζεται η συνάρτηση
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = \frac{z-1+i}{2}$

3.139 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 2z + 10 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5}$ β) $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = 20$ γ) $z_1^2 + z_2^2 = -16$

3.140 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = 4 + 7i$ και $w_2 = 2i^{2020} + 3i^{2019}$. Αν η εξίσωση

$$x^2 - (4\alpha + \beta)x + 2\beta - \alpha = 0, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{w_1}{w_2}$, τότε:

- α) να βρείτε τις τιμές των α, β
 β) να λύσετε την εξίσωση $\frac{z+\alpha}{\beta\bar{z}-i} = i(1+i)$

3.141 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z + \frac{3}{z} = 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{z_1 - z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2016} + \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{2017} + \left(\frac{z_1 z_2}{3}\right)^{2018} = 3$$

3.142 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \left(\frac{z-1}{z-i}\right)^2 + 4 = 0 \quad \beta) \left(\frac{z-3i}{2+i}\right)^2 + \left(\frac{z+3i}{2-i}\right)^2 = 0$$

3.143 Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 4z + 8 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z_1 + z_2 + 4i}{z_1 z_2 + 8i} \in \mathbb{I}$$

3.144 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$. Να γράψετε τον αριθμό

$$w = \frac{(z_1 + z_2)^4 + 2i}{(z_1 z_2)^2 - 2i}$$

στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.145 Δίνεται η εξίσωση $z - \frac{1}{z} = i\sqrt{3}$

- α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση
 β) Αν z_1 είναι η λύση με $Re(z_1) < 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^3 = 1$ και να υπολογίσετε την τιμή της παραστάσης $z_1^{2015} + z_1^{-2015}$

3.146 Αν A, B είναι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^2 + 5z + 13 = 0$ και $M(0, 1)$, να αποδείξετε ότι είναι $(MA) \cdot (MB) = 13$

3.147 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$. Αν είναι $\beta^2 = \alpha^2 + \beta\gamma + 2\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $z_1^2(1+z_2) + z_2^2(1+z_1) = 1$

3.148 Έστω η εξίσωση $z^2 + 2z + 2 = 0$

- α) Να βρείτε τις ρίζες της z_1, z_2
 β) Να αποδείξετε ότι $z_1^4 = z_2^4 = -4$
 γ) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z_1^n + z_2^n = 0$

3.149 Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς z_1, z_2 , να αποδείξετε ότι:

- α) $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$
 β) η εξίσωση $z^2 - \beta z - \gamma = 0$ έχει πραγματικές ρίζες

3.150 Έστω η εξίσωση $z^2 - 4\eta\mu\alpha \cdot z + 4 = 0$, με $0 \leq \alpha \leq \pi$
 α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
 β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$S_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \text{ και } S_2 = z_1^4 + z_2^4$$

γ) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε να είναι $S_2 = 0$

3.151 Δίνεται ο αριθμός $S = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε την τιμή του n για την οποία η εξίσωση

$$S z^2 + S z + \frac{2}{n} = 0$$

έχει δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές.

(δ') πολυωνυμικές

3.152 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z^{2016} + \kappa z + \lambda i = 0$, με $\kappa, \lambda > 0$, δεν έχει πραγματική ρίζα

3.153 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $z^3 + \alpha z + \beta = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $1 + i$. Ποιές είναι οι άλλες ρίζες της εξίσωσης αυτής;

3.154 Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 + 7iz^2 - z - 7i$, με $z \in \mathbb{C}$

α) Να αποδείξετε ότι $P(1) = 0$

β) Να βρείτε πολυώνυμο $Q(z)$ ώστε να είναι $P(z) = (z-1)Q(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$

3.155 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $z^3 - 1 = 0$ β) $z^3 + z^2 - 2 = 0$ γ) $z^3 - 3z^2 + 2 = 0$

δ) $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$ ε) $z^3 - 3z^2 + z + 2 = 0$

ζ) $z^4 = 1$ η) $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$

θ) $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$

ι) $z^4 - 2z^3 + z - 6 = 0$

3.156 Αν $\theta \in \mathbb{R}$, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $z^3 - 2(1 + \sigma\eta\nu\theta)z^2 + (1 + 4\sigma\eta\nu\theta)z - 2 = 0$

β) $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2\sigma\eta\nu\theta$

3.157 Αν z_1, z_2, z_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$$

να αποδείξετε ότι $z_1^{2016} + z_2^{2016} + z_3^{2016} = 3$

3.158 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

β) $\left(\frac{z+1}{i}\right)^3 - 7\left(\frac{z+1}{i}\right)^2 + 16\frac{z+1}{i} - 10 = 0$

3.159 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(z^2 + 1)^2 + (z^2 - z - 1)^2 = 0$

β) $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$

γ) $(3z - 1)^4 + (z - 2)^4 = 0$

3.160 Αν z_1, z_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $z^3 = 1 + \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$

3.161 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(z) = z^3 - (5 + 2i)z^2 + (11 + 5i)z - 12i$$

α) Να αποδείξετε ότι έχει φανταστική ρίζα

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(z)$

3.162 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^4 + z^2(z-1)^2 + (z-1)^4 = 0$ είναι συνευθειακά σημεία

3.163 Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και n άρτιος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα

3.164 Έστω ο μιγαδικός z ώστε $z^4 + z^2 + 1 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι: ι) $z^6 = 1$ ιι) $z^{2018} = z^2$

β) Να λύσετε την εξίσωση (1)

3.165 Αν ο αριθμός z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και $\alpha_n \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός \bar{z}_0 είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης αυτής

3.166 Αν η εξίσωση $z^n = \alpha$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$, έχει δύο συζυγείς ρίζες, να αποδείξετε ότι $\alpha \in \mathbb{R}$

3.167 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^5 = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z} + \frac{z^4}{1+z^3} = 2$

β) $\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^4}{1-z^3} = 0$, με $z \neq 1$

γ) $\frac{z^4}{z-1} + \frac{z^3}{z^2-1} + \frac{z^2}{z^3-1} + \frac{z^4}{z-1} = -1$, με $z \neq 1$

3.168 Δίνεται η εξίσωση $z^5 + z^3 + z + 3 = 0$. Αν z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να αποδείξετε ότι:

$$(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)(1 + z_3^2)(1 + z_4^2)(1 + z_5^2) = 10$$

(ε') συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων

3.169 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $z^2 = w$ και $w^2 = z$ β) $z^3 + w^5 = 0$ και $z^2 \cdot \bar{w}^4 = 1$

3.170 Έστω οι μη μηδενικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z^2 = \bar{w}$ και $w^2 = -\bar{z}$.

α) Να αποδείξετε ότι: ι) $z^3 = -1$ ιι) $w = -\frac{1}{z}$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w

3.171 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

α) $z^{16} + 2z^{15} + 1 = 0$ και $(z+1)^2 + z^2 + z = 0$

β) $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$ και $(z^2+1)^2 + z^3 + z = 0$

γ) $z^3 + 4z = 3z^2 + 2$ και $z^{10} - 32z + 32 = 0$

4 Γεωμετρικοί τόποι

(α') ευθεία

4.172 Να περιγράψετε γεωμετρικά τους μιγαδικούς z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $Re(z) = 2$ β) $Im(z) = 3$ γ) $Im(z) = -3$ και $Re(z) > 3$ δ) $Im(z) = 1$ και $-2 \leq Re(z) \leq 2$

4.173 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , όταν:

α) $z + \bar{z} = 2$ β) $z - \bar{z} = 2i$ γ) $1 + Im(z) = 2Re(z)$
 δ) $Im(z^2) = 0$ ε) $z^2 = \bar{z}^2$ ζ) $z^2 + 4z = \bar{z}^2 + 4\bar{z}$
 η) $(2 + 5i)\bar{z} + (2 - 5i)z = 2$ θ) $Re[(2 - i)z] = 4$
 ι) $Re(\bar{z} + 2) = Im(z)$ κ) $Re(2 + iz) = Im(\bar{z}i) + 2Re(z)$
 λ) $Re(z + 5 + 7i) = Im(z - 2 + 6i)$ μ) $z^3 = -\bar{z}^3$
 ν) $(1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 2z$

4.174 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $z = 5 + \lambda + (12 + 3\lambda)i$ β) $z = 4 - (1 - \lambda)i$
 γ) $z = 2 + (1 - \lambda^2)i$ δ) $z = \lambda^2 + 1 - (2 - \lambda^2)i$
 ε) $z = (4 + 3i) + \lambda\left(\frac{1}{3}i - \frac{1}{4}\right)$ ζ) $z = \frac{2 - \lambda i}{1 + 2i}$

4.175 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 + \eta\mu\theta + i\sigma\nu\theta$ και $w = 1 - \eta\mu\theta + i\sigma\nu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Αν A, B είναι οι εικόνες των z και w , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB .

4.176 Δίνεται ο μιγαδικός $z = (1 + t) - 2ti$, με $t \in \mathbb{R}$ και έστω $w = iz + 2$. Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z και w

4.177 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \lambda(1 + i) + 1 - i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο του z
 β) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $z = \frac{\alpha + \beta i}{1 + i}$

4.178 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z για τους οποίους ο μιγαδικός w είναι φανταστικός, όταν:

α) $w = z(1 - 2i)$ β) $w = \frac{i}{z + 1}$ γ) $w = \frac{2}{z + 1 + i}$

4.179 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z για τους οποίους ο μιγαδικός w είναι πραγματικός, όταν:

α) $w = i\bar{z} + 2z$ β) $w = (z - i)(\bar{z} - 1)$ γ) $w = z^2 + z + 1$
 δ) $w = \frac{z}{z + i}$ ε) $w = \frac{z + 1}{z - 1}$ ζ) $w = \frac{z + i}{z - 1 + 2i}$
 η) $w = \frac{z + 2\bar{z}}{z^2}$ θ) $w = \frac{\bar{z} + 1}{z + 3}$ ι) $w = \frac{2 - 2i}{z + 1}$

4.180 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και $w = (\bar{z} - i)(z + zi)$. Αν η εικόνα του w βρίσκεται στην ευθεία $y = x$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

4.181 Θεωρούμε το μιγαδικό z και έστω $w = z\bar{z} - z^2$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , αν ισχύει $Re(w) + Im(w) = 0$

4.182 Έστω $z \in \mathbb{C}$ και θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $w = (1 - z)(1 - iz)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει $Re(w) + Im(z^2) = 0$

4.183 Δίνεται ο μιγαδικός

$$z = \frac{x + yi}{1 - i} + \frac{2 - 4i}{1 + i}, \text{ με } x, y \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$, ώστε η εικόνα του z να ανήκει στην ευθεία $y = -x$.

4.184 Έστω οι μιγαδικοί $z = 2x - (y + 1)i$ και $w = \frac{z - 2}{z + 2i}$. Αν $w \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4.185 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \alpha + 1 + (2\alpha - 1)i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία $(\epsilon) : y = 2x - 3$
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ)
 γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στο σημείο A

4.186 Αν ο γεωμετρικός της εικόνας του z είναι η ευθεία $2x + 3y + 7 = 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού w , για τον οποίο ισχύει η σχέση $(2 + i)w = z - 1 + 2i$

4.187 Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $(\epsilon) : y = x + 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $w = (2 + i)z + \bar{z} + i$ κινείται επίσης σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4.188 Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w , σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $w = \frac{z - 1}{z + i}$ β) $w = \frac{z + i}{1 + iz}$

4.189 Δίνεται η εξίσωση:

$$z^2 + (2\lambda - 2)z + (5\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Να βρείτε:

α) τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
 β) το γεωμετρικό τόπο των ριζών z_1, z_2

4.190 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha i \left(\alpha - \frac{1}{z} \right) = -i + \frac{\alpha}{z}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

(β') κύκλος

4.191 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , όταν:

$$\begin{aligned} \alpha) z\bar{z} &= z + \bar{z} & \beta) 2z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) + 2i(z - \bar{z}) + 2 &= 0 \\ \gamma) z\bar{z} + i(z - \bar{z}) &= 3(2 - z - \bar{z}) & \delta) z\bar{z} + i(z - \bar{z}) &= 3 \\ \epsilon) z\bar{z} - 3z - 5\bar{z} &= 2i\text{Im}(z) & \zeta) z\bar{z} + z + \bar{z} &= i(z - \bar{z}) \\ \eta) (\bar{z} - \alpha)(z + \alpha) &= (\bar{z} + \alpha)(\alpha - z), \text{ με } \alpha > 0 \\ \theta) (z - (1 + i))(\bar{z} - (1 - i)) &= 9 \end{aligned}$$

4.192 Αν $\phi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z , στις παρακάτω περιπτώσεις, κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα:

$$\begin{aligned} \alpha) z &= (1 - \eta\mu\phi) + (2 + \sigma\upsilon\nu\phi)i \\ \beta) z &= 3 + 2\eta\mu\phi + (4 + 2\sigma\upsilon\nu\phi)i \\ \gamma) z &= 1 + 2i + 5(\sigma\upsilon\nu\phi + i\eta\mu\phi) \end{aligned}$$

4.193 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 1$, ώστε $w = \frac{z+1}{z-1}$. Αν $\text{Re}(w) = \text{Im}(w)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

4.194 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 2$ και $w = \frac{z-i}{z-2}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Αν } w \in \mathbb{R}, \text{ τότε η εικόνα του μιγαδικού } z \text{ κινείται σε ευθεία από την οποία έχει εξαιρεθεί το σημείο } A(2, 0) \\ \beta) \text{ Αν } w \in \mathbb{I}, \text{ τότε η εικόνα του μιγαδικού } z \text{ κινείται σε κύκλο από τον οποίο έχει εξαιρεθεί το σημείο } A(2, 0) \end{aligned}$$

4.195 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , όταν:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{z}{iz-2} \in \mathbb{R} & \quad \beta) \frac{z^2}{z+i} \in \mathbb{I} & \quad \gamma) \frac{z^2}{z-2} \in \mathbb{R} \\ \delta) \left(z - \frac{1}{z} \right) \in \mathbb{I} & \quad \epsilon) \frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{I} & \quad \zeta) \frac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R} \\ \eta) \frac{z}{z+4} \in \mathbb{I} & \quad \theta) \left(z + \frac{4}{z} \right) \in \mathbb{R} & \quad \iota) \frac{z+2i}{z-i} \in \mathbb{I} \\ \kappa) \frac{z+1}{z-2i} \in \mathbb{I} & \quad \lambda) \frac{z^2-z+1}{z^2+1} \in \mathbb{R} & \quad \mu) \frac{z-1-i}{iz+1} \in \mathbb{R} \\ \nu) \frac{i(z^2+1)}{z+1} \in \mathbb{I} & \quad \xi) \frac{z(z-\alpha)}{1-\alpha z} \in \mathbb{R}, \text{ με } \alpha \in (0, 1) \end{aligned}$$

4.196 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , όταν:

$$\alpha) \text{Re}(z^2 - 1) = -2\text{Im}^2(z) \quad \beta) \text{Re}(z) + \text{Im}\left(\frac{1}{iz}\right) = 0$$

$$\gamma) \text{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2 \quad \delta) \text{Re}\left(\frac{z+3}{z-1}\right) = \text{Im}\left(\frac{z+3}{z-1}\right)$$

$$\epsilon) \text{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}+1}\right) = \frac{1}{6} \quad \zeta) \text{Im}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 2\text{Re}(i \cdot \bar{z})$$

$$\eta) \text{Re}\left(z + \frac{\alpha^2}{z}\right) = (\alpha + 1)\text{Re}(z), \text{ με } \alpha > 0$$

$$\theta) \text{Im}\left(\frac{\alpha}{z} - \bar{z}\right) = (1 - \alpha)\text{Im}(z), \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$\iota) \text{Im}\left(\frac{1}{\alpha - z}\right) = \frac{1}{2\alpha}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

4.197 Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = -1 + 3i$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z , σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) \frac{z - z_1}{z - z_2} \in \mathbb{I} \quad \beta) (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = z_2\bar{z}_2$$

4.198 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα:

$$\begin{aligned} \alpha) z = \frac{\lambda+1}{\lambda+i} & \quad \beta) z = \frac{\lambda-2i}{\lambda+2i} & \quad \gamma) z = \frac{\lambda+2i}{1+\lambda i} \\ \delta) z = \frac{1+\lambda}{1+2\lambda+i} & \quad \epsilon) z = \frac{5\lambda+i}{1+\lambda i} \end{aligned}$$

4.199 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x - 2 + yi$ και $w = x + yi$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ο μιγαδικός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

4.200 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{z+1}{z-1}$. Αν η εικόνα του z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x + y = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w .

4.201 Έστω M, N οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει $zw = 2i$. Αν το M κινείται στην ευθεία $(\epsilon) : x + y + 1 = 0$, να αποδείξετε ότι το N κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

4.202 Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w = z + \frac{4i}{z}$ κινείται επίσης σε κύκλο.

4.203 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $w \neq 0$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$2\text{Im}(w) + w\text{Re}(z) + iw[1 + \text{Im}(z)] = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 1.

4.204 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{1}{2 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

4.205 Θεωρούμε τον μιγαδικό z με $Re(z) \neq 0, Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z ώστε να είναι $z + \frac{1}{z} > 0$

(γ) παραβολή

4.206 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z , όταν:

α) $4(z + \bar{z}) = (z - \bar{z})^2$ β) $[Im(z)]^2 = 2(z + \bar{z})$
 γ) $(z - \bar{z})^2 + 4(z + \bar{z}) = 0$ δ) $2z\bar{z} = z^2 + \bar{z}^2 + 8(z + \bar{z})$

4.207 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $z = (\lambda + i)^2 + 1$ β) $z = (\lambda - 1)^2 + 2(1 - \lambda)i$

4.208 Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει την παραβολή $y = ax^2$, με $a > 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w = iz$

4.209 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = \eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu 2\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε μια παραβολή.

(δ) έλλειψη-υπερβολή

4.210 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , όταν:

α) $z^2 + \bar{z}^2 = 14z\bar{z} - 48$ β) $10z\bar{z} - 3(z^2 + \bar{z}^2) = 16$
 γ) $z^2 + \bar{z}^2 = z\bar{z} + 1$ δ) $Re(z^2 + z) = 1 + Re(z)$
 ε) $z^2 - \bar{z}^2 = 8i$ ζ) $2(z + \bar{z})^2 + 3(z - \bar{z})^2 = 24$
 η) $(z^2 - 1) \in \mathbb{I}$ θ) $z^2 = 1 + 2iRe(z) \cdot Im(z)$
 ι) $z^2 + \bar{z}^2 + 2\alpha(1 - i)z\bar{z} = 2i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

4.211 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και $w = 2z - \bar{z}$. Αν $Re(w^2) = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

4.212 Αν $\theta \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $z = 3\eta\mu\theta + 4i\sigma\upsilon\nu\theta$
 β) $z = (3 + 4\sigma\upsilon\nu\theta) + (4 + \eta\mu\theta)i$

4.213 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z = x + yi$ και $w = 2x + 3 + (3y - 5)i$, με $x, y \in \mathbb{R}$

Αν ο γεωμετρικός τόπος του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3, -5)$ και ακτίνα 6, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

4.214 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους είναι:

α) $\frac{1}{z^2 + 9} \in \mathbb{I}$ β) $\frac{i \cdot \bar{z} + 1}{z - i} \in \mathbb{R}$ γ) $\frac{z - 3\bar{z} + 2}{z - 2} \in \mathbb{I}$
 δ) $\frac{i}{z^2 + 1} \in \mathbb{R}$ ε) $-\frac{1}{2}(z + \bar{z})^2 - (z^2 + \bar{z}^2) + (z - \bar{z}) + 16 \in \mathbb{I}$
 ζ) $\frac{\bar{z}^2}{z - 1} \in \mathbb{R}$

4.215 Δίνονται οι σταθεροί αριθμοί $\rho > 0$ και $\lambda \in (0, 1)$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $2w = (1 + \lambda)z + (1 - \lambda)\bar{z}$

4.216 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $z = \epsilon\phi\theta + i\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, με $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 β) $z = \sigma\phi\theta + i\frac{1}{\eta\mu\theta}$, με $\theta \in (0, \pi)$

4.217 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς

$w = x - 1 - \frac{1}{\lambda}(y + 2)i$ και $u = -x - 1 + \lambda(y - 2)i$

Αν το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R}^* και είναι $w = i \cdot \bar{u}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε υπερβολή.

4.218 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς

$w = (\lambda - i)\bar{z} + 3\lambda Re(z)$ και $u = \frac{2(1 + \lambda^2)}{1 - \lambda i}$

Αν το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R}^* και είναι $w = \bar{u}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε έλλειψη.

4.219 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $3w - (Im(w)) \cdot i = z + 2i$. Αν η εικόνα του z κινείται στην έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο.

4.220 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $w = z + \frac{2\rho^2}{z}$, με $\rho > 0$. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει τον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ , να αποδείξετε ότι η εικόνα του w διαγράφει έλλειψη της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα

4.221 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $w = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η εικόνα του οποίου κινείται στην έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, συνδέεται με τον w σύμφωνα με τη σχέση:

$$3z + 2\operatorname{Re}(z) = 5 + 6i + w$$

Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόπων του z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

4.222 Αν $0 < \theta < \pi$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

- α) $z^2 - 10\sigma\eta\nu\theta \cdot z - 9\eta\mu^2\theta + 25 = 0$
 β) $\eta\mu^2\theta \cdot z^2 - 2\eta\mu\theta \cdot z + 5 - 4\eta\mu^2\theta = 0$
 γ) $(\sigma\eta\nu^2\theta)z^2 - (\eta\mu 2\theta)z + 2 - \sigma\eta\nu^2\theta = 0$
 δ) $(\sigma\eta\nu^2\theta)z^2 - 2\sigma\eta\nu\theta \cdot z + 5 - 4\sigma\eta\nu^2\theta = 0$

4.223 Αν η εικόνα του μιγαδικού $z \neq 0$ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w = z + \frac{1}{z}$

5 Μέτρο μιγαδικού

(α') ιδιότητες του μέτρου

(i) ορισμός μέτρου-η ιδιότητα $|zw| = |z||w|$

5.224 Να βρείτε το μέτρο των μιγαδικών:

α) $z = (2 - 3i) + (6 - 3i)$ β) $z = (1 - \sqrt{2}i)(3 + \sqrt{3}i)$

γ) $z = (1 - i)^5(\sqrt{5} + \sqrt{3}i)$ δ) $z = \frac{-3 + 2i}{(1 - i)^2 - 2 - i}$

ε) $z = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{1 + \sqrt{3}i}$ ζ) $z = \frac{(1 - 2i)^2 + 2 + 3i}{(3 - i)^2 - 7 + 5i}$

η) $z = (3 - 4i)\left(\frac{1 - xi}{x - i}\right)^5$, με $x \in \mathbb{R}$

5.225 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = 2 - i$ και $w = \sqrt{3} - i$. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών zw και $\frac{z}{w}$

5.226 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Re}(w)$, να αποδείξετε ότι $|zw| = |\operatorname{Re}(z\bar{w})|$

5.227 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{z - \bar{z}}{2} + i \right| + \left| \frac{z - \bar{z}}{2} - i \right| = 2$$

5.228 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|\operatorname{Im}(z)| = \sqrt{\frac{|z|^2 - \operatorname{Re}(z^2)}{2}}$$

5.229 Έστω ο μιγαδικός $z = (1 + xi)(x + i) + (1 - xi)^2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Αν $z \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = 1$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση $|z| = 8\sqrt{x^2 + 1}$

5.230 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z| = 1$. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = \frac{z^2(z - i)}{1 + zi}$

5.231 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $w = \frac{z}{1 + |z|}$, να αποδείξετε ότι $z = \frac{w}{1 - |w|}$

5.232 Αν $z = 1 - i$ και $w = \frac{z - 2}{z^4}$, να αποδείξετε ότι $4|w| = |z|$

5.233 Να βρείτε μιγαδικό αριθμό z , για τον οποίο ισχύει:

- α) $z = |z| - 1 + (|z| - 2)i$ β) $z = |z| - 1 + |1 - 2i|i$
 γ) $z + |z| = 2 + 8i$

5.234 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z| = |w| = 1, zw \in \mathbb{R}$ και $\frac{z}{w} \in \mathbb{I}$

5.235 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $w = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(\operatorname{Re}(z) + |z|)}}$. Να αποδείξετε ότι $w^2 = z$

5.236 Να βρείτε τον μιγαδικό $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}^*$, ο οποίος έχει μέτρο 2 και είναι $(x + iy^2)^3 \in \mathbb{I}$

5.237 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = (\operatorname{Re}(z\bar{w}))^2 + (\operatorname{Im}(z\bar{w}))^2$$

5.238 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $w = \frac{\alpha z_1 + \beta z_2}{\alpha + \beta}$, με $\alpha, \beta > 0$. Να αποδείξετε ότι $|w - z_1| + |w - z_2| = |z_1 - z_2|$

5.239 Έστω ο μιγαδικός $z_n = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3} - i)^n}$, με $n \in \mathbb{N}$. Να βρείτε τις τιμές του n για τις οποίες είναι:

- α) $|z_n| = 64^{-1}$ β) $z_n \in \mathbb{I}$

5.240 Έστω $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$, με $|z| = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $z = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$

5.241 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι:

$$zw + wu + uz = 1 \text{ και } |(z + w)(w + u)(u + z)| = 10$$

Να υπολογίσετε το μέτρο $|(1 + z^2)(1 + w^2)(1 + u^2)|$

5.242 Αν $n \in \mathbb{N}^*$, θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$z_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{1}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right)$$

Να αποδείξετε ότι $|z_{n+1} - z_n| = 1$

(ii) εξισώσεις και μέτρα ριζών

5.243 Δίνεται η εξίσωση $\alpha z^2 + 2\beta z + \alpha = 0$, με $\alpha > \beta > 0$.

- α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
β) Να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2| = 1$

5.244 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - (2\epsilon\phi\theta)z + 1 = 0$, όπου $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Αν οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης αυτής επαληθεύουν τη σχέση

$$|z_1 + z_2| = \frac{|z_1| + |z_2|}{\sqrt{3}}$$

να βρείτε την τιμή του θ και τις ρίζες z_1, z_2 .

5.245 Έστω $\alpha \in [-2, 2]$ και οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z, w ώστε $z^2 - \alpha zw + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

(iii) εξισώσεις και μέτρο μιγαδικού

5.246 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α) $|z + i - 2| = -2iz$ β) $|z - 2| = z$ γ) $|z - 1| = z - i$
δ) $z + 2\bar{z} = |z + 2|$ ε) $|z|^2 = \bar{z} + 1 - i$ ζ) $|z| + z = 2 + i$
η) $|z|^2 - 2z + 2i = 0$ θ) $|z - i| = 2z$ ι) $|\bar{z} - 2| = -z$
κ) $z + |z + i| = 8 + 3i$ λ) $3z - |z + 1 + 3i| = 1 + 3i$
μ) $z^2 - 2iz + |z| = 6$ ν) $|z|^2 - 2(z - \bar{z}) = 2(5 - 6i)$

5.247 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α) $4z^2 + 8|z|^2 = 8$ β) $z^2 + z + |z + 1| = 0$
γ) $|z| - z = 1 + 2i$ δ) $|z|^2 - 3z + 2\bar{z} = 21 + 15i$
ε) $z + |z - 9 - 6i| = 17 + 2i$ ζ) $2z - |z| = 1 - 8i$
η) $z^2 + 2|z| - 8z + 15 = 0$ θ) $z^2 + z + |z + 1| = 0$
ι) $z^2 + |z| = 0$ κ) $3(z - \bar{z}) + 2|z|^2 = 26 + 12i$

5.248 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - 1 - 2i| + |z - 2i| = |z + 1 - 3i| + 2\sqrt{2}$$

5.249 Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $|z|^2 - \alpha z - 1 + \alpha i = 0$ β) $z^2 - 3|z| + \alpha^2 = 0$
γ) $4|z - 1|^2 - 4\alpha iz + 1 + 4\alpha i = 0$

5.250 Να βρείτε τους μιγαδικούς z με $|z| = 1$ και ο αριθμός $w = (z + \bar{z})(1 - i)^n + i(\bar{z} - z)(1 + i)^n$, με $n \in \mathbb{Z}$ να είναι πραγματικός

5.251 Να βρείτε τον μιγαδικό z , σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $Re(iz) = 0$ και $|z + i| = 2$
β) $z = i \cdot \bar{z}$ και $|z + 1| = |z|$
γ) $|z| + |i \cdot \bar{z}| = 2$ και $Re(z^2) = 1$
δ) $|z + 2\bar{z}| = \sqrt{10}$ και $|z|^2 + Re(z^2) = 2Im(z)$
ε) $|z| = 1$ και $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$

ζ) $|z| = 1$ και $|z^2 + \bar{z}^2 + z^2\bar{z} + z\bar{z}^2 - 4| = 6$

η) $(i|z| - 3i)(z^2 - z) = 3i + z^3 - z^2 + z - i|z|$ και επίσης $z^{2012} + z^{1000} + 1 = 0$

5.252 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $z^2 = 4z + |z|^2 + \frac{16}{|z|^3}$ β) $\frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z}$
γ) $z^2 + 2 + i = (1 + i)|z|$ δ) $|z^2 + 4|^2 + 6|z + 2|^2 = 30$
ε) $8z^3 + 12z|z|^2 + 6\bar{z}|z|^2 + \bar{z}^3 - 8 = 0$
ζ) $2014(z - i)^2(\bar{z} + i) - 2013(\bar{z} + i)^2(z - i) = 1$

5.253 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(|w| + \frac{1}{|w|}\right) = 4 \text{ και } |w| < 1$$

Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

(iv) $|z|^2 = z\bar{z}$

5.254 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

- α) $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R}$ β) $\frac{z}{|z|} - \frac{|z|}{z} \in i\mathbb{I}$

5.255 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$

5.256 Έστω ο μιγαδικός z . Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z - i| = |z + i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ β) $|1 - iz| = |1 + iz| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

5.257 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$|z - \alpha i| = |z - \beta i| \Leftrightarrow Im(z) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

5.258 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 2$, να υπολογίσετε την παράσταση $|iz + 2|^2 + |2i - \bar{z}|^2$

5.259 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$z^2 - 2iz - |z|^2 = 0 \Leftrightarrow Im(z) = 1$$

5.260 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

- α) $|z + i \cdot \bar{z}|^2 = 2|z|^2 + 2Im(z^2)$
β) $|z - 3i|^2 - |z + i|^2 = 8 - Re(8i \cdot \bar{z})$

5.261 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|zw| - Re(zw) = \frac{|z - \bar{w}|^2 - (|z| - |w|)^2}{2}$$

5.262 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2$, τότε $\frac{z}{w} \in \mathbb{I}$
 β) αν $|z + w| = |z - w|$, τότε $\frac{z}{w} \in \mathbb{I}$
 γ) αν $|z + w| = |z| + |w|$, τότε $\frac{z}{w} \geq 0$
 δ) αν $|z + iw| = |z| + |w|$, τότε $\left(\frac{z}{w}\right)^2 \leq 0$

5.263 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = 3, |w| = 4$ και $|z - w| = 5$, να αποδείξετε ότι $16z^2 + 9w^2 = 0$

5.264 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|1 + z^2| = |2 - |1 - z|^2|$$

5.265 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w

α) Να αποδείξετε ότι:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

β) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- ι) αν $|z + w| = \sqrt{3}$ και $|z| = |w| = 1$, τότε $|z - w| = 1$
 ιι) αν $a = |z| + |w| + i(|z| - |w|)$ και $b = |z + w| + i|z - w|$, τότε $|a| = |b|$
 ιιι) αν $|z - 2i| = 1$ και $|z| = 2$, τότε $|z + 2i| = \sqrt{15}$
 ιιiv) αν $|z - w| = |z| = |w|$, τότε $|z + w| = \sqrt{3}|z|$
 ιιv) $|z + w| = \sqrt{2}|z| \Leftrightarrow |z - w| = \sqrt{2}|w|$
 ιιvi) αν $|z - 2| = |w - 2| = 2$ και $|z - w| = 4$, τότε $|z + w| = 4$
 ιιvii) αν $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $w \neq 0$, τότε είναι:

$$\lambda^4 \left| \frac{z}{\lambda^2} + w \right|^2 + |z - \lambda^2 w|^2 = 2|w|^2 \cdot \left(\left| \frac{z}{w} \right|^2 + \lambda^4 \right)$$

- ιιviii) αν είναι $a = \sqrt[3]{|z^3 + 3z^2i - i - 3z|^2}$ και είναι $b = \sqrt[3]{|z^3 - 3z^2i - i^3 - 3z|^2}$, τότε $a + b = 2(|z|^2 + 1)$

5.266 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha z + \beta w|^2 + |\beta z - \alpha w|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(|z|^2 + |w|^2)$$

5.267 Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- α) αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $(1 + z)(1 - \bar{z}) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z| = 1$
 β) αν $z \neq -i$, τότε $\frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z| = 1$
 γ) αν $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε $\frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{z - \bar{z}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$
 δ) αν $z \neq 1$, τότε $\frac{z - i}{z - 1} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |2z - 1 - i| = \sqrt{2}$

5.268 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $z \neq w$, τότε $\frac{i(z + w)}{z - w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = |w|$
 β) αν $z \neq \bar{w}$, τότε $\frac{z + \bar{w}}{z - \bar{w}} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z| = |w|$
 γ) αν $w \neq 1$, τότε $\frac{z - \bar{z}w}{1 - w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $|w| = 1$

5.269 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

- α) $\frac{(z - w)^2}{zw} \leq 0$ β) $\frac{u + zw\bar{u} - (z + w)}{z - w} \in \mathbb{I}$, με $u \in \mathbb{C}$

5.270 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

- α) αν $|z + 8| = 2|z + 2|$, τότε $|z| = 4$
 β) αν $|z - 2| = |2z - 1|$, τότε $|z| = 1$
 γ) αν $|z - 8i| = 2|2z - i|$, τότε $|z| = 2$
 δ) αν $|2z - i| = |iz + 2|$, τότε $|z| = 1$
 ε) αν $|\lambda z - 1| = |z - \lambda|$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, τότε $|z| = 1$
 ζ) αν $|z + 9 + 3i| = |3z + 3 + i|$, τότε $|z| = \sqrt{10}$

5.271 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

- α) αν $|z - 10| = 3|z - 2|$, τότε $|z - 1| = 3$
 β) αν $|z + 3| = 2|z - 3|$, τότε $|z - 5| = 4$
 γ) αν $|z - i| = 2|z + i|$, τότε $|3z + 5i| = 4$
 δ) αν $|z + 1 - 2i| = |2\bar{z} + 2 + i|$, τότε $|z + 1| = 1$

5.272 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $\frac{z|w| - w|z|}{zw + |zw|} \in \mathbb{I}$

5.273 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$
 β) $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\operatorname{Re}(z\bar{w})$
 γ) $|z\bar{w} - 1|^2 - |z - w|^2 = (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)$
 δ) $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2(|zw| - \operatorname{Re}(z\bar{w}))$

5.274 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $z_1 + z_2 + z_3 = \alpha$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |\alpha| > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{1}{\alpha}$$

5.275 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $z \neq w$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z + w}{z - w} = \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z - w|^2} + i \frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{|z - w|^2}$$

5.276 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^2 - 2iz - 1 + |z|^2 + 2iz - 1 = 2|z|^2 + 1$.
 Να αποδείξετε ότι: α) $|z - i| = |z + i|$ β) $z \in \mathbb{R}$

5.277 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|w| \neq 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό

$$u = (\sigma \nu \nu \theta + i \eta \mu \theta) \frac{z - w}{1 - z\bar{w}}, \text{ με } \theta \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $|u| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

5.278 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$z_1 + z_3 \neq 0 \text{ και } |z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$$

Να βρείτε τις τιμές του μιγαδικού $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$

5.279 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = \rho > 0$ να αποδείξετε ότι:

α) $(z + w) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w} \right) \in \mathbb{R}$ β) $\frac{z + w}{\rho^2 + zw} \in \mathbb{R}$

γ) $\left(\frac{z + w}{z - w} \right)^2 \in \mathbb{R}$, με $z \neq w$ δ) $\frac{z^3 + w^3}{(z - w)^3} \in \mathbb{I}$, με $z \neq w$

5.280 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z + w \notin \mathbb{R}, zw \notin \mathbb{R}$ και $|z| = |w| = \rho$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι:

$$\frac{z + w}{\lambda + zw} \in \mathbb{R}$$

5.281 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$|z + u - w|^2 + |z - u + w|^2 = 2|z|^2$$

Να αποδείξετε ότι $u = w$

5.282 Δίνονται οι μιγαδικοί z και w , με $w \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Re\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{Re(z\bar{w})}{|w|^2}$ β) $Im\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{Im(z\bar{w})}{|w|^2}$

5.283 Να βρείτε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

α) $|z - 1| = |z - i| = |z - 2|$ β) $|z| = |z|^2 = |1 - z|$

γ) $|z - 1| = |z + i|$ και $|z - 2| = 2|z + 3|$

δ) $|z + i| = |z + 5 - 4i|$ και $|z - 6i| = |z|$

ε) $|z| = \frac{2}{|z|} = |z - 2|$ ζ) $|z| = 1$ και $\left| z - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| = 2$

η) $|z| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{iz} \right| = |2 - z|$

5.284 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) $|z + \bar{w}| = |z - \bar{w}| \Leftrightarrow zw \in \mathbb{I}$

β) $|1 - z\bar{w}| = |z - w| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ ή } |w| = 1$

γ) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 10 \Leftrightarrow |z| = 1$

δ) $|z + w|^2 = 2z\bar{w} \Leftrightarrow |z - w|^2 = -2z\bar{w}$

ε) $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow |z + w| = |z - w|$

ζ) $|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow |z - w| = ||z| - |w||$

η) $\frac{z}{w} + \frac{w}{z} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z + \alpha w| = |z - \alpha w|$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$

5.285 Αν $z, w, u \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z - w|^2 + |z - u|^2 = 2 \left| z - \frac{u + w}{2} \right|^2 + \frac{|u - w|^2}{2}$$

5.286 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z| = |w| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left| z + \frac{z}{w} \right|^2 + \left| z - \frac{z}{w} \right|^2 = 4$$

5.287 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{|w|}{|z|} z + \frac{|z|}{|w|} w \right| = |z + w|$$

5.288 Έστω οι μιγαδικοί z, w . Να αποδείξετε ότι:

α) $|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$

β) αν $|z - w| = \sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}$, τότε $z\bar{w} = -1$

5.289 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z \neq w$ και ο μιγαδικός $u = \frac{z + w}{z - w}$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $z\bar{w} \in \mathbb{R}$, τότε $u \in \mathbb{R}$ β) αν $|z| = |w|$, τότε $u \in \mathbb{I}$

5.290 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z \neq iw$ και $w \neq 0$. Αν ισχύει $|z^2 + w^2| = |z^2 - 2izw - w^2|$, να αποδείξετε ότι $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$

5.291 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z + |z|| + |z - |z|| = 2|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

5.292 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z + i| + |z - i| = \sqrt{2}(|z| + 1)$. Να αποδείξετε ότι $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 2$

5.293 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z - 3| + |z + 3| = 10$ και $|z| = 4$

5.294 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z - 1| = \sqrt{3}$ και $|z| = 1$. Να αποδείξετε ότι: α) $z^2 + z + 1 = 0$ β) $z^{2013} = 1$

5.295 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z + i| + |z - i| = |z + 1| + |z - 1|$, να αποδείξετε ότι $|Re(z)| = |Im(z)|$

5.296 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = \frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}$ είναι πραγματικός, να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

5.297 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και $w = \frac{1 - iz + z^2}{1 + iz + z^2}$. Να αποδείξετε ότι: $|w| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ ή $z \in \mathbb{R}$

5.298 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z + \frac{1}{z}$, όπου $z \in \mathbb{C}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(z) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$ β) $f\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$

5.299 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός $u = \frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b}$ είναι πραγματικός

β) ο αριθμός $v = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ είναι φανταστικός

γ) αν επιπλέον είναι $a + b + c = 0$, να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) = -\frac{3}{2}$$

5.300 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } \frac{1 + z_1 z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $z_1 z_2 z_3 = -1$ ή $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1 + z_2 + z_3$

5.301 Έστω $z, w \in \mathbb{R}$, ώστε $zw = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{z-w}{2} + i \right| + \left| \frac{z-w}{2} - i \right| = |z| + |w|$$

5.302 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$, ώστε $z^2 = wu$. Να αποδείξετε ότι:

$$|w + u + 2z| + |w + u - 2z| = 2|w| + 2|u|$$

5.303 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$, ώστε $w^2 = z^2 - u^2$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| + |z + w| = |z - u| + |z + u|$$

5.304 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_n ώστε να είναι:

$$|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = \rho > 0$$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = (z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3) \cdots (z_{n-1} + \bar{z}_n)(z_n + \bar{z}_1)$$

είναι πραγματικός

5.305 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, οι οποίοι έχουν ίσα μέτρα. Να αποδείξετε ότι

$$\left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z_n}{z_{n-1}}\right) \left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbb{R}$$

5.306 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w|$ και $|z + w| = |z| + |w|$. Να αποδείξετε ότι $z = w$.

5.307 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

α) $z + w + 2zw = 1$ και $|z| = |w| = 1$

β) $z + w + 1 = zw$ και $|z| = |w| = 1$

5.308 Αν $z, w, u \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |z-w|^2 + |w-u|^2 + |u-z|^2 + |z+w+u|^2 = 3(|z|^2 + |w|^2 + |u|^2)$$

$$\beta) |z+w|^2 + |w+u|^2 + |u+z|^2 = |z|^2 + |w|^2 + |u|^2 + |z+w+u|^2$$

$$\gamma) |z+w+u|^2 + |-z+w+u|^2 + |z-w+u|^2 + |z+w-u|^2 = 4(|z|^2 + |w|^2 + |u|^2)$$

5.309 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z^2 - w^2| = 2|zw|$. Να αποδείξετε ότι:

$$||z+w| - |z-w|| = 2\sqrt{2}||z| - |w||$$

5.310 Έστω οι $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε να είναι $|z| = |w| = |z+w|$

α) Να αποδείξετε ότι $z^3 - w^3 = 0$

β) Να υπολογίσετε τον μιγαδικό $\frac{z}{w}$

5.311 Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ και $z \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$\frac{\alpha_1}{z + \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{z + \alpha_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z + \alpha_n} = 0$$

Να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

5.312 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν: $|z| = |w| = 1$ και $|z + w + 2| = |zw - 1|$

5.313 Αν A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και είναι $|z| = |w|$ και $\angle AOB = 45^\circ$, να αποδείξετε ότι $z^2 + w^2 = \sqrt{2}zw$

(v) $|z| = |\bar{z}|$

5.314 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|i - z| + |\bar{z} + i| = 2$, να αποδείξετε ότι $|z - i| = 1$

5.315 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |\bar{z}^2 + i| = |i - z^2| \quad \beta) |z + |z|^2| = |z^2 + z|$$

5.316 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 4i$, να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$

5.317 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|zw + \alpha| = |\alpha zw + 1|$

5.318 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι $|z + w + zw - 1| = |z + w - zw + 1|$

5.319 Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ και $|z_1 + z_2 + z_3| = 4$, να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 8$.

5.320 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

5.321 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν:

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{3}{2} \text{ και } |z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1| = 3$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 3|z_1 + z_2 + z_3 - 3|$

(vi) Αν $z = w$, τότε $|z| = |w|$

5.322 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $8 + z^2 = (\sqrt{3}z^2 - 6)i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z

5.323 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^4 + (z-1)^4 = 0$, να αποδείξετε ότι $Re(z) = \frac{1}{2}$

5.324 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $(z-2)^n = (z+2)^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$

5.325 Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $(1+i)^n = 16$ β) $-8i(1+i)^n = (\sqrt{3}-i)^n$
γ) $(\sqrt{3}-i)^n = -8i$ δ) $(2i)^n + (-2i)^n = -2048$
ε) $(1+2i)^n = -3+4i$ ζ) $\alpha + \beta i^n = 0$, με $\alpha, \beta > 0$
η) $(\alpha + \beta i)^{2n} = (\beta + \alpha i)^{n+1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
θ) $n(2+3i)^n + (3-2i)^n + (-3+2i)^n = 0$

5.326 Να βρείτε τον θετικό αριθμό α και τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει $(1+\alpha i)^n = 2^n$

5.327 Αν $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ με $\left(\frac{z-3i}{iz+1}\right)^n = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, να αποδείξετε ότι $Im(z) = 2$

5.328 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $\frac{z}{w} - \frac{w}{z} = i$, να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

5.329 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $(z-w)^2 + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Re(\bar{z}w) = \frac{|w|^2}{2}$ β) $|w| = \sqrt{2}|z|$

5.330 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $z^{20} + w^{20} = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = |w|$ β) αν $w \neq 0$, τότε $\left(\frac{z}{w}\right)^{30} \in \mathbb{I}$

5.331 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις, δεν έχουν πραγματικές ρίζες:

- α) $(1+iz)^7 = (z+i)^5$
β) $(1+iz)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, με $n \in \mathbb{N}^*$
γ) $(1+iz)^{2\kappa+1} = (i+z)^{2\lambda+1}$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$ και $\kappa \neq \lambda$,

5.332 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $5(z+i)^n = (4+3i)(1+iz)^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

5.333 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha\gamma > \beta^2$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$
β) αν $(w-z_1)^n = (w-z_2)^n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n > 1$, τότε $w \in \mathbb{R}$

5.334 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $(z-1)^{22} = (z-i)^{22}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $x = y$ β) $z^{22} \in \mathbb{I}$

5.335 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = (1-z^2)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι $|1-z| = |1+z|$

5.336 Έστω ο μιγαδικός $z \neq -i$ για τον οποίο ισχύει $(z+i)^3 + 2i(\bar{z}-i)^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z+i| = 2$ β) $\frac{(z+i)^2 + 4}{z+i} \in \mathbb{R}$

5.337 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta \neq 0$ και ο μιγαδικός αριθμός z ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι: α) $|z-i| = |z+i|$ β) $z \in \mathbb{R}$

5.338 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α) $z^3 = |z|$ β) $z^3 - |z| - 6 = 0$ γ) $2z^3 = |z| + 1$
δ) $z^3 = \bar{z}$ ε) $z^3 = \bar{z}|z|$ ζ) $2z^6 = |z| + 1$

5.339 Δίνεται ο μιγαδικός z και ο θετικός ακέραιος n για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^n = 1 \text{ και } (z+1)^n = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = |z+1| = 1$ β) $z^2 + z + 1 = 0$

5.340 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $\bar{z}^{14} = 27z^{11}$, να αποδείξετε ότι $z^{25} \in \mathbb{R}$

5.341 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $[(1-2i)z]^7 = (z+2)^7$, να αποδείξετε ότι: α) $\sqrt{5}|z| = |z+2|$ β) $|2z-1| = \sqrt{5}$

5.342 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $z^{100} + iz^{99} - iz + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

5.343 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $z^2 + zw + w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z+w| = |z| = |w|$

5.344 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $1 + 2z + 2^2z^2 + \dots + 2^n z^n = 0$, με $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $(1+2z)(1-2\bar{z}) \in \mathbb{I}$

(vii) μέτρο και συστήματα

5.345 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z + \frac{20i}{w} = 5 + i \text{ και } w + \frac{12i}{z} = -4 + 10i$$

Να βρείτε τις τιμές του $|zw|$

5.346 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1| = |z_2|$. Να βρείτε τους μιγαδικούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $xy = z_1$ και $x\bar{y} = z_2$

(β') Μέτρο διαφοράς

(i) απόσταση σημείων

5.347 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \frac{\lambda - 8i}{(3 + 4i)^4} \text{ και } w = \frac{\lambda + 17i}{(4 - 3i)^4}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο

(ii) ισοσκελές τρίγωνο

5.348 Έστω ότι A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 3 - 3i$ και $z_3 = 1 - 9i$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

5.349 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = t(\sqrt{3} - 1)z$, με $t \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την τιμή του t για την οποία το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές, με OA=OB

5.350 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^2 - 5(1+i)z + 13i = 0$ και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο

5.351 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε να είναι $\frac{2z}{w} + \frac{w}{z} = 2$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι εικόνες των z, w και η αρχή O των αξόνων σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο

β) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|w|$

5.352 Για τους μιγαδικούς a, b, c ισχύει:

$$c = za + (1 - z)b, \text{ με } a \neq b \text{ και } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των a, b, c είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

5.353 Έστω $\phi \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z_1 = \sigma\eta\phi + i(1 + \eta\mu\phi) \text{ και } z_2 = (1 + \eta\mu\phi) + i\sigma\eta\phi$$

Αν A, B είναι αντίστοιχα οι εικόνες των z_1, z_2 να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.

5.354 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ και $z \notin \mathbb{I}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, \bar{z}, \frac{z^2}{z}$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου

5.355 Οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις $a + b + c = 0$ και $|b| = |c|$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των a, b, c είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου

5.356 Έστω A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία A, B, Γ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο και δεν είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν $Re[(\beta + \gamma - 2\alpha)(\bar{\beta} - \bar{\gamma})] = 0$

5.357 Έστω A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία A, B, Γ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο και δεν είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ με $|\lambda| = 1$ και $(1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta - \gamma = 0$

(iii) ορθογώνιο τρίγωνο

5.358 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ορθογώνιου τριγώνου:

α) $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 5 + 5i$ και $z_3 = 2 + 6i$
β) $z_1 = \frac{4 - 2i}{1 - i}, z_2 = \frac{6 + 2i}{1 - 3i}$ και $z_3 = \frac{2 - 6i}{2 - i}$

5.359 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $w = z(1 + ai)$, με $a > 0$. Αν το τρίγωνο που σχηματίζουν οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

5.360 Έστω A, B οι εικόνες των μιγαδικών $z, w \neq 0$ και $z \neq w$. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) $\widehat{AOB} = 90^\circ$ β) $|z - w| = |z + w|$
γ) $|z|^2 + |w|^2 = |z + w|^2$ δ) $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$

5.361 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w, u , οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, είναι κορυφές ορθογώνιου τριγώνου:

α) $2u = iz + (2 - i)w$ β) $(1 - 2i)u = w - 2iz$

5.362 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών, στις παρακάτω περιπτώσεις, σχηματίζουν τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές:

α) z, w και $u = iz(1 - i)w$, με $z \neq w$
β) $z - i, 1 + iz$ και $(1 + i)(z - i)$, με $z \neq i$

5.363 Έστω A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\gamma|}{2\sqrt{2}}$$

Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με $\widehat{A} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})}{\operatorname{Re}(\beta\bar{\gamma})} = \frac{1}{2}$$

5.364 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z_1| = |z_2|$ β) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$

γ) αν A, B είναι οι εικόνες των z_1, z_2 τότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

5.365 Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ίσα μέτρα και ισχύει:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2$$

Να αποδείξετε ότι $z_2 + z_3 = 0$

5.366 Έστω A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow |z_2 + z_3 - z_1|^2 = |z_2|^2 + |z_3|^2 - |z_1|^2$$

(iv) **ισόπλευρο τρίγωνο**

5.367 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου:

α) $z^2 - 2i \cdot \bar{z} = 0$, με $z \neq 0$ β) $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$
 γ) $z^3 = 27$

5.368 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $2z = (1 + i\sqrt{3})w$. Αν η εικόνα B του w κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι:

α) η εικόνα A του z κινείται στον ίδιο κύκλο
 β) το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο

5.369 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z + w, z - w$ και $z + i\sqrt{3}w$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

5.370 Να βρείτε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους οι εικόνες των μιγαδικών στις παρακάτω περιπτώσεις, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου:

α) i, z, iz β) $1, z, z^2$

5.371 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $z^2 + w^2 = zw$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι ισόπλευρο

5.372 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\eta\mu^2 x)z^2 - (6\eta\mu x)z + 4\sigma\nu^2 x + 9 = 0, \text{ με } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης.

β) Αν A, B είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε:

ι) να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x , για την οποία το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο,

ii) για ποιά τιμή του x το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο;

5.373 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$z^2 - (2^{\theta+1}\sigma\nu\eta\theta)z + 2^{2\theta} = 0, \text{ με } \theta \in [0, 2\pi)$$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης

β) Αν A, B είναι οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις τιμές του θ για τις οποίες το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο.

5.374 Έστω A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο

5.375 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, με $|a| = |b| = |c|$ και οι εικόνες των a, b, c είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ab, bc, ca είναι επίσης κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

5.376 Αν $\epsilon^3 = 1$, με $\epsilon \neq 1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και $-\epsilon z - \epsilon^2 w$ με $z \neq w$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου

5.377 Οι μιγαδικοί a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = \rho \text{ και } \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(b\bar{c}) = -\frac{\rho^2}{2}$$

Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών a, b, c αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο

β) το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ είναι η αρχή των αξόνων

γ) $\operatorname{Re}(c\bar{a}) = -\frac{\rho^2}{2}$

(v) **Θεώρημα συνημιτόνων**

5.378 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z| = 1$ και $|w| = 2$. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z, w σχηματίζουν γωνία 60° , τότε:

- α) να υπολογίσετε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w
β) να υπολογίσετε τα μέτρα: ι) $|z + w|$ υ) $|2z + w|$

5.379 Έστω A, B οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z, w αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - w|^2 + \sqrt{3}|z| \cdot |w| = |z|^2 + |w|^2$$

Να αποδείξετε ότι $(OAB) = \frac{|zw|}{4}$

5.380 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$ και ισχύει $\frac{z}{w} + \frac{w}{z} = \sqrt{3}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0, 0), A(z)$ και $B(w)$.

5.381 Έστω A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $AB=AG$ και είναι $\eta\mu A = \left| \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2} \right|^2$, να αποδείξετε ότι $5(z_2^2 + z_3^2) = 4z_1(z_3 + z_2 - z_1) + 6z_2z_3$

(vi) **τετράπλευρα**

5.382 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 είναι κορυφές παραλληλογράμμου:

- α) $z_1 = 4 + i, z_2 = 6 + 5i, z_3 = 4 + 11i$ και $z_4 = 2 + 7i$
β) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 5 + 8i, z_3 = 7 + 12i$ και $z_4 = 3 + 6i$

5.383 Να αποδείξετε ότι οι ρίζες των εξισώσεων

$$z^2 - z + 1 = 0 \text{ και } z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$$

είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

5.384 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί α, β με $\alpha \neq \beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ και η αρχή των αξόνων είναι κορυφές τετραγώνου

5.385 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq w$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, w, z + (z - w)i$ και $w + (z - w)i$ είναι κορυφές τετραγώνου

5.386 Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$ οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των α, β, γ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OAB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αν και μόνο αν είναι $Im[(\alpha - \beta)\bar{\gamma}] = 0$ και $|\alpha - \beta| = |\gamma|$

(v') **Μέτρο και γεωμετρικοί τόποι**

(i) **ευθεία**

5.387 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει η σχέση:

- α) $|z + 2| = |z + 1 - i|$ β) $|z - 1 - 2i| = |z - 3 + 4i|$
γ) $|z + i| = |z - 3 + i|$ δ) $|iz - 3 + 2i| = |iz + 2 - i|$
ε) $|z + \bar{z}|^2 = 2|z|^2$ ζ) $|2iz - 1 + i| = |2iz + 1 + i|$

5.388 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \left| \frac{z - 3i}{z + i} \right|$, με $z \neq -i$

- α) Αν $f(z) = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z
β) Αν $f(z) < 1$, να αποδείξετε ότι $Im(z) > 1$

5.389 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = iz + 1$, όπου $z \in \mathbb{C}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = z$
β) Αν ισχύει $|f(z)| = |z|$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

5.390 Έστω οι μιγαδικοί z, w . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z , σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $|w - 1| = 1$ και $zw = i$
β) $|w| = 1$ και $zw = z + 1 + wi$

5.391 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lambda z + \bar{z} = |z|$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

5.392 Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z^{2n} = |z|^n(z + 1)^n$.

Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία $2x + 1 = 0$

5.393 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\sqrt{2}|z| = z + \bar{z} \text{ και } \frac{w}{iw - 2} \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z, w
β) Να λύσετε την εξίσωση $z = w$

5.394 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z + \bar{w}| = |\bar{z} - w|$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $u = zw$.

5.395 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w \neq 1$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|2zw - 2z + w - 1| = |2z\bar{w} - 2z + 2\bar{w} - 2|$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

(ii) κύκλος

5.396 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

α) $|2\bar{z} - 1| = 4$ β) $|z + 1 + 2i| = 3$ γ) $|\bar{z} - i| = 2$
δ) $|(1 - i)z + 2i| = 2$ ε) $|3 - 2iz + 4z| = 7$
ε) $\left| \frac{4z}{2+i} \right| + \sqrt{5} = |\bar{z}\sqrt{5}|$

5.397 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z - 3 - 4i| \leq 5$ β) $1 \leq |z - 3 - 4i| \leq 2$
γ) $2 < |2z - 2 + 6i| < 4$ δ) $|1 - z|^2 \leq 1 - |z|^2$

5.398 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει η σχέση:

α) $|4z - i| = 2|\bar{z} + i|$ β) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 10$
γ) $|z + 1| = 2|z - 2|$ δ) $|z - 1 - i| = 2|z - 1 + i|$
ε) $2|z| = |z - 3|$ ζ) $|z - 2i|^2 + |z - 3 + i|^2 = 13$
η) $2|z - 3 - 2i|^2 + 2|z + 1 - 3i|^2 = 21$

5.399 Έστω ο μιγαδικός $z = (2x - 3) + (2y - 1)i$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $|2z - 1 + 3i| = 3$

5.400 Να βρείτε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 4| \leq \frac{5}{2} \text{ και } |z - 3i| \leq \frac{5}{2}$$

5.401 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w , σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|z - i| = 2$ και $w = 4z + i$
β) $|z| = \sqrt{5}$ και $w = (2 - i)z + 3i$
γ) $|z| = 4$ και $2iw = z - 1 - i$
δ) $|z - 1| = 2$ και $(w + 2i)z = 2w$
ε) $|z - 3 + 4i| = 5$ και $zw = 1$
ζ) $|\bar{z} - 2i| = 3$ και $w = 4z - i$
η) $|z| = 1$ και $1 + zw = z$

5.402 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - 2 + i| = 3$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών:

α) \bar{z} β) $\bar{z} + 3 - 2i$ γ) $iz + 1$

5.403 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύει $|z - 3 + i| = 2$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $w = z + 1$ β) $w = z - 3 + 5i$ γ) $w = 2z - 4 + 3i$

5.404 Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός

$$w = \frac{\lambda z - i}{iz + \lambda}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

βρίσκεται στον ίδιο κύκλο

5.405 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 1$ και $z^2 = 2 + izw$
α) Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $z - iw$
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

5.406 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $zw - iw = z - (2 + 3i)$. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(0,1)$ και $B(2,3)$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο

5.407 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(z - 2i)^n = 4^n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 4$ είναι σημεία του ίδιου κύκλου.

5.408 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z \neq 0$, για τον οποίο ισχύει $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο $|z - 2| = 2$
β) Αν ισχύει $Im(z) = 1$, να υπολογίσετε το πραγματικό μέρος του z

5.409 Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 έχουν τις εικόνες τους σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων, ακτίνα $\rho > 0$ και είναι $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού

$$z = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$$

ανήκει στον ίδιο κύκλο.

5.410 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $2|z| = |z - 3|$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $w = \frac{z - 3}{z + 1}$ κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

5.411 Θεωρούμε τον μιγαδικό z , για τον οποίο ισχύει $|z + 3| = 2|z - 3|$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο:

α) της εικόνας του z β) της εικόνας του $w = \frac{z - 9}{z - 5}$

5.412 Θεωρούμε το μιγαδικό $z \neq i$ και έστω $w = \frac{z + 2i}{z - i}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|w| = 2$ β) $w \in \mathbb{I}$ και $Im(w) > 0$

5.413 Έστω ο μιγαδικός $z_0 \neq 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z - z_0| = |z|$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $zw = -1$

5.414 Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού w , για τον οποίο ισχύει $zw = 1$, βρίσκεται σε ευθεία

5.415 Αν η εικόνα του μιγαδικού z , κινείται στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w = z^2 + 3i$ κινείται επίσης σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

5.416 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - i| = 1 \text{ και } \operatorname{Im}(z) \geq 1$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού

$$w = \frac{1}{2} \left(z - i - \frac{1}{z - i} \right)$$

βρίσκεται σε ευθύγραμμο τμήμα του άξονα $y'y$

5.417 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z^2 + 1| = 2|z|$.

5.418 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z \neq 0$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left| z + \frac{1}{z} + 2 \right| + \left| z + \frac{1}{z} - 2 \right| = 4$$

(iii) παραβολή

5.419 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|z + 2| = |\operatorname{Re}(z) - 2|$ β) $|4z - i| = 1 + 4\operatorname{Im}(z)$

γ) $|z|^2 - \left(\operatorname{Im}(z) + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} = 0$

δ) $(|z| - 2i)(|z| + 2i) = (\operatorname{Re}(z) + 2)^2$

5.420 Αν $p \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

α) αν $|2z - p| = |z + \bar{z} + p|$, τότε η εικόνα του z βρίσκεται στην παραβολή $y^2 = 2px$

β) αν $|2z - pi| = |z - \bar{z} + pi|$, τότε η εικόνα του z βρίσκεται στην παραβολή $x^2 = 2py$

5.421 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $w = \frac{\alpha}{z^2}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $|z - 1| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

5.422 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$(2z + \bar{z} + i)^{10} = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{50} (z - i)^{10}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $|2z + \bar{z} + i| = |z - i|$

β) η εικόνα του z κινείται σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και την διευθετούσα

5.423 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|^2 - (\operatorname{Im}(z) + 1)^2 + 1 = 0$. Να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο του z

β) τους μιγαδικούς z που έχουν μέτρο $\sqrt{8}$

(iv) έλλειψη-υπερβολή

5.424 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|z - \bar{z} + 1| = |z|$ β) $|z - 1| + |z + 1| = 4$

γ) $|z - 3i| + |z + 3i| = 10$ δ) $||z - 4i| - |z + 4i|| = 6$

ε) $|z - 2| = |z + 2| + 1$ ζ) $|z - 10i| - |z + 10i| = 12$

η) $\frac{1}{|z - i|} + \frac{1}{|z + i|} = \frac{4}{|z^2 + 1|}$ θ) $\left| z + \frac{1}{z} \right| = |z|$

ι) $|z - \alpha| + |z + \alpha| = 4\alpha$, με $\alpha > 0$

5.425 Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει

$$|\bar{z} + 6| + |\bar{z} - 6| = 20$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $|9z - \bar{z}|$

5.426 Αν $\alpha > \beta > 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|(\alpha + \beta)z - (\alpha - \beta)\bar{z}| = 2\alpha\beta$$

(δ') ανισοτικές σχέσεις

(i) μέτρο και ανισότητες

5.427 Αν z είναι μιγαδικός αριθμός, να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $|z - i| < |z + i| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) > 0$

β) $|z| < |1 - z| \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) < 1$

γ) $|iz + 1| > |z| \Leftrightarrow 2\operatorname{Im}(z) < 1$

δ) $|6z - i| \leq |2 + 3iz| \Leftrightarrow |z| \leq \frac{1}{3}$

5.428 Αν $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$, να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{2}{z + 1} \right) > 1 \Leftrightarrow |z| < 1$$

5.429 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z) > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$$

5.430 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω ισονομίες:

α) $|z - w| > |\bar{z} + w| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w) < 0$

β) $|z - w| \leq |z - \bar{w}| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(w) \geq 0$

5.431 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| \leq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|2z - \bar{z}|^2 + |2z + \bar{z}|^2 \leq 10$$

5.432 Αν οι μιγαδικοί z, w είναι συζυγείς, να αποδείξετε ότι $(z^2 - 3z + 5)(w^2 - 3w + 5) \geq 0$

5.433 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| < |w|$ και $|z - w| > |1 - \bar{z}w|$, να αποδείξετε ότι $|z| < 1$ και $|w| > 1$

5.434 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{z + \bar{z}}{2} \right| + \left| \frac{z - \bar{z}}{2} \right| \leq \sqrt{2}|z|$$

5.435 Αν $x \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$|x + z| < |x| + |z|$$

5.436 Αν $a, b, z, w \in \mathbb{C}$ με $|a| \leq 1, |b| = 1$ και $w = \frac{b(a - z)}{\bar{a}z - 1}$.

Να αποδείξετε ότι $|w| \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$

5.437 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε τις παρακάτω ισονομίες:

α) $\left| z - \frac{2}{iz} \right| < |z| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2) < -1$

β) $\left| z + \frac{1}{z} \right| < |z| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) < -\frac{1}{2}$

5.438 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ και $|c| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|ab| + |bc| + |ca| \geq 3|abc|$

5.439 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

α) $|z|^2 + |w|^2 \geq z\bar{w} + \bar{z}w$

β) $-2|zw| \leq z\bar{w} + \bar{z}w \leq 2|zw|$

γ) $2(|z|^2 + |w|^2) \geq (z + w)^2$

δ) $(1 + |z|^2)(1 + |w|^2) \geq (|z| + |w|)^2$

ε) $2|z + w|^2 \leq 6|z|^2 + 3|w|^2$

5.440 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| \leq 1$ και $|w| \leq 1$, να αποδείξετε ότι: α) $|z| + |w| \leq 1 + |zw|$ β) $|z - w| \leq |1 - z\bar{w}|$

5.441 Αν $z, w, x, y \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$(|z|^2 + |w|^2)(|x|^2 + |y|^2) \geq |zx + wy|^2$$

5.442 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 2$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = z^2 - z - 4$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|w| = 2\sqrt{1 + 4(\operatorname{Im}(z))^2}$ β) $|w| \leq 2\sqrt{17}$

γ) $(z^2 - z - 4) \left(\frac{16}{z^2} - \frac{4}{z} - 4 \right) \leq 68$

5.443 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = |w| = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|z + xw| > 1$, να αποδείξετε ότι $|\operatorname{Re}(z\bar{w})| < 2\sqrt{3}$

5.444 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z\bar{w} \in \mathbb{R}$ και $8z|w| - w = z^2|w|\bar{w}$. Να αποδείξετε ότι $0 < |w| \leq 16$

5.445 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) αν $|z| \leq 1, |w| \leq 1$ και $|z - w| = \sqrt{3}$, τότε είναι $|z + w| \leq 1$

β) αν $|z| \leq 5, |w| \leq 5$ και $|z + w| = 6$, τότε είναι $|z - w| \leq 8$

5.446 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z + w| + |z - w| \leq 2\sqrt{2}$$

5.447 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2}|1 + z| \geq 1 + |z|$$

5.448 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ και $\operatorname{Re}(w) \geq 0$, να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |w|^2 + zw + \bar{z} \cdot \bar{w} \geq 0$

5.449 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \geq \left| 1 - \frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) \right|$$

5.450 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z + w| = 1$. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq \frac{1}{4}$

5.451 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $w\bar{w} + 1 = |zw - iw|$. Να αποδείξετε ότι $|z - i| \geq 2$

5.452 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|z + 1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $|z^2 + 1| \geq 1$

5.453 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta(\alpha + \beta) \neq 0$ και $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z + w|^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{|z|^2}{\alpha} + \frac{|w|^2}{\beta}$$

5.454 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι

$$|z - w| \geq \frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w) - 1$$

5.455 Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$||x| - |y|| \leq |z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$$

5.456 Έστω $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και $z \in \mathbb{C}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$|z + \alpha i| > |\alpha z + i| \Leftrightarrow |z| < 1$$

β) Αν είναι $\alpha z^4 + iz^3 + z + \alpha i = 0$, να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

5.457 Έστω z μιγαδικός με $|z| = 1$. Να αποδείξετε ότι $|z^2 + z - 1| \leq \sqrt{5}$

5.458 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|a| = |b| = |c| = 1$ και $a + b + c = 3$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $[Im(z)]^2 \geq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z - a|^2 + |z - b|^2 + |z - c|^2 \geq 3$$

5.459 Θεωρούμε το σύνολο:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z = \alpha + \beta i, \alpha > 0, |z| < 1\}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in A$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιος ώστε $z = \frac{1-x}{1+x}$

5.460 Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} - \{-i\}$, με $n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| < 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \left| \frac{(z_1 + z_2 + \dots + z_n) - i}{(z_1 + z_2 + \dots + z_n) + i} \right| < 1$$

β) δεν υπάρχει κάποιος από τους z_1, z_2, \dots, z_n που να είναι πραγματικός

5.461 Αν $\alpha, \beta > 0$, με $\alpha + \beta = \alpha\beta$ και $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $\alpha|z|^2 + \beta|w|^2 \geq |z + w|^2$

5.462 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$|z + w|^2 \leq (1 + \alpha)|z|^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)|w|^2$$

5.463 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{1}{z} - iz \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{z}{i} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| iz - \frac{z}{i} \right|$$

5.464 Έστω $x, y \in \mathbb{R}^*$, με $x^2 + y^2 = 1$. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{z}{x} \right|^2 + \left| \frac{w}{y} \right|^2 \geq |z + w|^2$$

5.465 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w|$ και $z + w > 0$, να αποδείξετε ότι $zw > 0$

(ii) **τριγωνική ανισότητα**

5.466 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$$

5.467 Έστω $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $|z| = 3$ και $w = 6 + 8i$, τότε $7 \leq |z + w| \leq 13$
- β) αν $|z| = 4$ και $w = 3 - 4i$, τότε $1 \leq |z - w| \leq 9$
- γ) αν $|z - 1| = 3$ τότε $5 \leq |2z - 3| \leq 7$
- δ) αν $|z| = 3$ και $w = -8 + 6i$, τότε $24 \leq |2z + 3w| \leq 36$
- ε) αν $|z - 3i| = 3$, τότε $2 \leq |z - 4| \leq 8$
- ζ) αν $|z - 6i| \leq 4$, τότε $6 \leq |z + 8| \leq 14$
- η) αν $|z - 2 + 3i| = 2$, τότε $3 \leq |z - 5 + 7i| \leq 7$

5.468 Αν $a = 3 + 5i, b = 7 + 5i$ και $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|z - a| + |z - b| \geq 4$

5.469 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ και $|w| = 2$, να αποδείξετε ότι $|2z + (3 + 4i)w| \leq 12$

5.470 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

- α) αν $|z| = |w| = 1$, τότε $|z\bar{w} + \bar{z}w| \leq 2$
- β) αν $|z| = 1$, τότε $|zw - z| \leq 1 + |w|$

5.471 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \sqrt{3} - 1$ και $\theta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|2z\eta\mu\theta + z^2| \leq 2$

5.472 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- α) αν $|z| < \frac{1}{2}$, τότε είναι $|(1 + i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$
- β) αν $|z| < \frac{1}{3}$, τότε είναι $|(\sqrt{3} + i)z^3 - i \cdot \bar{z}| < \frac{11}{27}$

5.473 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z + 2i| \leq 3$ και $|w - 4 + 5i| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 9$

5.474 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1 - 2| = 1$ και $|z_2 + i| = 4$. Αν $w = 2 - i - z_1 - z_2$, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 5$

5.475 Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, να αποδείξετε ότι:

$$|Im(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$$

5.476 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c και x, y, z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1 \text{ και } |x| + |y| + |z| = 1$$

Να αποδείξετε ότι $|ax + by + cz| < 1$

5.477 Αν $z \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$ και $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{z^3 - 1}{z - 1} \right| + \left| \frac{z^3 + 1}{z + 1} \right| \geq 2$$

5.478 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_n με $n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. Για κάθε $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|w - z_1| + |w - z_2| + \dots + |w - z_n| \geq n$$

5.479 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{7} \leq \left| \frac{1}{3 + 4z^2} \right| \leq 1$$

5.480 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$2 \leq \left| \frac{z^3 + 2z + 1}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{17}{4}$$

5.481 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

- α) $|z^2 + z| \leq |z^2 + z - 2| + 2$ β) $|z - 1 + 5i| + |4 - i - z| \geq 5$
 γ) $|z - |z|| \leq 2|z|$ δ) $|4z - 5| + |3z - 2| - 7|z - 1| \leq 2$
 ε) $|4z + 2| + |z - 5| - |z + 2| \leq 4|z| + 9$
 ζ) $|z + 2| + |z - 1| \leq |z + 1| + |z| + 2$
 η) $|z| + |z - 1| + |z - i| + |z - 1 - i| \geq 2\sqrt{2}$

5.482 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z^3 + \bar{z}^3 = 16$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq 2$

5.483 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, με $z^{-8} + (\bar{z})^{-8} = \frac{1}{128}$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$

5.484 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|1 + z|(1 - |w|) > 1$, να αποδείξετε ότι $|z| > |w|$

5.485 Αν $z \in \mathbb{C}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z^2 - z + 1| + |z^2 - z - 1|$

5.486 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z - 2| + |z - 5| + |z - 7|$ είναι 5

5.487 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = 1, |b| = 2$ και $|c| = 4$. Να αποδείξετε ότι $a + b + c \neq 0$.

5.488 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 2| = 2$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|3z^2 + 4|$

5.489 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = 1, |b| = 4, |c| = 10$ και $a + b + mc = 0$, με $m > 0$. Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{10} \leq m \leq \frac{1}{2}$

5.490 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $a + b + c = 0$ και $|a| = |b| = |c| = 1$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$3|z| \leq |z - a| + |z - b| + |z - c| \leq 3(|z| + 1)$$

5.491 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ και $u = |z|w + |w|z$ για τον οποίο είναι $|u| = |z|^2 + |w|^2$. Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

5.492 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$ και $|w| = 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$(z + w) \left(\frac{1}{z} + \frac{4}{w} \right) \leq 9$$

5.493 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = 1, |b| = 2$ και $|c| = 3$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \right) \leq 36$
 β) $|a - b - c| + \left| \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \right| \geq 2$

5.494 α) Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z - 2i| + |\bar{z} + 3i| \leq |z| + |\bar{z} + 5i|$$

β) Αν $w \in \mathbb{C}$ με $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|2w - 1| + |3w - 1| \leq 1 + |5w - 1|$$

5.495 Αν $z \in \mathbb{C}^*$ με $\left| z + \frac{2}{z} \right| = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$|z| + \frac{2}{|z|} \leq \sqrt{17}$$

5.496 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

- α) $|3z - 2| = |2z - 3|$ β) $|3z - 2| + |5z^2 - 2z - 1| \geq 1$

5.497 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|2013z - 1| + |2014 - z + 2013z^2| \geq 2014$$

5.498 Αν $z \neq \frac{1}{2}$ και $w \neq -\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|3z + w|}{|2z - 1| + |2w + 1|} \leq \frac{1}{2} + \frac{|z|}{|z + w|}$$

5.499 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| \leq 3$$

5.500 Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_n βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right| = |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq n$$

5.501 Αν $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{z}{z + |z|} \right| + \left| \frac{z}{z - |z|} \right| \geq 1$$

5.502 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = \rho > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{1}{z^2 + z + 1} \right| \leq \frac{1}{\rho^2 - \rho - 1}$$

5.503 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$|z-1| + |z| + |z+2| + |z+3| = 8$$

Να αποδείξετε ότι $|z+1| \leq 2$

5.504 Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ και θεωρούμε το σύνολο:

$$K = \{z \in \mathbb{C} / |z-\alpha| + |z-\beta| \leq |\gamma|\}$$

Αν $z_1, z_2 \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$ ανήκει στο σύνολο K

5.505 Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε να είναι:

$$\begin{aligned} |z-1| + |z+1| + |z-2| + |z+2| + \dots + |z-n| + |z+n| &= \\ &= 2n^2 + 4n \end{aligned}$$

Να αποδείξετε ότι $|z| \leq n+2$

5.506 Αν $z, w \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w| \cdot \left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right| \leq 2(|z| + |w|)$$

5.507 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha + \beta = 1$ και $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha z + \beta w| \geq \frac{|z+w|}{2}$$

5.508 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w|$ και $x \geq -1$, να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)|z+w| \leq 2|xz+w|$$

5.509 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z+w| = |zw|$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$ ή $|w| \leq 2$

5.510 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$|z^4 - 5z^2 + 6| \geq 2$$

5.511 Αν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_2 - z_3| \cdot |z_1 - z_4| \geq |z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|$$

5.512 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) |z| + |w| &\leq |z| + |w| + ||z| - |w|| \leq |z+w| + |z-w| \\ \beta) \sqrt{|z| + |w|} + \sqrt{||z| - |w||} &\leq \sqrt{|z+w|} + \sqrt{|z-w|} \end{aligned}$$

5.513 Αν $\alpha, \beta, \gamma, z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z-\alpha| + |z-\beta| + |z-\gamma| \geq \frac{|\alpha-\beta| + |\beta-\gamma| + |\gamma-\alpha|}{2}$$

5.514 Έστω οι μιγαδικοί z, w και $u = |z|w + |w|z$, ώστε $|u| = |z|^2 + |w|^2$. Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

5.515 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

- α) $|1+z| + |1-z| \leq 2(1+|z|)$
- β) $|1+z| - |z| \leq |1+z|^2$
- γ) $|z^2 + 2z + 2| + |z-1| + |z^2 + z| \geq 3$
- δ) $|z^2 + z| + |z^2 + 1| + 3|z+1| \geq 2$
- ε) $|z+1| + |z+2| \leq |z| + |z+3|$
- ζ) $|z+2| + |z+3| \leq |z| + |z+1| + 4$
- η) $|z+3| + |z+4| - |z+1| - |z-2| \leq 8$
- θ) $2|z+5| \leq |z| + |z+1| + 9$
- ι) $|z| + |z+1| \leq |z-1| + |z+2|$
- κ) $|z+2| + |z-1| \leq |z+1| + |z+2|$

5.516 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z^2 + 1| \leq 1$ και $|z+1| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |z^2 + 2z + 1| \leq 1 \quad \beta) |z| \leq 1$$

5.517 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z|}{\eta\mu x} + \frac{|w|}{\sigma\upsilon\nu x} \geq |z+w|$$

5.518 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\epsilon = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι $|z - \epsilon w| \leq |z| + |z-w|$

5.519 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $z^4 - 4z + 6 = 0$, να αποδείξετε ότι $|z| > 1$.

5.520 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $\alpha \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w| \leq |\alpha z + (1-\alpha)w| + |(1-\alpha)z + \alpha w| \leq |z| + |w|$$

5.521 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

- α) $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$
- β) $|1+3z^{2014}| + |1-z^{2014}| + |1+2z^{2014}| + |1+z^{2014}| \geq 5$
- γ) $2|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + |1+z^4| + |1+z^5| \geq 4$

5.522 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+1| + |w+1| + |zw+1| \geq 2$$

5.523 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z^2 + 1| = 2|z+1|$. Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$

5.524 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

- α) αν $\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| \leq 2$, τότε $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$
- β) αν $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$, τότε $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$

5.525 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $z^3 + z^2w = z - w$. Αν $|w| \leq 2$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$.

5.526 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|(1-a)(1-b)(1-c)| \geq 1 - |a| - |b| - |c|$$

5.527 Αν $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|1 + z_1| + |z_1 + 2z_2| + \dots + |(n-1)z_{n-1} + nz_n| \geq 1 - n|z_n|$$

(ε') **Μέγιστο-ελάχιστο μέτρο**

(i) **ευθεία**

5.528 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και τους μιγαδικούς z που έχουν το ελάχιστο μέτρο:

- α) $Re(z) + 1 = Im(z)$ β) $|z - 5 + 3i| = |z - 1 - i|$
 γ) $|iz + 3| = |\bar{z} - 4|$ δ) $|z + 4i|^2 - |z + 3|^2 = 17$
 ε) $z = (\lambda + 2) + (2\lambda + 1)i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

5.529 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $Re(z) = Im(z) + 3$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z|^2 - 8$

5.530 Έστω (ϵ) η ευθεία που διέρχεται από τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 = 1 - 2i$ και $z_1 - z_2 = 3 - 4i$. Να βρείτε τον μιγαδικό w του οποίου η εικόνα βρίσκεται στην ευθεία (ϵ) και έχει το ελάχιστο μέτρο.

5.531 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$2|\bar{z} + 1| = |(1 + i\sqrt{3})z - 3\sqrt{3} + 3i|$$

Να βρείτε:

- α) τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
 β) την ελάχιστη τιμή του $|z|$

5.532 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύει $|z - 4| + |z - 3i| = 5$.

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$

(ii) **ευθεία-σημείο**

5.533 Η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $3x + 4y - 60 = 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - 3 - 4i|$

5.534 Έστω ο μιγαδικός $z = (2 - \lambda) + (1 + 2\lambda)i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- α) τη γραμμή στην οποία βρίσκεται η εικόνα του z
 β) το μιγαδικό z ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο
 γ) την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - 1 - i|$

5.535 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z + 2 - 3i| = |z + 1 - i|$. Να βρείτε:

- α) το γεωμετρικό τόπο του z
 β) το μιγαδικό z , ο οποίος απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(1, 1)$

5.536 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $|2iz - 2 - 6i| = 2|\bar{z} - 5 + 3i|$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$
 γ) Να αποδείξετε ότι $|z - 2 + 3i| \geq 2\sqrt{5}$

5.537 Να βρείτε τον μιγαδικό z , για τον οποίο ισχύει $|z - 1| = |z - i|$ και το άθροισμα $|z - 2i| + |z + 3 - 4i|$ να γίνεται ελάχιστο

(iii) **δύο ευθείες**

5.538 Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $z(4 - 3i) + \bar{z}(4 + 3i) = -2$ και $4(w + \bar{w}) - 3i(w - \bar{w}) = -22$
 β) $|z - 2| = |z + 2 - 3i|$ και $|w + i| = |w - 4 + 4i|$

5.539 Έστω ο μιγαδικός z με $|z|^2 + Im(z^2) = 1$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε δύο ευθείες (η_1) και (η_2)
 β) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 βρίσκονται στις ευθείες (η_1) και (η_2) , να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \geq \sqrt{2}$

5.540 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $w = 3z - i \cdot \bar{z} + 4$. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία $y = x - 2$, τότε:

- α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w
 β) να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq 5\sqrt{2}$

5.541 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -\alpha + (\alpha - 1)i$ και $z_2 = (\alpha - 3) - \alpha i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 κινούνται σε δύο παράλληλες ευθείες.
 β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$
 γ) Αν $\alpha = 2$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$K = 1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2014}$$

5.542 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 2| = |iz + 2| \text{ και } w = \lambda(-1 + i) + \frac{2 + i}{i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
 β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(iv) κύκλος

5.543 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο του μιγαδικού z , καθώς και τους μιγαδικούς που έχουν το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο αντίστοιχα:

- α) $|z - 2| = 1$ β) $2|z|^2 = (1 - i)z + (1 + i)\bar{z}$
γ) $|z - 4 - 3i| = 2$ δ) $|z|^2 + 2i(z - \bar{z}) + 3 = 0$

5.544 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ώστε $|z|^2 = 2\operatorname{Re}(z)$, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2$

5.545 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|w| = 1$ και $z - 5 = 2\sqrt{2}w - 5i$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο
β) $3\sqrt{2} \leq |z| \leq 7\sqrt{2}$

5.546 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - 1 - 3i|^2 + |z - 3 - 3i|^2 = 4$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $4 \leq |z - \bar{z}| \leq 8$

5.547 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\operatorname{Re}[(z - 1)(\bar{z} + 1)] = z + \bar{z}$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να αποδείξετε ότι $|z_1 - \bar{z}_2| \leq 2\sqrt{2}$

5.548 Έστω οι μιγαδικοί z , ώστε να είναι:

$$(z - 3 - 4i)(\bar{z} - 3 + 4i) = 25$$

Να βρείτε:

- α) τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z
β) τον μιγαδικό z με το ελάχιστο μέτρο και τον μιγαδικό με το μέγιστο μέτρο

5.549 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - 1 + 2i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Να βρείτε:

- α) το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $w = 2z + 1 + i$
β) τους μιγαδικούς w οι οποίοι έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο

5.550 Έστω $z \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει $|z - i| = \sqrt{2}|z - 1|$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq \sqrt{5} + 2$

5.551 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|(3 + 4i)z + 25| + |\bar{z} + 3 + 4i| = 6$$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από την αρχή των αξόνων
γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που επαληθεύουν τη δοσμένη σχέση, να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

5.552 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1 - z_2| = 2$ και θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$(w - z_1)(\bar{w} - \bar{z}_1) + (w - z_2)(\bar{w} - \bar{z}_2) = 4$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|w - z_2|$

5.553 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = (3 + \sqrt{2}\sin\phi) + (3 + \sqrt{2}\eta\mu\phi)i, \text{ όπου } \phi \in [0, 2\pi)$$

- α) Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z
β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να βρείτε αυτόν που έχει το ελάχιστο μέτρο και αυτόν που έχει το μέγιστο μέτρο

(v) κύκλος-σημείο

5.554 Αν $z \in \mathbb{C}$, να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης A , σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $A = |z - 4 - 3i|$, με $|z| = 2$
β) $A = |z - 1 - i|$, με $|z + 2 + 3i| = 3$
γ) $A = |z - 2 + 5i|$, με $|z + 1 + i| = 2$
δ) $A = |z - 6 + 2i|$, με $|z + 2i| \leq 1$

5.555 Έστω $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $|z - 2 - i| \leq 5$, τότε $8 \leq |z - 14 - 6i| \leq 18$
β) αν $|z - 1 - i| < 5$, τότε $|z - 10 - 13i| > 10$
γ) αν $|z - 1 + 2i| < 3$, τότε $2 < |z + 2 - 2i| < 8$

5.556 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z^2 + 2z|$

5.557 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - i|^2 + |z + i|^2 = 4$. Να αποδείξετε ότι $4 \leq |z - 3 + 4i| \leq 6$

5.558 Έστω ο μιγαδικός $z = x + (y - 1)i$, με $x, y \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z - 1 - i| - 1 = 0$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $w = x + yi$

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} - 1 \leq |w - 2 - i| \leq \sqrt{2} + 1$

5.559 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $(2z - 3)^n = (z - 3i)^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2\sqrt{5}$

γ) Αν $w = 2 + \sqrt{5}i$, να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο το μέτρο $|z - w|$ γίνεται ελάχιστο

5.560 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|(3 + 4i)z + 4 - 3i| = 10$. Να βρείτε:

α) τον γεωμετρικό τόπο του z

β) την ελάχιστη τιμή της παράστασης $u = |iz - 2 + 3i|$

γ) τον μιγαδικό z για την οποία η παράσταση u γίνεται ελάχιστη

5.561 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $|z + 1 - i| = 1$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$|z - 1 - 2i|^2 + |z - 5 + 4i|^2$$

(vi) **κύκλος-ευθεία**

5.562 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|z - 1| = |z - i|$ και $|w - 2| = 1$

β) $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 4 = 0$ και $(w - 2)(\bar{w} - 2) = 1$

γ) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$ και $zw = 6$

5.563 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 1| \leq 1 \text{ και } w = \frac{1 - \eta\mu t}{2} + i\frac{1 + \eta\mu t}{2}, \text{ με } t \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$

5.564 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $zw = 2w + 1$. Αν η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, τότε:

α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

β) να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

5.565 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|(1 + i)z - 1| = \sqrt{2} \text{ και } |w + 3i| = |w - 1 + 2i|$$

Να βρείτε:

α) τους γεωμετρικούς τόπους των z, w

β) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

5.566 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z\bar{z} + 2|z| = 3 \text{ και } w = \lambda - (\lambda - 3)i, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z και w

β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$

γ) Να αποδείξετε ότι $|2z - w| \geq \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}$

5.567 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 2 - 4i| = 2 \text{ και } |w - 2 + 4i| = |w - 6|$$

Να βρείτε τις ελάχιστες τιμές των παραστάσεων:

α) $|z - w|$ β) $|z - w - 1 + 3i|$

(vii) **δύο κύκλοι**

5.568 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

α) $|z + 2| = 1$ και $|w - 4i| = 2$

β) $|2z - 4i| = 2$ και $|w - 3 + 3i| = 2$

γ) $|z + 1 - 2i| = 2$ και $|w - 6 - 2i| = 3$

δ) $|z - 1 - i| = 1$ και $w = 2z + 3$

ε) $|w| = 2$ και $z = 2w + 2i$

5.569 Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, να αποδείξετε ότι:

α) η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{z - 2i}{2iz + 1}$ ανήκει στον ίδιο κύκλο

β) $|z - w| \leq 2$

5.570 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 3 + 2i| \leq 3 \text{ και } |(1 + i)w + 2| \leq 2\sqrt{2}$$

Να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 10$

5.571 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$\frac{1 + iz}{z + i} \in \mathbb{R} \text{ και } |iw + 1| = |2w + i|$$

Να βρείτε:

α) τους γεωμετρικούς τόπους των z, w

β) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των z, w

5.572 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 1 - 4i| \leq 2\sqrt{2} \text{ και } |iw + 11 - 2i| \leq 3\sqrt{2}$$

- α) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z = w$ έχει μοναδική λύση

5.573 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z - 1| \leq 1$ και $|z - 2| = 1$, να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$

5.574 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 2$ και $|w - 3 + 4i| = 5$. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|2z + w|$

(viii) παραβολή-ευθεία

5.575 Έστω οι μιγαδικοί $z = \lambda^2 + 2\lambda i$ και $w = t - 1 + 2ti$, με $\lambda, t \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- α) τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z, w
 β) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

5.576 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|4z - 1| = 1 + \operatorname{Re}(z) \text{ και } \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(2\bar{w}) = -6$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
 β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \sqrt{5}$

5.577 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^2 + \bar{z}^2 + 4\operatorname{Re}(z) = 2|z|^2 \text{ και } |w + 1|^2 - |w - 2i|^2 = -15$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
 β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \sqrt{5}$

(ix) παραβολή-σημείο

5.578 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 1| = 1 - \operatorname{Re}(z) \text{ και } w - 2 = \left(\frac{1 + 3i}{\sqrt{6} + 2i} \right)^7$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq 1$

(x) έλλειψη

5.579 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 4| + |z + 4| = 10$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C) των εικόνων του z
 β) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 βρίσκονται στη γραμμή (C) και οι εικόνες τους είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $6 \leq |z_1 - z_2| \leq 10$

5.580 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{|z - 3i|} + \frac{1}{|z + 3i|} = \frac{10}{z^2 + 9}$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
 β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = 6$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| \leq 8$

5.581 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z - 3| + |z + 3| = 10$ και $|w| = 4$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$

5.582 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|iz - 3| + |iz + 3| = 10$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η εικόνα του z βρίσκεται σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση, τις κορυφές και τις εστίες
 β) $4 \leq |z| \leq 5$ γ) $16 \leq |z^2 - 9| \leq 25$

(xi) υπερβολή

5.583 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z + 5| - |z - 5| = 8$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq 4$

5.584 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z + 2i| - |z - 2i| = 2\sqrt{3}$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
 β) Να αποδείξετε ότι $|z - 1| \geq \sqrt{6}$

6 Μιγαδικοί και διανύσματα

(α') βασικές ιδιότητες

6.585 Έστω M, N οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα. Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- α) $\frac{z}{w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} // \overrightarrow{ON}$ β) $\frac{z}{w} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$

$$\gamma) |z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{ON}$$

$$\delta) \frac{z}{w} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} - i \cdot \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})}{\overrightarrow{ON}^2}$$

6.586 Έστω A_1, A_2, A_3, A_4 οι εικόνες τεσσάρων μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overrightarrow{A_1A_2} // \overrightarrow{A_3A_4} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \overrightarrow{A_1A_2} \perp \overrightarrow{A_3A_4} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in i$$

(β') **συνευθειακά σημεία**

6.587 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία:

$$\alpha) z\bar{w} = \bar{z}w \quad \beta) |z| = |w| = |\operatorname{Re}(z\bar{w})| = 1$$

6.588 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους οι εικόνες των αριθμών που δίνονται, είναι συνευθειακά σημεία:

$$\alpha) 1+i, z, z+i \quad \beta) z, z+1, z^2 \quad \gamma) 1, iz, 1-z^2$$

$$\delta) 1, z, 1+z^2$$

6.589 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \alpha z + \beta$, με $z \in \mathbb{C}$. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε ότι και οι εικόνες των μιγαδικών $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ είναι συνευθειακά σημεία

6.590 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\bar{z}, -\bar{z}$ και $\frac{1}{z}$ είναι συνευθειακά σημεία.

6.591 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $\bar{z}w = -1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

6.592 Δίνονται οι μιγαδικοί a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση $a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$$

β) οι εικόνες των a, b, c είναι σημεία συνευθειακά

6.593 Έστω $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a \neq b$ και $a + b + 1 > 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $-z^2, az+b, bz+a$ είναι σημεία συνευθειακά αν και μόνο αν $|z-1| = \sqrt{a+b+1}$

6.594 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$w = \left(\frac{z}{|z|} + 1\right)^{2n} \quad \text{και} \quad u = \left(\frac{z}{|z|} - 1\right)^{2n}, \quad \text{με } n \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w, u και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

6.595 Έστω A, B οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z, w . Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(z+w)^2}{zw} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow O, A, B \text{ συνευθειακά ή } |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$$

6.596 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = \frac{\kappa}{z}$, με $\kappa > 0$. Αν M, N είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overrightarrow{OM}^2 \cdot \overrightarrow{ON} = \kappa \cdot \overrightarrow{OM}$$

β) τα σημεία O, M, N είναι συνευθειακά

6.597 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$ και $|a+b+c| = 3$, να αποδείξετε ότι $a = b = c$

(γ) **εσωτερικό γινόμενο**

6.598 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = 2 + 3i$ και $w = 1 + 4i$ με εικόνες τα σημεία A, B αντίστοιχα. Να βρείτε σημείο M της ευθείας $(\epsilon) : 3x + y - 5 = 0$, ώστε να είναι $\widehat{MAB} = 90^\circ$

6.599 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με εικόνες τα σημεία A, B αντίστοιχα.

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \operatorname{Re}(z\bar{w})$$

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τις εικόνες των μιγαδικών $z-1$ και $z-i$

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, z-1$ και $z-i$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

6.600 Έστω A, B οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^2 + 2z + \lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν M είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 1 - i$, να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι $|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}| = 4$

6.601 Έστω M η εικόνα του μιγαδικού z και A, B οι εικόνες των μιγαδικών $z-1$ και $2z+i$ αντίστοιχα. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M ώστε $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$

6.602 Έστω οι μιγαδικοί z και $w = 1 + i$. Αν A, B είναι οι εικόνες των $z+w$ και $z-w$ αντίστοιχα, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , αν ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$

6.603 Έστω ο μιγαδικός $z \neq 0$ και έστω A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z και $z^2 - 1$ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z , ώστε να είναι $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

6.604 Δίνεται ο αριθμός $\alpha \in [0, \pi]$ και θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 2\sigma\alpha \cdot z + 1 = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης (1)

β) Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 αντίστοιχα, να βρείτε τις τιμές του α , ώστε $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$
 γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα της ρίζας με θετικό φανταστικό μέλος, κινείται σε ημικύκλιο.

6.605 Έστω A, B οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών α, β αντίστοιχα, με $|\alpha| = |\beta|$. Αν $z = (\alpha + \beta)^n$ και $w = (\alpha - \beta)^n$ με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:
 α) αν ο n είναι άρτιος, τότε τα σημεία A, B και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά
 β) αν ο n είναι περιττός, τότε $OA \perp OB$

(δ') τετράπλευρα

6.606 Έστω A, B, Γ, Δ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$

6.607 Έστω A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών $z, z + w$, αντίστοιχα. Αν ο αριθμός $\frac{z + iw}{z - iw}$ είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OAB\Gamma$ είναι ρόμβος.

7 Επαναληπτικά θέματα

(α') α ομάδα

7.608 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 1$ και $w = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$
 α) αν $z = -2 + i$, να βρείτε το $|w|$
 β) να αποδείξετε ότι $|w| = 1$
 γ) να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{w-1}{z-1}$ είναι πραγματικός
 δ) αν $w = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z

7.609 Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq \alpha i$ και $w = \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha}$. Να αποδείξετε ότι:
 α) αν w είναι φανταστικός αριθμός, τότε και z είναι φανταστικός αριθμός
 β) αν $|w| = 1$, τότε $z \in \mathbb{R}$
 γ) αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.610 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq -1$ και $w = \frac{z+i}{\bar{z}+1}$
 α) αν $|w| = 1$, να αποδείξετε ότι $Re(z) = Im(z)$
 β) αν $w \in \mathbb{I}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
 γ) αν $|w| = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

7.611 Για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$|z - 12 - 6i| = |z - 4| \text{ και } 2|w + i|^2 = |w - i|^2 + 17$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w
 β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

7.612 Θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$(w + \bar{w})(3 - 2i) + (w - \bar{w})(5 - i) = 8 + 6i$$

α) Να βρείτε τον αριθμό w
 β) Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z_1 = \left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^{50}$ και τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - z_1| = |z - |z_1||$

ι) Να βρείτε το $Re(z_1)$ και το $Im(z_1)$
 ιι) Να αποδείξετε ότι $Re(z) = Im(z)$
 ιιι) Αν $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$$

7.613 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $w = 2zi$. Αν A, B είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, τότε:

α) αν το σημείο B κινείται στον κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνα 4, να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται επίσης σε κύκλο
 β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

7.614 Η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1 = 1 + i$ και z_2 . Να αποδείξετε ότι:
 α) $\lambda = -6$ και $\mu = 6$
 β) $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{1009}$

7.615 Δίνεται η εξίσωση $2z^2 + 2z + 1 = 0$
 α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση
 β) Αν z_1 η ρίζα της εξίσωσης με $Im(z_1) > 0$, να υπολογίσετε τους αριθμούς z_1^2 και z_1^3
 γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_1^2, z_1^3 είναι ορθογώνιο του οποίου να υπολογίσετε το εμβαδό.

7.616 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{2z - i \cdot \bar{z}}{z - 1}$, με $z \neq 1$. Να αποδείξετε ότι:
 α) $f(1 - i) = 3 + 3i$ β) $(f(1 - i))^{2016} \in \mathbb{R}$
 γ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $f(1 - i), f(1 + i)$ και την αρχή O των αξόνων είναι ορθογώνιο στο O

7.617 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{z-2i}{\bar{z}-2}$

- α) Αν $z = 3 - i$, να υπολογίσετε τον αριθμό w^{100}
 β) Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
 γ) Αν ο w είναι φανταστικός και $Re(z) \neq Im(z)$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$
 δ) Αν $Re(z) = Im(z)$, να βρείτε τον μιγαδικό w

7.618 Έστω ο μιγαδικός $z \neq -i$ και $w = \frac{iz+1}{z+i}$

- α) Αν η εικόνα του w είναι εξωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου, να αποδείξετε ότι $Im(z) < 0$ και $Im(z) \neq -1$
 β) Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 2, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του w
 γ) Αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.619 Δίνεται ο μιγαδικός $z = (2\eta\mu\alpha + 1) + (3 - 2\sigma\upsilon\alpha)i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z οι οποίοι έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από την αρχή των αξόνων
 δ) Να αποδείξετε ότι $3 \leq |z - 4 + i| \leq 7$

7.620 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, με $z \neq -1$

- α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $(f(i))^{90}$
 β) Να αποδείξετε ότι $f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, με $z \neq 0$
 γ) Αν είναι $f(z) = f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$
 δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , για τον οποίο ισχύει $|f(z)| = |f(2i)|$

7.621 Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(z) = \left(2 + \frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}\bar{z}i$$

- α) Να βρείτε τα $Re(f(z))$ και $Im(f(z))$
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $f(z)$
 γ) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| = |x - 2y|\sqrt{5}$
 δ) Αν $|f(z)| = \sqrt{5}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.622 Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και $z \neq -2i$. Αν $w = \frac{z-2}{z+2i}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $Re(w) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 2y}{x^2 + (y+2)^2}$ και

$$Im(w) = \frac{-2x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}$$

- β) Αν ο w είναι πραγματικός, να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο του z

ii) την ελάχιστη τιμή του $|z|$

iii) τον μιγαδικό z με το ελάχιστο μέτρο

γ) Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο του z

ii) την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|z|$

iii) τους μιγαδικούς z_1, z_2 με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο

7.623 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{iz-2+4i}{z-i}$, με $z \neq i$

και θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $u = z - i$ και $w = f(z) - i$.

α) Να αποδείξετε ότι $uw = -3 + 4i$

β) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 = uw$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z , όταν $f(z) \in \mathbb{R}$

7.624 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$Re\left(\frac{z}{z-1}\right) = Im\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

β) Να βρείτε το μιγαδικό z_0 ο οποίος έχει το μέγιστο μέτρο

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$

7.625 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z^2 + 2z + 3$, με $z \in \mathbb{C}$

α) να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x - 2yi) = 2$

β) να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 0$

γ) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $f(z) = \alpha z + \beta$, να έχει ρίζα τον $1 - 2i$

δ) αν z_1 η ρίζα της εξίσωσης $f(z) = 2z + 2$, με $Im(z_1) < 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = z_1^{53} + \frac{1}{z_1}$$

7.626 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $z_1 = \frac{5 + 3\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$

α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού z_1

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = 8$

γ) Να βρείτε τις τιμές των α, β

δ) Αν A, B είναι οι εικόνες των ριζών της αρχικής εξίσωσης και $\Gamma(2,0)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο

7.627 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 3i| = |z + 1 - 2i|$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των

μγαδικών z

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$, των οποίων οι εικόνες απέχουν $\sqrt{10}$ από την εικόνα του $-2i$

γ) Αν $w = \frac{1}{z_1} + \frac{iz_2}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $-\bar{w}, w^2, w^3$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.628 Έστω η εξίσωση $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ και z_0, z_1, z_2 οι ρίζες της με $z_0 \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_0, z_1, z_2

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = z_0^{2014}$

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών z_0, z_1, z_2 είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου του οποίου να υπολογίσετε τις γωνίες

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = z_0$

7.629 Θεωρούμε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση $3(w + \bar{w}) + 2i^{75}(w - \bar{w}) = -26i^{90}$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

β) Να βρείτε τον μιγαδικό w_0 ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο

γ) Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z + i^{10}|^2 + |z - w_0|^2 = 6$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z + 1 - 5i|$

7.630 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{iz - 1}{z + 1}$, με $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$

α) Να αποδείξετε ότι $(f(i))^{12} = -64$

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει:

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

γ) Αν $|f(z)| = 1$ και $|f(w)| = 2$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

7.631 Θεωρούμε την εξίσωση $|2w + 1| - 4w = 1 + 8i$

α) Να βρείτε τη λύση w της παραπάνω εξίσωσης

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$z\bar{z} + 4Re(zw) + 2 = -i^{56} - i^{72}$$

γ) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

7.632 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z(z - 2i)}{|z - 2|}$, με $z \in \mathbb{C} - \{2\}$.

Να βρείτε:

α) το μέτρο του μιγαδικού $f(1 - i)$

β) το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z , όταν:

ι) $f(z) \in \mathbb{R}$ ιι) $|f(z)| = |z|$

7.633 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{2}(z + i \cdot \bar{z})$, με $z \in \mathbb{C}$

α) Αν είναι $f(z) = z$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z

β) Να αποδείξετε ότι $f(f(z)) = f(z)$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(z) - z}{1 - i} = \frac{1}{2}(Im(z) - Re(z))$

7.634 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 + 6z + 10 = 0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς z_1, z_2 , με $Im(z_1) < 0$.

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης

β) Έστω $w \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι $|w - z_1| = |w + z_2 - 6i|$, τότε:

ι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

ιι) να βρείτε τον μιγαδικό w_0 ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο

ιιι) να αποδείξετε ότι $(w_0 - 2)^{2014} \in \mathbb{I}$

7.635 Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$

α) Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\frac{z_2}{z_1}$

β) Να βρείτε τις τιμές των $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{z_2}{z_1}$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|z - \beta z_1| = \gamma$

ι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

ιι) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $\frac{iz_2}{z_1}$ ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο

ιιι) Αν $w = \frac{iz - 4 - 27i}{z - \bar{z}_2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{w + 5i}{w - 5i} \in \mathbb{I}$$

7.636 Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \frac{2 + i \cdot \bar{z}}{1 - \bar{z}}$.

α) Αν $z = 2$, να αποδείξετε ότι $w^{2012} \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{w - 2}{w + i} = \bar{z}$

γ) Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο, να βρείτε τη γραμμή στην οποία βρίσκεται η εικόνα του w

δ) Αν ο w είναι πραγματικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.637 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{5 - 12i - 2iz}{z - 2i}$, με $z \neq 2i$

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(z) = z$ και $f(z) = 5 + 2i$

β) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.638 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει

$$|z - i|^2 + |z + i|^2 = 4 \text{ και έστω } w = (4 + 4i)z$$

- α) Αν A, B, M είναι οι εικόνες των $i, -i$ και z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\widehat{AMB} = 90^\circ$
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
 γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w
 δ) Να αποδείξετε ότι $|z - w| = 5$

7.639 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = (z - i)(\bar{z} + 1)$, με $z \in \mathbb{C}$

- α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $\left(\frac{f(-i)}{f(1)}\right)^{2015}$
 β) Να αποδείξετε ότι $f(-\bar{z}i) = f(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
 γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , αν είναι $Re(f(z)) = Re(z + \bar{z}i)$

7.640 Έστω οι μιγαδικοί z , για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z|^2 + z(1 + i) + \bar{z}(1 - i) + 1 = 0$ (1)

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
 β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{2} + 1$
 γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$

7.641 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και η συνάρτηση $f(z) = \frac{2z - 1}{z^2}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{1}{z}\right) = 2$
 β) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $Re(z) = |z|^2$
 γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z , για τους οποίους είναι $f(z) \in \mathbb{R}$
 δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος δεν είναι σημεία του γεωμετρικού τόπου που βρήκατε στο τρίτο ερώτημα.

7.642 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z - i|z|}{z + i|z|}$

- α) Να βρείτε τις τιμές του $z \in \mathbb{C}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση $f(z)$
 β) Να βρείτε τον αριθμό $[f(-1)]^{2014}$
 γ) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$

7.643 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{i} + z$, με $z \in \mathbb{C}$

- α) Να αποδείξετε ότι $Re[f(z)] = Re(z)[1 - 2Im(z)]$
 β) Αν η εικόνα του μιγαδικού $f(z)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, για την οποία ισχύει $f(i^{3n}) = -1 - i(-1)^n$

7.644 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{z}{1+i} + \frac{\bar{z}}{1-i} = 2 \text{ και } Re(w^2) + (Im(w))^2 = Re(w)$$

- α) Να αποδείξετε ότι $z = 2i$ και $w = 1 + i$
 β) Να αποδείξετε ότι $(w - z)^{30} + w^{30} = 0$
 γ) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο n για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$3\left(\frac{z}{2}\right)^n = 4n - 27$$

- δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $u = \lambda w + (\lambda - 1)z$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

7.645 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 + z_2 = 1$ και $z_1^3 + z_2^3 = -2$

- α) Να βρείτε τους z_1, z_2
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $0, z_1$ και z_2
 γ) Να αποδείξετε ότι $z_1^{100} + z_2^{100} = -1$

7.646 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

$$Re\left(2z + \frac{8}{z}\right) = 4Re(z)$$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
 β) Αν είναι $Re(z) \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = 2z + \frac{8}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-8 \leq w \leq 8$

7.647 Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \lambda z + \lambda = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2

- α) Αν $w = \frac{z_1 + z_2 + i}{1 + z_1 z_2 i}$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|w| = 1$

ιι) να υπολογίσετε τον αριθμό w^{2012}

- β) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha + i$, να βρείτε την τιμή του λ και να λύσετε την εξίσωση αυτή

7.648 Έστω η συνάρτηση $f(z) = -iz - (1 + i)\bar{z}$, με $z \in \mathbb{C}$

- α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(1 - i)$ και $f(2 + i)$
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = f(1 + i)$
 γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z για τον οποίο ισχύει $f(z) = z$
 δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{ι) } f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{f(\bar{z})}{z\bar{z}} \quad \text{ιι) αν } f(z) \in \mathbb{I}, \text{ τότε } z \in \mathbb{I}$$

$$\text{ιιι) αν } f(z) = f(\bar{z}), \text{ τότε } z \in \mathbb{R}$$

7.649 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z + |z + 2 - i| = 6 - 3i \text{ και } zw = 6 - 8i$$

- α) Να αποδείξετε ότι $z = 1 - 3i$
 β) Να υπολογίσετε το μέτρο $|iz - w|$
 γ) Να αποδείξετε ότι $z^{2014} + w^{2014} = 0$
 δ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $u = \frac{\kappa w + z}{w - \kappa z}$, με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $u^{2n} \in \mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

7.650 Έστω ο μιγαδικός $z = \kappa(1 + i) + 1 - i$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
 β) Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία ο z έχει το ελάχιστο μέτρο
 γ) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$z = \frac{\alpha + \beta i}{1 + i}$$

- γ) Αν $|z| = 2\sqrt{2}$ και $\kappa > 0$, να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n ώστε $z^n \in \mathbb{R}$

7.651 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z + \frac{1}{z} = 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|wz_1| + |\overline{w}z_2| = |z_1 - z_2|$$

- α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι $z_1^{2n} = z_2^{2n}$, με $n \in \mathbb{N}$
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w
 γ) Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{w_1 - w_2}{1 + w_1 w_2} \in \mathbb{I}$$

- δ) Να αποδείξετε ότι $4 \leq |w - 3 + 4i| \leq 6$

7.652 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z + 2i}{\overline{z} - 2i}$, με $z \in \mathbb{C} - \{-2i\}$

- α) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| = 1$, με $z \neq -2i$
 β) Αν είναι $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$
 γ) Αν $z_0 = 2i^3 - 2f(i)$, τότε:

- ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w , αν είναι

$$|w + z_0| = \left| \frac{if(z_0)z_0}{1 + i\sqrt{3}} \right|$$

- υ) να βρείτε τους μιγαδικούς w οι οποίοι έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο

7.653 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 1$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\frac{2015 \operatorname{Im}(z)}{|z - 1|^2} + \frac{1}{2} |2015 + 2015\sqrt{3}i| = 0$$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

- β) Να βρείτε τον μιγαδικό z του οποίου η εικόνα απέχει την μικρότερη απόσταση από την εικόνα του μιγαδικού $w = 2 - \frac{1}{2}i$

- γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

7.654 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - 2i| = |z|$

- α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

- β) από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 που έχουν μέτρο 2

- γ) να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -16$

7.655 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $z_1 \neq z_2$ και $z_1 \neq -z_2$. Θεωρούμε τον μιγαδικό

$$w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$$

- α) Να αποδείξετε ότι: $|w| = 1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$

- β) Αν $|z_1| = |z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{I}$ και

$$\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^{2014} < 0$$

7.656 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = (z + i)(\overline{z} + i)$, όπου $z \in \mathbb{C}$

- α) Αν $z_1 = 1 + i$, να βρείτε τους μιγαδικούς $z_2 = f(z_1)$ και $z_3 = f(f(z_1))$

- β) Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

- γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z στις περιπτώσεις: ι) $f(z) \in \mathbb{R}$ υ) $f(z) \in \mathbb{I}$

7.657 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$, με $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $\operatorname{Im}(z) = 1$, να βρείτε το $\operatorname{Re}(z)$

- β) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο

- γ) να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z|$

- δ) αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, με $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

7.658 α) Να γίνουν οι πράξεις $(z + 3 + i)(z - 4 + 2i)$

- β) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - (1 - 3i)z = 14 - 2i$

- γ) Αν z_1, z_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, με $\operatorname{Re}(z_1) > 0$ και A, B, Γ οι εικόνες των z_1, z_2 και $z_3 = 3 + i$ αντίστοιχα, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο

υ) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$, για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$MA^2 + 2MB^2 = 2MG^2 + 30$$

(β') β ομάδα

7.659 Αν η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους μιγαδικούς $z_1 = 3 + 2i$ και z_2 , τότε:

α) να βρείτε τους α, β και z_2

β) να αποδείξετε ότι $z_1^n + z_2^n \in \mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

γ) να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$f(z) = |z - z_1| + |z - z_2|$$

δ) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία η εικόνα του μιγαδικού $xz_1 + yz_2$ βρίσκεται στη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημορίου

7.660 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z| = 1 \text{ και } 4\frac{z}{w} + \frac{w}{z} = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $|w| = 2$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $0, z, w$ είναι ορθογώνιο

γ) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του παραπάνω τριγώνου

7.661 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3z - 2i)^{2014} = (i \cdot \bar{z} - 6)^{2014}$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 2$

β) Αν $u = \left(z - \frac{4}{z}\right)^{2014}$ να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι $|u| \leq 2^{4028}$

δ) Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w , να αποδείξετε ότι $|w_1 - w_2| \leq 8$

7.662 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z - (1 + \lambda i)| = |1 + \lambda i|, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z_1 με το μέγιστο μέτρο και τον μιγαδικό z_2 με το ελάχιστο μέτρο

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $w = \frac{1}{z}$

δ) Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w , να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι $w_1 + w_2 = 2 + i$

7.663 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x + i$ και $w = 1 - xi$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{z}{w} = i \quad \beta) z^{2015} + iw^{2015} = 0$$

γ) αν A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z^{2015} και w^{2015} αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.664 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|z| = |w| = |z - w| = 1$.

Αν $u = \frac{z}{w}$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \bar{u} = \frac{1}{u} \quad \beta) u^3 = -1 \quad \gamma) |z^{2018} + w^{2018}| = 1$$

7.665 Έστω ο μιγαδικός z , ώστε $3z\bar{z}^7 + 2\bar{z}z^7 = 5$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) z\bar{z}^7 = 1 \quad \beta) |z| = 1 \quad \gamma) z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$$

7.666 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z \neq 0$ και έστω η συνάρτηση $f(n) = (i^n - 1)z$, με $n \in \mathbb{N}^*$

α) Να αποδείξετε ότι $f(n)f(n+1)f(n+2)f(n+3) = 0$

β) Αν $f(3) = -1 - 3i$, να βρείτε τον μιγαδικό z

γ) Αν $z = 2 + i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = f(n+1) - f(n)$

7.667 Έστω οι μιγαδικοί $z = \frac{25(\lambda + i)}{4 + 3i}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z_0 με το ελάχιστο μέτρο

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $z + \frac{\mu}{z} \in \mathbb{R}$

7.668 Θεωρούμε την εξίσωση: $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$. Να βρείτε:

α) τις ρίζες z_1, z_2, z_3 της παραπάνω εξίσωσης

β) τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 18$$

7.669 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z και τη συνάρτηση $f(z) = |z| - i \cdot \bar{z}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 2 - i$

β) Αν $|f(|z|)| = \sqrt{2}$, να βρείτε το $|z|$

γ) Αν $|z| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $f(z)$

7.670 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $zw = 1$ και η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $(\epsilon) : 2x + y - 1 = 0$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

γ) Να αποδείξετε ότι $|z| \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$

7.671 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $w = z + \frac{4}{z}$ με $Re(w) = 2Re(z)$.

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
 β) Αν $Re(z) \neq 0$, τότε:
 ι) να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$ και $-4 \leq w \leq 4$

υ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών $u = iz + 4 - 3i$ και την ελάχιστη τιμή του $|u|$

7.672 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(1 + iz)^{2012} = \frac{2 + 3i}{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι εικόνες $M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 β) ο z δεν είναι πραγματικός
 γ) η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$, όπου $|w - 2| = |w - 4|$, είναι 2

7.673 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$.

- α) Να υπολογίσετε την παράσταση $w = \frac{z_1 + z_2 - i}{iz_1 z_2 - 1}$
 β) Αν A, B, P είναι οι εικόνες των z_1, z_2, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές.
 γ) Να αποδείξετε ότι:

$$(z_1^{10} + z_2^{10}) \left(\frac{1}{z_1^{10}} + \frac{1}{z_2^{10}} \right) = 1$$

7.674 Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω \vec{OA} η διανυσματική ακτίνα ενός μιγαδικού $z \neq 0$ και έστω \vec{OB} η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού $w = z\epsilon$, με $\epsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\epsilon^3 = -1$
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο
 γ) Να αποδείξετε ότι $z^3 + w^3 = 0$ και $z^2 + w^2 = zw$
 δ) Αν η εικόνα του z διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο, να αποδείξετε ότι και η εικόνα του w διαγράφει τον ίδιο κύκλο

7.675 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq -i$ και $w = \frac{z-1}{z+i}$. Αν $w \in \mathbb{R}$, τότε:

- α) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
 β) να βρείτε τον μιγαδικό u , αν ισχύει $|z - u| = |z - 2|$

7.676 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z+1}{z}$, με $z \neq 0$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
 β) Αν ισχύει $f(z)f(\bar{z}) = 2$, να βρείτε:
 ι) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
 υ) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|f(z) - 1|$

7.677 Έστω η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους $z_1 = -\frac{2}{i}$ και z_2

- α) Να βρείτε τους α, β και z_2
 β) Να βρείτε το $n \in \mathbb{N}$, ώστε $z_1^n - z_2^n = -16i$
 γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z , για τον οποίο ισχύει

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 \quad (1)$$

- δ) Αν για τον μιγαδικό z , ισχύει η σχέση (1), να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - 3 - 4i|$

7.678 Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 1| = 10 \quad \text{και} \quad \left| z + \frac{1}{3} \right| = 12$$

Αν για τον μιγαδικό w ισχύει $3wz + 6 = 6\bar{z} - w$, να βρείτε:

- α) το μέτρο του μιγαδικού \bar{w}
 β) το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού u για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\left(2u - \frac{3}{2} \right) \left(\bar{u} - \frac{3}{4} \right) = 6w\bar{w}$$

7.679 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , για τους οποίους ισχύει $|z-1| = 1+Re(z)$ και η συνάρτηση $f(z) = z^2 - z$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι η παραβολή $y^2 = 4x$
 β) Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς z , για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = 3|z|$

7.680 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z - |z||^2 + |z + |z||^2 = 4|z| - 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |z| = \frac{1}{2} \quad \beta) \left| \left| z - \frac{1}{4} \right|^2 - \left| z + \frac{1}{4} \right|^2 \right| \leq \frac{1}{2}$$

7.681 Έστω ο μιγαδικός z με $|z - 3 - 6i| = 2|z|$

- α) Να αποδείξετε ότι $|z + 1 + 2i| = 2\sqrt{5}$
 β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 4\sqrt{5}$
 γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , με $|z_1 - z_2| = 4\sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2|^n = 2^n \cdot 5^{\frac{n}{2}}, \quad \text{όπου } n \in \mathbb{N}^*$$

7.682 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = z + i \cdot \bar{z} \quad \text{και} \quad u = \bar{z} + iz$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{ι) } |w|^2 = 2|z|^2 + 2\text{Im}(z^2)$$

$$\text{υ) } |w + u| \leq 4|z|$$

$$\text{ω) } |w - u| \leq 2\sqrt{2}|z|$$

β) Αν $|w| = \sqrt{2}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

7.683 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \sigma\eta\theta + i\eta\mu\theta$, με $\theta \in [0, 2\pi)$ και θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$w = 3z + 10 + \frac{4i}{\bar{z}}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) Να αποδείξετε ότι $5 \leq \text{Re}(w) \leq 15$ και ότι $-5 \leq \text{Im}(w) \leq 5$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

7.684 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z})i = 4(z + \bar{z})$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z|$ και τον μιγαδικό z_1 με το μέγιστο μέτρο

γ) Να προσδιορίσετε τα $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε ο μιγαδικός z_1 να είναι λύση της εξίσωσης $z^2 + 4\beta z + 4\gamma = 0$

δ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w \neq 5i$, για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{\bar{z} - 4 + 3i}{w - 5i}\right)^{2015} = 5^{2015}$$

βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

7.685 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = |z_1 z_2|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)i$ του οποίου η εικόνα βρίσκεται στην ευθεία $y = x$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z_1 \bar{z}_2$ βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

β) Αν $z = 2 + 2i$ και $\text{Im}(z_1 \bar{z}_2) > 0$, τότε:

ι) να βρείτε τους μιγαδικούς $z_1 \bar{z}_2$ και $\bar{z}_1 z_2$

υ) να αποδείξετε ότι $(z_1 \bar{z}_2)^{20} + (\bar{z}_1 z_2)^{20} = -2^{11}$

ω) αν M η εικόνα του z και A, B είναι οι εικόνες των $z_1 \bar{z}_2$ και $\bar{z}_1 z_2$, να αποδείξετε ότι $(MAB) = 1$

7.686 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \left(\frac{4 - 3i}{3 + 4i}\right)^{13} + (2 - i)^2 + 1 + 2i$$

$$\text{και } |z + 3i| + |i \cdot \bar{z} + 3| = \sqrt{2}|1 + i|$$

α) Να αποδείξετε ότι $\text{Re}(w) = 4$ και $\text{Im}(w) = -3$

β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0, -3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

γ) Να βρείτε ποιός από τους μιγαδικούς z έχει το μέγιστο και ποιός το ελάχιστο μέτρο

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

7.687 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z + i \cdot \bar{z}$, με $z \in \mathbb{C}$

α) Αν $z \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 2$

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $f(i), f(1 + i)$ και η αρχή O των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά

γ) Αν $f(z) \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\overline{f(z)}}{f(z)}\right)^{2014} = -1$

δ) Αν ισχύει $f(z) + \overline{f(z)} = 4$, να βρείτε:

ι) τον γεωμετρικό τόπο του z

υ) την ελάχιστη τιμή του $|z|$

7.688 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει:

$$2f(z) + f(1 - z) = 3z^2 - 7z + 14, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - 5z + 6$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = -5z + 9 + 4i$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 5 - 4z$ και να αποδείξετε ότι οι ρίζες της βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(z) > 0$

ε) Να αποδείξετε ότι $f(z)f(\bar{z}) \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

7.689 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{2iz + 9 - 12i}{z - 2i}$, με $z \neq 2i$

και θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1 = z - 2i$ και $w_2 = f(z) - 2i$.

α) Να αποδείξετε ότι $w_1 w_2 = 5 - 12i$

β) Αν $w_1 = w_2$, να βρείτε τους w_1, w_2

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{ι) } f(z) = 2 - 2i \quad \text{υ) } f(z^2) = \frac{8 - 7i}{6 + 5i}$$

δ) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.690 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = |z + 2i|$, με $z \in \mathbb{C}$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{ι) } f(\bar{z}) = |i \cdot \bar{z} - 2| \quad \text{υ) } f(-z) = f(\bar{z})$$

β) Αν ισχύει $f(1+i+z) = f(2+3i+z)$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση

γ) Να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\text{ι) } f(z) = f(\bar{z}) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\text{υ) } f^2(z) + f^2(\bar{z}) = 10 \Leftrightarrow |z| = 1$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$z + f(z - 2i) = f^2(1 - i) + if(i)$$

7.691 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{z-\bar{z}}$, με

$z \in \mathbb{C}$ και $Im(z) \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{I}$

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{z - \bar{z}}{2} + i$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο:

ι) της εικόνας του z

υ) της εικόνας του μιγαδικού $w = 2z^2 + 1$

7.692 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει η σχέση $w + 2 + i = (1 + i)|z|$

α) Αν $z = w$, να βρείτε τον μιγαδικό z

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z αν είναι: ι) $w \in \mathbb{R}$ υ) $w \in \mathbb{I}$

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}|z| \leq |w| + \sqrt{5}$

7.693 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{\sqrt{5}z}{|z|} \text{ και } w^2 = 3 + \lambda i, \text{ με } \lambda > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$

β) Να αποδείξετε ότι $5z - (3 + 4i)\bar{z} = 0$

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - 3 + 4i|$

7.694 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 2i| = |w + 2i| = 2 \text{ και } |z - w| = 4$$

Να αποδείξετε ότι:

α) οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z και w είναι κάθετες μεταξύ τους

β) $|z + w| = 4$ γ) αν $|w| = 1$, τότε $|z + 3w| = 2\sqrt{3}$

7.695 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = -\frac{1}{\bar{z}}$ και M, N οι εικόνες των z, w αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία O, M, N είναι συνευθειακά

β) Να αποδείξετε ότι $\bar{w} + 1 = \frac{z-1}{z}$

γ) Αν $|z - 1| = 1$, να αποδείξετε ότι $|w + 1| = |w|$

δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$

7.696 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z + w = 2 \text{ και } z - 2\bar{w} = -1 - i$$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w

β) Να αποδείξετε ότι $z^{30} + w^{30} = 0$

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού u για τον οποίο ισχύει:

$$|u - z|^2 + |u - w|^2 = 4$$

δ) Θεωρούμε τον αριθμό:

$$v = \left(u - 1 - \frac{1}{u-1}\right)^4$$

Να αποδείξετε ότι: ι) $v \in \mathbb{R}$ υ) $v \leq 16$

7.697 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + 2| = |iz + 2| \text{ και } w = \lambda(-1 + i) + \frac{2 + i}{i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς u με $|4u + 1 + 3i| = \sqrt{10}$

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του u

υ) να βρείτε τους μιγαδικούς v_1, v_2 των οποίων οι εικόνες είναι τα κοινά σημεία των γεωμετρικών τόπων των μιγαδικών w και u

ιι) να αποδείξετε ότι $|v_1|^2 + |v_2|^2 = \frac{5}{2}$

7.698 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$4(Re(z))^2 - z^2 - \bar{z}^2 = 2$$

- α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$
 β) Αν $z \neq i$ και $u \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = \frac{u + iz\bar{u} - z - i}{z - i}$$

είναι φανταστικός

- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών m για τους οποίους ισχύει $m(z - 1) = 3(i - z)$

7.699 Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = 2 + \sqrt{3}\eta\mu\theta - i\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$ και τους μιγαδικούς $w \notin \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $|w| = \lambda w + \bar{w}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z = w$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

δ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - \bar{z}|$

7.700 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(2z - 3i)^5 - (z - 3i)^5 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $|z - i| = 1$ ιι) αν $z \neq i$, τότε $\left(z - i - \frac{1}{z - i}\right)^5 \in \mathbb{I}$

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{14}$

7.701 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z + 2i}{z - 2}$, με $z \neq 2$

α) Να βρείτε τον αριθμό $(f(2 - 2i))^{2016}$

β) Αν ο αριθμός $f(z)$ είναι φανταστικός, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκεται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

ιι) να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$

ιιι) να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = z - 1 + i + \frac{2}{z - 1 + i}$$

είναι πραγματικός, με $-2\sqrt{2} \leq w \leq 2\sqrt{2}$

7.702 Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\beta - 3\alpha = 25$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w με $w = \alpha + \frac{\beta}{4}i$ και $|iz - 3i - 4| = 5$.

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z και w

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει το μέγιστο μέτρο

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

δ) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z - 3| \leq 9$

7.703 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z + \lambda^2 + 3 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματικές ρίζες

β) Αν M, N οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης αυτής και είναι $(OMN) = \sqrt{3}$, τότε:

ι) να βρείτε την τιμή του λ και τις ρίζες z_1, z_2

ιι) να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

ιιι) να αποδείξετε ότι $z_1^{2013} + z_2^{2013} = -2^{2014}$

7.704 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2\alpha z + 2\alpha^2 = 0$, με $\alpha > 0$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι $z_1 = iz_2$

β) Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $z_1^{4n+2} + z_2^{4n+2} = 0$

γ) Αν $z_1^4 = -4$, να βρείτε την τιμή του α

δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των ριζών z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.705 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{3Re(z) + 4Im(z)}{z}$, με $z \in \mathbb{C}^*$

α) Αν $|f(z)| = 3$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z

β) Αν $Re(z) = \lambda Im(z)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

ι) $|f(z)| = \frac{|3\lambda + 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$ ιι) $|f(z)| \leq 5$

7.706 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta}$, με $\theta \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $z = -i$

β) Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες είναι:

$$(1 - z)^n = (1 + z)^n$$

γ) Να αποδείξετε ότι $1 + z + z^2 + \dots + z^{99} = 0$

7.707 Η εξίσωση $z^2 + \kappa z - \lambda = 0$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει ρίζες τους μιγαδικούς z_1 και $z_2 = 1 + \frac{2}{i^{2013}}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda < 0$

β) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ

γ) Να αποδείξετε ότι $Im(z_1^{2015} + z_2^{2015}) = 0$ και $Re(z_1^{2015} - z_2^{2015}) = 0$

δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|w - z_1| + |w - z_2|$, με $w \in \mathbb{C}$

ε) Αν $(1 + iu)^n = \frac{z_1}{z_2}$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $u \notin \mathbb{R}$

7.708 Έστω ο μιγαδικός $z = \frac{1}{2 + \alpha i}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z + \bar{z} = 4z\bar{z}$
 β) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$
 γ) οι εικόνες των μιγαδικών z και $w = \frac{\alpha}{2\alpha - 4i}$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C)
 δ) οι εικόνες των μιγαδικών

$$\frac{1}{2 + i}, \frac{1}{2 - 4i} \text{ και } \frac{1}{2 + 2010i}$$

είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

7.709 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \eta\mu\theta + i\sigma\nu\theta$ και $z_2 = \sigma\nu\theta - i\eta\mu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1 = iz_2$ και $|z_1| = |z_2|$
 β) αν $w = \frac{z_1}{z_2}$, τότε:
 ι) $1 + w^{101} + w^{102} + w^{103} = 0$
 ιι) $(1 + w)^{100} = (1 - w)^{100}$
 γ) το τρίγωνο με κορυφές την αρχή των αξόνων και τις εικόνες των z_1, z_2 είναι ορθογώνιο
 δ) $4 \leq |z_1 - 3 - 4i| \leq 6$
 ε) οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^3 + w^2 = 0$ είναι κορυφές ισοπλευρού τριγώνου
 ζ) αν z_3 μια μη πραγματική ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, τότε $z_3^{90} = 1$ και $z_3 + \frac{1}{z_3} = -1$

7.710 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z - 2 - i| = 1$ και $|w + 1 + i| = 2$. Να βρείτε:

- α) την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w
 β) την μέγιστη τιμή του $|z + 2w|$
 γ) την ελάχιστη τιμή του $|z - 1 + 2i|$

7.711 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z - w| = |z|$ και $|w| = 1$

- α) Να αποδείξετε ότι $Re(z\bar{w}) = \frac{1}{2}$
 β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία είναι $w = (1 - 2\lambda i)z$
 γ) Για $\lambda = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:
 ι) $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 ιι) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

7.712 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $w \neq 0$ και $|z + w| = |z - w|$. Να αποδείξετε ότι:

- α) ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός

β) αν $z \neq w$, τότε $\left| \frac{iz}{z - w} \right| + \left| \frac{\bar{w}}{z + w} \right| \geq 1$

γ) αν $w = 1 + i$, τότε η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y = -x$

7.713 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| = |w| = \sqrt{2}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\bar{z} = \frac{2}{z}$
 β) Να αποδείξετε ότι $|z + w + zw - 2| = |z + w - zw + 2|$
 γ) Να αποδείξετε ότι:

$$z + w + zw - 2 = 0 \Leftrightarrow z + w - zw + 2 = 0$$

δ) Αν $z + w = 2$, να βρείτε τους z, w

7.714 Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{z}{w} + \frac{w}{z} = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $z^3 + w^3 = 0$ β) $|z| = |w|$
 γ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων, είναι ισόπλευρο
 δ) $\left(\frac{z}{w}\right)^{20} + \left(\frac{w}{z}\right)^{20} = -1$

7.715 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|zi - 12| = |3\bar{z} - 4i| \text{ και } w = \frac{z - 8}{z - 2}$$

- α) Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών z και w
 β) Να αποδείξετε ότι $\frac{w^2 + 4}{w} \in \mathbb{R}$
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|w - 3 + 4i|$

7.716 Δίνεται η συνάρτηση $f(n) = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$

- α) Να αποδείξετε ότι $|f(n)| \leq \sqrt{2}$
 β) Να βρείτε τις τιμές του n ώστε να είναι $f(n) = 0$

7.717 Έστω η συνάρτηση $f(z) = |z + i|$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $f(z) = 2f(-z)$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z
 β) Να αποδείξετε ότι $|3z - 5i| = 4$
 γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο
 δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $w = z - 3$

7.718 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 2i$ και $f(z) = \frac{z^3 + 8i}{z - 2i}$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 + 2iz - 4$

β) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $f(1+i)$

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $f(z) = |z|^2 + 2iz - 4$ υ) $f(z) = 2iz + \bar{z} - 6$

δ) Αν $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $f(z)$ είναι σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 7$

7.719 Έστω η συνάρτηση $f(n) = i^n z$, με $n \in \mathbb{N}$ και $z \in \mathbb{C}$
α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(4n) + f(4n+1) + f(4n+2) + f(4n+3) = 0$$

β) Αν η εικόνα του μιγαδικού $f(8) - f(3)$ ανήκει σε κύκλο κέντρου $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho = 4$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

γ) Αν $z = 1 + i\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τους μιγαδικούς $0, z, f(4n+3)$ είναι ορθογώνιο, του οποίου να υπολογίσετε το εμβαδό

7.720 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2\cos t \cdot z + 5 - 4\eta\mu t = 0$, με $t \in [0, \pi]$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των z_1, z_2

γ) Να βρείτε τις μέγιστες τιμές των παραστάσεων $|z_1 - z_2|$ και $|z_1 + z_2|$

7.721 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, w ώστε:

$$|z_1| = |z_2| = 2, z_1^2 + z_2^2 \neq 0 \text{ και } w = \frac{2z_1z_2}{z_1^2 + z_2^2}$$

α) Να αποδείξετε ότι: ι) $w \in \mathbb{R}$ υ) $\left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2$

β) Αν $w = 2$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων είναι ισόπλευρο

7.722 Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 0$, για τον οποίο ισχύει η σχέση $z^3 + |z| = 0$ (1)

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού z

β) Να λύσετε την εξίσωση (1)

γ) Αν z_1, z_2 οι μη πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_1^{2013} + z_2^{2013}$

7.723 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $|z| = 1$ και $w = \bar{z}^2 + iz$

α) Να εκφράσετε το $|w|$ ως συνάρτηση του $\text{Im}(z)$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $u = w - iz$

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z ώστε το $|w|$ να είναι μέγιστο

7.724 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1 + z_2 + z_3 = 1 \text{ και } z_1z_2z_3 = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1, \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2$ και $\frac{1}{z_3} = \bar{z}_3$

υ) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$ και $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$

7.725 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z - 2 - 3i|^2 + |i \cdot \bar{z} - 3 - 6i|^2 = 16$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

β) Να βρείτε το μέτρο $|(4 - 3i)z - 25|$

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z

δ) Θεωρούμε έναν μιγαδικό z_0 που ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση και έστω w_1, w_2 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$w^2 + 2(|z_0| - 5)w + 9 = 0$$

ι) Να αποδείξετε ότι $w_1, w_2 \notin \mathbb{R}$

υ) Να βρείτε τα μέτρα των w_1, w_2

ιι) Να αποδείξετε ότι $\frac{w_1 - 3i}{w_1 + 3i} \in \mathbb{I}$

7.726 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $z \neq 1$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(z) = \frac{2 + i \cdot \bar{z}}{1 - \bar{z}}$$

α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $f(2)$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = (f(2))^{2014}$ είναι πραγματικός

γ) Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{f(z) - 2}{f(z) + i} \right| = |z|$

δ) Αν $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα M του μιγαδικού $f(z)$, ανήκει σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

7.727 Έστω ο μιγαδικός $z \neq i$ και θεωρούμε τον μιγαδικό

$$f(z) = \frac{iz - 1}{z - i}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(f(z)) = z$

β) Αν $f(z) = f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$

γ) Αν $|f(z)| = 2$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

δ) Αν $|f(z_1)| = |f(z_2)| = 2$, να αποδείξετε ότι είναι $|z_1 - z_2| \leq \frac{8}{3}$

7.728 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z + 8| = 2|2z + 1|$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 2$

β) Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού $2z + 1$

γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1), με $z_1 \neq -z_2$, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \frac{z_1^v + z_2^v}{(z_1 + z_2)^v}$ είναι πραγματικός

7.729 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > \beta > 0$ και η εξίσωση $\alpha z^2 + 2\beta z + \alpha = 0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς z_1 και z_2 .

- α) Να βρείτε τους z_1 και z_2
 β) Να βρείτε τα μέτρα των z_1 και z_2
 γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ είναι φανταστικός
 δ) Αν για τον μιγαδικό u ισχύει $(u - z_1)^v = (u - z_2)^v$, με $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$

7.730 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - i| = |2iz - 1| \text{ και } \left| 1 + \frac{1+i}{w} \right| = 1$$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_1) του z
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_2) του w
 γ) Αν M, N είναι τα κοινά σημεία των (C_1) και (C_2), να αποδείξετε ότι $|\vec{OM}|^2 + |\vec{ON}|^2 = 4$

7.731 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z-3i}{z+1}$, με $z \neq -1$

- α) Αν z_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(z) = 2 - 2i$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = (z_0^{2016} + i)^{4032}$
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z , αν είναι:

$$|f(z)| = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^{300}$$

- γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $|f(z) - 1| \cdot |z + 1|$
 δ) Αν η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\sqrt{10}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $f(z)$

7.732 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^3 - i}{z + i}$, με $z \neq -i$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - iz - 1$
 β) Αν η εξίσωση $f(z) = (2\alpha - i)z - \beta - 21$ έχει ρίζα τον αριθμό $3 + 4i$, να βρείτε:
 ι) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 ιι) τη μέγιστη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, με $n < 100$, για την οποία είναι $(\alpha + \beta i)^n = (-5 + 3i)^n$

7.733 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|2w + 1| - 4\bar{w} = 1 + 8i \text{ και } z = w(\lambda - i), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε τον μιγαδικό w
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$
 δ) Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, με $z_1 \neq z_2$ και $|z_1| = |z_2|$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα $z_1 + z_2$ είναι σταθερό

7.734 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 0$ και $w = z + \frac{\kappa}{z}$,

με $\kappa \in \mathbb{R}$. Αν ο μιγαδικός $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $w = \lambda$, (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

- α) να βρείτε τις τιμές των κ, λ και να λύσετε την εξίσωση (1)
 β) να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ρίζες της εξίσωσης $z^3 + 8 = 0$
 γ) να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο ισχύει $(iz_1)^{3n} = i(z_1)^{3n}$
 δ) αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z

7.735 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^3 - i}{z + i}$, με $z \neq -i$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - iz - 1$
 β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(z) = (\alpha - i)z + \beta i^{2018}$ έχει ρίζα τον αριθμό $3 + 4i$
 γ) Αν ο αριθμός $w = \frac{iz + 1}{z + i}$ είναι πραγματικός, τότε:
 ι) να υπολογίσετε το $|z|$
 ιι) να αποδείξετε ότι $|f(z)| \leq 3$
 ιιι) να αποδείξετε ότι $\left| \frac{f(iz)}{f(i \cdot \bar{z})} \right| = 1$

7.736 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z + 7i}{z - 1}$, με $z \neq 1$

- α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(-3 - 3i)$ και $(f(-3 - 3i))^{2011}$
 β) Να λύσετε την εξίσωση $w - |w - 13 + 3i| = 11 + i$
 γ) Αν ισχύει $Re(f(z)) = Im(f(z))$, να βρείτε:
 ι) τον γεωμετρικό τόπο του z
 ιι) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w_0|$, όπου w_0 είναι η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β)

7.737 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - az + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1 = 2 + i$ και z_2 .

- α) Να βρείτε τις τιμές των α, β
 β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2014} + z_2^{2014} \in \mathbb{R}$
 γ) Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{17+i}{5}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
 δ) Αν $|w - z_1| = |\bar{w} - z_1|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$
 ε) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w , για τον οποίο ισχύει $|w - z_2| + |\bar{w} - z_2| = 10$

7.738 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z(t) = \frac{1}{1+2ti}$, με $t \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $z(t) + z(t) = 2z(t) \cdot z(t)$

β) οι εικόνες των μιγαδικών $z(t)$ ανήκουν σε κύκλο (C) , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

γ) αν είναι $t \neq 0$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών $z(t)$ και $z\left(-\frac{1}{4t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του παραπάνω κύκλου (C)

7.739 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z(\alpha) = \frac{\alpha}{1+ai}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(\alpha)$ βρίσκονται σε κύκλο (C) με κέντρο το σημείο $K\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς $z(\alpha)$ που έχουν το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(\alpha)$ και $z\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του παραπάνω κύκλου (C)

δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(-1), z(1)$ και $z(2012)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου

7.740 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq i$ και $w = \frac{z+i}{z-i}$. Αν $w \in \mathbb{I}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

β) Έστω z_1, z_2, z_3 τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς z . Να αποδείξετε ότι:

ι) $|z_1 + 2z_2 + 3z_3| = |3z_1z_2 + z_2z_3 + 2z_3z_1|$

ιι) αν $\frac{|z_1 - z_2|}{2} = |z_3 - z_1| = 1$, τότε $|z_2 - z_3| = \sqrt{3}$

7.741 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$5(7z+1)^{13} - (3+4i)(z+7)^{13} = 0 \text{ και } w = \frac{i}{5}\left(\frac{4}{z} - z\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και $5iw$

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w βρίσκονται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{5} \leq |w| \leq 1$

7.742 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z + \lambda^2 + 3 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι δεν έχει πραγματικές ρίζες

β) Αν για τις εικόνες M, N των ριζών της είναι $(OMN) = \sqrt{3}$, τότε:

ι) να βρείτε το λ και τις ρίζες z_1, z_2

ιι) να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

ιιι) να αποδείξετε ότι $z_1^{2013} + z_2^{2013} = -2^{2014}$

7.743 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - az + 9 = 0$, με $a \in \mathbb{R}$ η οποία έχει ρίζες $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $-6 < a < 6$ ιι) $(z_1^{17} + z_2^{17}) \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τα μέτρα των z_1, z_2

γ) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2$

δ) Αν $a = 0$ και $Im(z_1) > 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|w - z_1| = 4 + |w - z_2|$$

7.744 Οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $z \neq 0$ και $w = \frac{1}{z}$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται σε δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους

β) Να αποδείξετε ότι $z^4 < 0$

γ) Αν είναι $\left|\frac{z^2-1}{z}\right| = \sqrt{2}$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

ιι) να αποδείξετε ότι $Im\left(\frac{(z+i)^5}{z^5+i}\right) = 0$

ιιι) να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $u = \frac{3}{z} - \frac{4}{\bar{z}i}$

7.745 Έστω z_1, z_2, z_3 οι ρίζες της εξίσωσης:

$$z^3 + (1-\lambda)z^2 + (1-\lambda)z - \lambda = 0, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Αν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι σημεία συνευθειακά, να αποδείξετε ότι:

α) $\lambda = -\frac{1}{2}$ β) αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $(z_1^n + z_2^n + z_3^n) \in \mathbb{R}$

7.746 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|w| = 2 \text{ και } z = w + \frac{4i}{w}$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

β) Αν z_1, z_2, z_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς z , με $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

ι) $\frac{\bar{z}_1}{8} = \frac{1}{z_1}, \frac{\bar{z}_2}{8} = \frac{1}{z_2}$ και $\frac{\bar{z}_3}{8} = \frac{1}{z_3}$

ιι) $(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \leq 4$

$$\text{iii)} \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{iv)} \frac{z_1 - z_2}{z_3} + \frac{z_2 - z_3}{z_1} + \frac{z_3 - z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$$

7.747 Έστω $z \in \mathbb{C} - \{\pm i\}$ και $w = \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 + 1}$. Αν ο w

είναι φανταστικός, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $w = \frac{z - i}{z + i}$

β) να αποδείξετε ότι $|z| = 1$

γ) αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$v = \frac{(z_1 + z_2)^7}{z_1^7 + z_2^7}$$

είναι πραγματικός

δ) να βρείτε τον μιγαδικό w και την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι:

$$\frac{w}{i} + w^{11} = \alpha + i$$

7.748 Θεωρούμε το τριώνυμο $f(z) = az^2 + \beta z + \alpha - 3$, με $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό $-\frac{i}{2}$. Επίσης θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$w = \frac{f(z)}{2iz - 1}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $w = -2iz - 1$

γ) Αν $|z - 2| = 1$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

ii) να αποδείξετε ότι $2 \leq |z - w| \leq 8$

(γ) γ ομάδα

7.749 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = x + xi$, με $x \in \mathbb{R}^*$.

α) Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και $x \in \mathbb{R}^* - \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ να αποδείξετε

ότι:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \dots + z^{4n}}{iz^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \dots + i^{4n-3} z^{4n-2}} = \text{Im}(z^2)$$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν την παραπάνω μορφή και είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$z^3 - z^2 + \bar{z} + i = 0$$

γ) Αν z_1, z_2 οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

ι) $z_1^4 = z_2^4 = -1$

ii) $\frac{z_1^2 + z_1}{z_2} + \frac{z_2^2 + z_2}{z_1} = -2$

iii) $z_1^{2014} + z_2^{2014} = -2i$

7.750 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\bar{z} + 2i|$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 = 1$
β) Για κάθε $w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|w + 3z| + |2w + 5z| \geq \frac{1}{2}$$

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \leq |z - 1| + |z^2 + 1| \leq 4$

δ) Αν $u, v \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $z_0 \in \mathbb{C}$ με εικόνα στον κύκλο (C) ώστε να είναι $|z_0^2 + uz_0 + v| \geq 1$

7.751 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 3 - 3i| = 2 \left| \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right|$$

$$\text{και } 2|\bar{w} - 3 + 3i| = |iz + 3 - 3i|$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\text{Re}(z)$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w

γ) Να αποδείξετε ότι:

ι) $1 \leq |z - w| \leq 3$

ii) $6\sqrt{2} - 3 \leq |z + w| \leq 6\sqrt{2} + 3$

δ) Έστω z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z και θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$u = (z_1 - z_2) \left(\frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right)$$

Να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$ και $0 \leq u \leq 4$

7.752 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|iz + 8| = 2|2iz + 1|$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z και ισχύει $|z_1 + xz_2| > \sqrt{3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| < 2$

γ) Έστω $\alpha \in (-1, 1)$ και $w \in \mathbb{C}$ ώστε να είναι:

$$w^4 + 2aw^3 + 8aw + 16 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η εικόνα του w

ι) ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του πρώτου ερωτήματος

υ) δεν ανήκει στους άξονες $x'x$ και $y'y$

7.753 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$, με $z \in \mathbb{C}^*$

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $(f(-i))^{2015}$

β) Αν η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $f(z)$ βρίσκεται στον ίδιο κύκλο

γ) Να αποδείξετε ότι $|f(z) - f(\bar{z})| \leq \frac{2}{|z|}$

δ) Αν είναι $|f(z) - z| = 3|z|$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

7.754 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z|^6 + |z| \cdot (z\bar{z} - 4) \geq 64$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| \geq 2$

β) αν $|z| = 2$, τότε $|z^2 + z - 4| \leq 2\sqrt{17}$

γ) αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς, με $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$, τότε $\frac{z_1}{z_2} = \pm i$

7.755 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|w| = 1 \text{ και } z = \frac{1 + 2w}{w - 2}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{5}{3}$$

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , με $z_1 \neq z_2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$u = \frac{3z_1 + 3z_2 + 8}{3z_1 - 3z_2}$$

είναι φανταστικός

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $\frac{1}{z}$

δ) Να αποδείξετε ότι $|12z^2 + 7z - 12| = 25|z|$

7.756 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z - 2i + 4\frac{|z - 2i|}{\bar{z} + 2i} = \frac{5}{\bar{z} + 2i} \text{ και } |iw - 2 - 2i| = |i \cdot \bar{w}|$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού \bar{z}

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των μέτρων $|z - w|$ και $|\bar{z} - \bar{w}|$

δ) Να βρείτε τους μιγαδικούς u και v που βρίσκονται συγχρόνως στους γεωμετρικούς τόπους των w και \bar{z} και να αποδείξετε ότι $|u|^2 + |v|^2 = 10$

7.757 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|w - 1|^2 + \frac{1}{|w - 1|^2} \leq 2 \text{ και } z^2 w = 1$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών w και z^2

β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε υπερβολή της οποίας να βρείτε τις εστίες E και E'

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν μιγαδικοί w_0 και z_0^2 ώστε να είναι $2|z_0^2 - w_0| = 1$

δ) Να αποδείξετε ότι $|z^2 - w| > 0$

ε) Να βρείτε, αν υπάρχει, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z^2 - w|$

7.758 Έστω οι μιγαδικοί w_1, w_2 με $|w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ και $\operatorname{Re}(\bar{w}_1 w_2) > 0$ και έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - |w_1 - w_2|z + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$

β) $|z_1| = |z_2| = 1$

γ) $(z_1 - z_2)^2 = |w_1 - w_2|^2 - 4$

7.759 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$|z|^2 + 1 = |z^2 - 9|$$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται στην υπερβολή:

$$(C) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$

γ) Να βρείτε την έλλειψη:

$$(C_1) : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^* \text{ και } \alpha > \beta$$

η οποία τέμνει κάθετα την υπερβολή (C)

7.760 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w \neq 0$, ώστε να είναι:

$$iz^2 < 0 \text{ και } w + 2 = i(z + 2)$$

Αν A, B είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο
- β) η μεσοκάθετος του τμήματος AB διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε

7.761 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 40| = |z - 30i| \text{ και } |w - 3 - 4i| = 1$$

- α) Να αποδείξετε ότι $|z| \neq |w|$
- β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z + w|$
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z| - |w|$
- δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $u = 6 + 8i - z$

7.762 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 1| = |z - i| \text{ και } w = \frac{i - 1}{z - i}$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόπων των μιγαδικών z και w
- β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|w^2 - 2i| = 2$
- γ) Αν n είναι θετικός ακέραιος ώστε να είναι $|z| - 1 + i^n = (146 - 3n^2)i$, να αποδείξετε ότι $z^{n-3} \in \mathbb{R}$

7.763 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει:

$$2014^{|z|} \cdot z + 2014^{|w|} \cdot w = 2014^{|z+w|} \cdot (z + w)$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z| = |w| = |z + w|$ ή $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$
- β) αν A, B, Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών $z, w, z + w$ αντίστοιχα με O, A, B μη συνευθειακά, τότε είναι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OI}$

7.764 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $w^2 - 2|z|w + 2|z|^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $w \notin \mathbb{R}$ β) $|w|^2 = 2|z|^2$ γ) $w^2 + \bar{w}^2 = 0$
- δ) $w^{2n} + \bar{w}^{2n} = 0$, με n περιττός θετικός ακέραιος

7.765 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z-i}{z}$, με $z \in \mathbb{C}^*$

α) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$

ii) αν $z^n = 1$, με $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $z = \pm i$

β) Αν $f(z) \cdot \overline{f(z)} = 5$, να βρείτε:

ι) τον γεωμετρικό τόπο του z

ii) την ελάχιστη τιμή του $|f(z) - 1|$

γ) να λύσετε την εξίσωση $z^2 + 4f^2(z) = 0$

7.766 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\frac{z}{4} = \frac{-2}{z} + 1$

α) Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2

β) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2012} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2014} = 0$

γ) Αν $w \in \mathbb{C}$ με $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = 16$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w και να αποδείξετε ότι $|w - 2| = 2$

ii) αν w_1, w_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w με $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 4$

iii) αν w_1, w_2, w_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς w , να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{w_1 + w_2 + w_3 - 6}{4} \right| = \left| \frac{1}{w_1 - 2} + \frac{1}{w_2 - 2} + \frac{1}{w_3 - 2} \right|$$

7.767 Ο μιγαδικός z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο K(-2,1) και ακτίνα $\rho = 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $w = 4z + 8$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $i \cdot \bar{z} - 1 + 2i$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

γ) Να αποδείξετε ότι $0 \leq |w| \leq 8$

δ) Να αποδείξετε ότι $w - \bar{w} = \frac{|w|^2}{4} \cdot i$

ε) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|3w^2 - 16|$

7.768 Έστω οι μιγαδικοί z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{1 + zi^{2015}}{1 + zi^{2013}} \in \mathbb{I}, (3 + 4i)^{20}(2wi - 1)^{10} = (2 - i)^{40}(\bar{w} - 2i)^{10}$$

$$\text{και επίσης } 5\bar{z}^7 \cdot u^3 + 3z^7 \cdot \bar{u}^3 = 8$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = |w| = |u| = 1$

$$\beta) \frac{(z + iw)^5}{z^5 + iw^5} \in \mathbb{R}$$

γ) οι εικόνες των μιγαδικών

$$z, w, u, \frac{zw + wu + uz}{z + w + u}$$

είναι ομοκυκλικά σημεία

$$\delta) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u}\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z+w+u}\right) \geq 0$$

7.769 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $(z-4+2i)(\bar{z}-4-6i) \in \mathbb{I}$ και θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο είναι:

$$w-2z = -4 \cdot i^{2018} - \frac{(1+i)^{32}}{(8i)^5}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $w = 2z + 4 + 2i$
 β) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z και w
 γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$
 δ) Αν A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z και w και u ο μιγαδικός με εικόνα το μέσο του AB , να αποδείξετε ότι $1 \leq |u-8+5i| \leq 3$

7.770 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-2|^2 + z(2+3i) + \bar{z}(2-3i) + 1 = 0$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq 5$
 γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \frac{8}{z-3i} - \bar{z}$
 ι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w
 ιι) Να αποδείξετε ότι $(z-w)^2 \leq 0$
 ιιι) Να αποδείξετε ότι $z = w \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 3$
 ιιιι) Αν A, B είναι οι εικόνες των z, w με $z \neq w$, να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι κάθετο στον άξονα $x'x$
 ν) Αν u είναι μιγαδικός αριθμός, με εικόνα στο τμήμα AB , να αποδείξετε ότι:

$$|u-z| \cdot |u-w| + |u-3i|^2 = 4$$

7.771 Θεωρούμε τους μιγαδικούς u_1, u_2 για τους οποίους είναι $u_1 + u_2 = 3 + 9i$ και εικόνες στις ευθείες $y = -x + 7$ και $y = 5$ αντίστοιχα. Έστω ακόμα οι μιγαδικοί z_1, z_2 και w ώστε $z_1^5 = u_1, z_2^5 = u_2$ και $w = \frac{u_1}{u_2}$

- α) Να βρείτε τους μιγαδικούς u_1 και u_2
 β) Να αποδείξετε ότι ο w δεν είναι πραγματικός ούτε φανταστικός
 γ) Να αποδείξετε ότι $w^2 \notin \mathbb{R}$
 δ) Αν ο w^2 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + \alpha = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

7.772 α) Έστω οι μιγαδικοί z, w με εικόνες τα σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά αν και μόνο

αν $z\bar{w} \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους οι εικόνες των μιγαδικών

$$z-i, \frac{1}{\bar{z}-2}$$

και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

γ) Αν z_0 είναι φανταστικός αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό n ώστε να είναι $z_0^n = 5n - 31$

δ) Αν $u \in \mathbb{C}$ με $|u| = 1$, τότε για τους μιγαδικούς z του ερωτήματος (β), να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|u-2z|$

7.773 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z + \frac{1}{z} = -1$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση $\operatorname{Re}(w^2) = w\bar{w} - 8\operatorname{Re}(w)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = 1$

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w βρίσκονται στην παραβολή $y^2 = 4x$

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 και η εστία της παραπάνω παραβολής σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο

δ) Αν για τους μιγαδικούς u ισχύει

$$2|u + z_1 z_2| + z_1^{11} + z_2^{11} = 0$$

να αποδείξετε ότι $2|w-u| \geq 1$

7.774 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z των οποίων οι εικόνες είναι σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς

$$w = \frac{2z+i}{iz-2}$$

- α) Να αποδείξετε ότι: ι) $|w| = 1$ ιι) $|z+w| \leq 1$
 β) Αν $w \notin \mathbb{R}$, να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $w + \frac{\alpha}{w} \in \mathbb{R}$
 γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 1$
 δ) Να αποδείξετε ότι $|w+4| + |3iw-1| \geq 5$

7.775 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{z-2}{z-2i}, \text{ με } z \neq 2i \text{ και } |2u-3-3i| = \sqrt{2}$$

α) αν $w = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$w^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

- β) αν $w^2 \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
 γ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του u
 δ) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $z = u$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

7.776 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z + 2i| = 1 + 2\operatorname{Im}(z)$$

- α) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) να αποδείξετε ότι $|z + 2i| - |z - 2i| = 2$
 γ) να αποδείξετε ότι $|z^2 + 4| = 2 + |z|^2$ και στη συνέχεια να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = z^2 + 2$
 δ) αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| \geq 1$

7.777 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύουν $z^n = 3 + 4i$ και $z_0^{n+1} = 2 + 11i$, με $n \in \mathbb{N}^*$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ο μιγαδικός

$$w = \frac{z^n}{z - z_0 + 2}$$

είναι φανταστικός

- α) Να βρείτε τους z_0 και n
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
 γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς $u = w - z - i$
 ι) αν $z \notin \mathbb{I}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του u
 ιι) αν u_1, u_2, u_3 είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς u , να αποδείξετε ότι:

$$u_1 + u_2 + 3u_3 \neq 0 \text{ και } \left| \frac{3 + 4i}{u_1 + u_2 + 3u_3} \right| \geq 1$$

7.778 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$2z + |z + 1 + 2i| = 1 + 2i \text{ και } w + \frac{z^{10}}{32}u = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $z = -1 + i$
 β) οι εικόνες των w, u ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων
 γ) $|w - u| = \sqrt{2}|w|$
 δ) οι εικόνες των w, u και η αρχή των αξόνων είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου

7.779 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(3z - 2)^5 - (2z - 3)^5 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z| = 1$
 β) ο αριθμός $w = \frac{(z - i)^9}{z^9 - i}$ είναι πραγματικός
 γ) $|3z - 1| = |z - 3|$
 δ) $|3z - 1| + |2z^2 - z + 6| \geq 1$
 ε) οι εικόνες των μιγαδικών $u = z - \frac{4}{z}$ ανήκουν σε έλλειψη και επίσης $3 \leq |u| \leq 5$

7.780 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{z - 2i}{|z - 2i|} = \frac{\sqrt{3}}{\bar{z} + 2i} \text{ και } w = \frac{5(\lambda - i)}{3 - 4i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$$u = z - 2i + \frac{3}{z - 2i}$$

βρίσκονται σε ευθύγραμμο τμήμα του άξονα $x'x$

- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και την ελάχιστη τιμή του $|w|$
 δ) Να αποδείξετε ότι $5|z - w| \geq 11 - 5\sqrt{3}$

7.781 Θεωρούμε την εξίσωση $z^3 + \alpha z^2 + 2\beta = 0$, η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $z_0 = 1 + i$ και τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\operatorname{Re}(w) \neq 1 \text{ και } |w^2 + \alpha w + \beta|w|^2| = |i \cdot \bar{w}|$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$
 β) Να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$
 γ) Αν $u = \frac{w - 7}{w + 7}$, να αποδείξετε ότι:

- ι) $|u| = 1$ ιι) αν $v = \frac{u^2 + iu - 1}{u^2 - iu - 1}$, τότε $v \in \mathbb{R}$
 ιιι) $|u^2 + u - 1| \leq \sqrt{5}$

7.782 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z = \frac{2\lambda}{\lambda - i}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } w = z - 1$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι $2|z|^2 - 3|z| - 2 \leq 0$
 γ) Έστω w_1, w_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς w και θεωρούμε τον αριθμό:

$$u = \frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1}$$

Να αποδείξετε ότι: ι) $u \in \mathbb{R}$ ιι) $u = 2\operatorname{Re}(w_1 \bar{w}_2)$

- δ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = 2$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$

7.783 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z με $|z - i| = 1 + \text{Im}(z)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(w) = \frac{w^2 + 1}{w + i}, \text{ με } w \in \mathbb{C} - \{-i\} \text{ και } |f(w)| = 1$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w
 β) Να βρείτε τον μιγαδικό z_0 για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_0 - i| = 1 + \text{Im}(z_0) \text{ και } |iz_0 + 1| = 1$$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς u για τους οποίους ισχύει η σχέση $(1 + i)u + (1 - i)\bar{u} = 4$

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του u

ii) να αποδείξετε ότι $|z - u| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

7.784 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - \alpha z + 2 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζα τους μιγαδικούς $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τα μέτρα των z_1, z_2 και τις δυνατές τιμές του α
 β) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2$$

γ) Αν $\alpha = 0$, τότε:

ι) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|w - z_1| - |w - z_2| = 2, \text{ με } \text{Im}(z_1) < 0$$

ii) να αποδείξετε ότι $|w - 1| \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$

iii) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w^2

7.785 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(2z - i)^7 - (iz + 2)^7 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z| = 1$
 β) οι εικόνες των μιγαδικών $w = 2z - 1$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$
 γ) αν $u = \left(z - \frac{1}{z}\right)^{15}$, τότε $u \in \mathbb{I}$ με $|\text{Im}(u)| \leq 2^{15}$
 δ) $|z^2 - 2z + 3| = |3z^2 - 2z + 1|$
 ε) $|2z - 1| + |z^2 - 2z + 3| \geq 3$

7.786 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z| = 1, |w| = 3 \text{ και } |z + w| = 4$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z - w| = 2$

β) Να αποδείξετε ότι $(z + w + 1) \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{9}{w} + 1\right) \leq 25$

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει η σχέση $2\text{Re}(u^2) = |z - w|$

δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών u^2 βρίσκονται στην ευθεία $x = 1$

7.787 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|iz + 2| = |z + 4| \text{ και } |4iw + 1| - 1 = 4\text{Im}(w)$$

α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - 3 - 4i|$ καθώς και τον μιγαδικό z για τον οποίο προκύπτει η ελάχιστη τιμή

γ) Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7.788 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και επιπλέον είναι $|a| = |b| = |c| = \rho > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = \left(1 - \frac{a}{c}\right)\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{c}{b}\right)$$

είναι φανταστικός

β) Να αποδείξετε ότι $|ab + bc + ca| = \rho|a + b + c|$

γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = \lambda b + (1 - \lambda)c$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

ι) οι εικόνες των b, c, z είναι σημεία συνευθειακά

ii) η ελάχιστη τιμή του $|z - a|$ είναι $\frac{1}{2\rho}|a - b| \cdot |a - c|$

7.789 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $z^2 + w^2 = \alpha zw$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$ ή $z\bar{w} \in \mathbb{R}$

β) αν οι εικόνες A, B των z, w και η αρχή των αξόνων δεν είναι συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε ότι:

ι) $-2 < \alpha < 2$

ii) το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές

iii) αν $\widehat{AOB} = 45^\circ$, τότε $\alpha = \sqrt{2}$

7.790 Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και ο πραγματικός αριθμός ρ , με $0 < \rho \neq 1$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - \rho^2 i| = \rho |z - i| \text{ και } z(w - 2i) = 2\rho^2 + wi$$

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος (C_1) με ακτίνα ρ
 β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο (C_2) ο οποίος είναι ομόκεντρος του (C_1), του οποίου να βρείτε την ακτίνα ως συνάρτηση του ρ
 γ) Να αποδείξετε ότι $2|z + w + \rho^2 i| = |w + 4z - zw|$
 δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{2z - w}{2z + w} \in \mathbb{I}$
 ε) Αν A, B οι εικόνες δύο μιγαδικών που ανήκουν στον κύκλο (C_1) και M η εικόνα ενός μιγαδικού w που ανήκει στον κύκλο (C_2), να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq \frac{MA}{MB} \leq 3$

7.791 Ο μιγαδικός z ικανοποιεί τη σχέση $2z^4 + \bar{z} = \bar{z}^4 + 2z$.

- α) Να αποδείξετε ότι: ι) $z^4 + \bar{z}^4 = z + \bar{z}$ υ) $z^4 = z$
 β) Να λύσετε την εξίσωση $2z^4 + \bar{z} = \bar{z}^4 + 2z$
 γ) Αν z_1, z_2, z_3 οι μη μηδενικές λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2, z_3 έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων

7.792 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{2013} \cdot z^6 \right| = 64$$

- α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 2$
 β) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, να αποδείξετε ότι:
 ι) $\frac{z_1 + z_2 i}{4 - z_1 z_2 i} \in \mathbb{I}$ υ) $(z_1 + z_2) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \leq 4$
 γ) Αν $w \in \mathbb{C}$, ώστε $2w = z - 6 + 8i$, να αποδείξετε ότι:

ι) η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

$$\text{υ) } \operatorname{Re}(w) \cdot \operatorname{Im}(w) < 0$$

δ) Αν $u \in \mathbb{C}$, ώστε $z^2 = 3 + 2iuz$, να αποδείξετε ότι:

ι) η εικόνα του u βρίσκεται σε έλλειψη, με εστίες τα σημεία $E(\sqrt{3}, 0)$ και $E'(-\sqrt{3}, 0)$

$$\text{υ) } \frac{1}{4} \leq |u| \leq \frac{7}{4}$$

7.793 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $2z - i \cdot \bar{z} = 3$

α) Να βρείτε τον μιγαδικό z

β) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1} \right)^{2016} = 1$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς w για τους οποίους ισχύει

$$|w + \bar{z}| = \left| \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i \right) z \right|$$

ι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του w

υ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{5} \leq |w| \leq 3\sqrt{5}$

ιι) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο φανταστικοί αριθμοί w_1, w_2 των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο

7.794 Έστω ο μιγαδικός z με $|z - 2i| = |2zi + 1|$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) ο αριθμός $\frac{z^5 + 1}{z^5 - 1}$ είναι φανταστικός

γ) $-1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1$

δ) $\left| z - \frac{1}{z} + 2i \right| + \left| z - \frac{1}{z} - 2i \right| = 4$

ε) αν $w \in \mathbb{C}$, με $z\bar{w} \neq -1$, τότε $\left| \frac{z+w}{1+z\bar{w}} \right| = 1$

7.795 Δίνεται ο μιγαδικός w και θεωρούμε την εξίσωση $|z|^2 + 2\operatorname{Im}(w\bar{z}) + 4 = 0$, η οποία έχει μοναδική λύση ως προς z , τον αριθμό z_0

α) Να βρείτε τη λύση z_0 και το $|w|$

β) Να αποδείξετε ότι $z_0^{2014} + w^{2014} = 0$

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει $|u + 2i| - |u - 2i| = |z_0|$ και τον μιγαδικό u που έχει το ελάχιστο μέτρο

7.796 Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z + |z||^2 + |z - |z||^2 + 2z^2 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $z \in \mathbb{I}$

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο επιπλέον ισχύει η σχέση:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^9 = 1 - i$$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει:

$$w - wi = \frac{i}{z} - z$$

δ) Για τους μιγαδικούς w του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι $x^2 + |w| \geq 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

7.797 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ και } a + b + c = 1$$

α) Αν $z = (a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a})$, να αποδείξετε ότι:

ι) $z \in \mathbb{R}$ υ) $(iz + 2013i^3)^2 \leq 0$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \leq 2$ υ) $|a + b| + |b + c| + |c + a| \geq 2$

ιι) $|a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2 = 4$

7.798 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z - 3| = |z + 2i|$ και $|w + 3| = |w - 2i|$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w βρίσκονται σε δύο παράλληλες ευθείες

β) Να βρείτε τις ελάχιστες τιμές των παραστάσεων:

ι) $|z - w|$ υ) $|z + w|$ ιι) $|z - w + i|$

7.799 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z + w = 4 + 6i$ και $|z - w| = 6$.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι εικόνες των z, w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho = 3$

β) οι εικόνες των z, w είναι αντιδιαμετρικά σημεία

γ) $|z + w| = 2\sqrt{13}$ και $Re(z\bar{w}) > 0$

δ) $|z|^2 + |w|^2 = 44$

7.800 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$(z - 4 - 3i)^{2014} = \frac{5|z| - 10i}{2 + |z|i}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) $|z - i\sqrt{3}z| + |Re(\bar{z}) + iIm(z)| \leq 30$

γ) $|z|^2 + |z - 8 - 6i|^2 = 100$

δ) αν $|w - 4 + 4i| = 2$, τότε υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί z, w ώστε $|z - w| = 14$

7.801 Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + (\Delta + 2)x + 2\Delta + 10 = 0$, η οποία έχει μη πραγματικές ρίζες και διακρίνουσα Δ .

Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ ώστε $\frac{z}{w}$ ρίζα της αρχικής εξίσωσης

με $Im\left(\frac{z}{w}\right) > 0$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right)^{2016} = \frac{1}{z^{2016}}$

ιι) $1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \dots + \frac{z^{19}}{w^{19}} = -1025i$

β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς u για τους οποίους είναι:

$$\left| u - \frac{z}{w} \right| = \frac{1}{2} \left| u - 4\frac{z}{w} \right| \quad (1)$$

ι) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του u

υ) Αν u_1, u_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) και $v = |u_1 + 2u_2| + |2u_1 + u_2|i$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του v βρίσκεται σε ημιευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και την εικόνα του $\frac{z}{w}$

7.802 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z| = |w| = \rho > 0 \text{ και } |z^2 + zw + w^2| = \rho^2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $\frac{z}{w} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε $z^{2014} + w^{2014} \in \mathbb{R}$

β) αν $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$, τότε $z^{2013} + w^{2013} = 0$

γ) αν $\frac{z}{w} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε $|z^{2013} + w^{2013}| = \rho^{2013} \sqrt{2}$

7.803 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\bar{z}(z + 2) = -|1 - i|^2 z - 3 \text{ και } w = 2z - i$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και \bar{z}

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - \bar{z}|$

γ) Αν $|z - \bar{z}| = 2$ και $Im(z) > 0$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)^{2013}$$

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο $A(0,1)$

7.804 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε $zw + \bar{z}\bar{w} = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{\bar{z}}{w}\right)^{2014} < 0$

β) οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών \bar{z}, w τέμνονται κάθετα

γ) $|z + \bar{w}| = |\bar{z} - w|$

δ) αν επιπλέον είναι $\frac{\bar{z}}{w} + \frac{\bar{w}}{z} = 2i$, να βρείτε:

ι) την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $\frac{\bar{z}}{w}$ από το σημείο $A(1,0)$

ιι) τον μιγαδικό $\left(\frac{\bar{z}}{w}\right)^{2016}$

- 7.805** Έστω οι μιγαδικοί z και $w = z^2 + |z|$
- Αν $|w| > 2$, να αποδείξετε ότι $|z| > 1$
 - Να λύσετε την εξίσωση $w = 2$
 - Αν $|z| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w

- 7.806** Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύουν:

$$|z^2 - 9z + 20| = |z - 1| \text{ και } |z - 4| = \lambda > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

- $z + \bar{z} = \frac{|z|^2 + 16 - \lambda^2}{4}$
 - $(1 - \lambda^2)|z|^2 + (5\lambda^2 - 1)(z + \bar{z}) = 25\lambda^2 - 1$
 - $|z| \geq 2$
- 7.807** Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|w| = 2$ και $z = \frac{4-w}{w-1}$
- Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z
 - Να αποδείξετε ότι:
 - $|w^2 - 4| \leq 4|w - 1|$
 - $|w^4 + 8(2 - w^2)| + 32\operatorname{Re}(w) \leq 80$
 - Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w

- 7.808** Έστω οι μιγαδικοί z, w με $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{2|z| - 6i}{\sqrt{3} + i} \text{ και } |z - w| = 3$$

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w και την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνιο
- Να αποδείξετε ότι $z\bar{w} + \bar{z}w > 0$
- Αν είναι $z\bar{w} + \bar{z}w = 6$, να αποδείξετε ότι:
 - $|w| = 2|z|$
 - η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 4$

- 7.809** Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, με $\frac{z_1}{z_2} = w$ και $w + \frac{1}{w} = \sqrt{2}$ και

$$\operatorname{Im}(w) > 0.$$

- Να βρείτε τον μιγαδικό w
- Να βρείτε τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z_1^{2n} = z_2^{2n}$
- Να αποδείξετε ότι $w^{95} + w^{94} + \dots + w + 1 = 0$
- Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 βρίσκεται στην ευθεία $y = 2x + 1$, να βρείτε την ευθεία στην οποία βρίσκεται η εικόνα του z_1
- Αν A, B είναι οι εικόνες των z_1, z_2 , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές του οποίου να υπολογίσετε τις γωνίες

- 7.810** Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα, για τους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + 2z_2 = 3z_3 \text{ και } |z_1| = |z_2| = 1 \text{ και } |z_3| = \sqrt{2}$$

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0 \quad \text{ii) } \widehat{AOB} = 90^\circ$$

- Να υπολογίσετε τα $\operatorname{Re}(z_2\bar{z}_3)$ και $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_3)$
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά
- Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $A\Gamma$ και $B\Gamma$

- 7.811** Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2 + 4}{|z - 2i|}$, με $z \neq 2i$

- Να υπολογίσετε το $\operatorname{Im}[f(1 + i)]$
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι $|f(z)| = |z + 2i|$
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει

$$|f(z - 5i)| + |f(z + i)| = 10 \quad (1)$$

- Για τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση (1), να βρείτε τους μιγαδικούς με το μέγιστο μέτρο
- Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση (1), να αποδείξετε ότι $8 \leq |z_1 - z_2| \leq 10$

- 7.812** Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 0$ για τους οποίους οι εικόνες A, B των z και $\frac{1}{z}$ και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα την AB

- Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
- Να αποδείξετε ότι $z^2 \in \mathbb{I}$
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = 3z^2 + 2$
- Αν επιπλέον για τους μιγαδικούς z ισχύει

$$\left| z - \frac{1}{z} \right| = \sqrt{2}$$

να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους σχηματίζουν τετράγωνο

- 7.813** Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0, w = \frac{1}{z}$ και $u = z^2$. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των z και w είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε:

- να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
- να αποδείξετε ότι $u \in \mathbb{R}$
- αν είναι $\left| z - \frac{1}{z} \right| = \sqrt{2}$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού u

- 7.814** Έστω z ένας μη πραγματικός και μη φανταστικός αριθμός και έστω A, B, Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών $z, \bar{z}, \frac{z^2}{z}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε

ότι:

- α) τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά
- β) το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές

7.815 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(z) = |z - i| + |z + i| + |z - 1| + |z + 1|, \text{ με } z \in \mathbb{C}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f(-z) = f(z)$ και $f(iz) = f(z)$

ιι) $4 \leq f(z) \leq 4(|z| + 1)$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z για τον οποίο ισχύει $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

7.816 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{z+\bar{z}}$, με

$z \in \mathbb{C}$ και $Re(z) \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$ ιι) $f\left(-\frac{1}{iz}\right) \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$Re\left[f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right] = Im\left[f\left(\frac{i}{z}\right)\right] + 2Re(z)$$

7.817 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \alpha z + \beta = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $|\alpha| = |\beta| = 1$, τότε $|z_1| \leq 1$ και $|z_2| \leq 1$

β) αν $|z_1| = |z_2|$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$

γ) αν $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$ και $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$, τότε $|z_1| = |z_2|$

7.818 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{i}{|z-2| - |z-1|}$

α) Να βρείτε για ποιές τιμές του z ορίζεται η συνάρτηση $f(z)$

β) Να αποδείξετε ότι $|f(z)| \geq 1$

γ) Αν $f(z) = i$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|z-1| + Re(z) = 1$

ιι) να βρείτε τις τιμές του $Re(z)$

ιιι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z

7.819 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $|z_1| = |z_2| = 1$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2|z_1 - z_2|x + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί x_1, x_2 δεν είναι πραγματικοί

β) ισχύει ότι $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$

γ) ισχύει ότι $|x_1 - x_2|^2 + 4|z_1 - z_2|^2 = 8$

δ) ο μιγαδικός $w = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ είναι πραγματικός και να βρείτε τη μικρότερη τιμή του

7.820 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|^2(4 + 3i) + 5iz^2 = 0 \text{ και } |w|^2(4 + 3i) + 5iw^2 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z+w|^2(4+3i) + 5i(z+w)^2 = 0$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού αριθμού $u = \frac{1}{z} + 1$, με $z \neq 0$

7.821 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$Re\left(z + \frac{4}{z}\right) = 2Re(z) \quad (1)$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

β) Αν $Re(z) \neq 0$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = z + \frac{4}{z}$ είναι πραγματικός, με $-4 \leq w \leq 4$

ιι) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού $u = z + 3 + 4i$

ιιι) να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του u

γ) Αν z_1, z_2, z_3 είναι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$$

7.822 Δίνεται η εξίσωση $z = 2\left(\sqrt{2} - \frac{2}{z}\right)$

α) Να βρείτε:

ι) τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης

ιι) τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ώστε $z_1^n + z_2^n = 0$

ιιι) τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{1}{x+yi} + (-i)^{2015} = i^{-16} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$$

β) Έστω $w \in \mathbb{C}$, ώστε $|w - z_1^2| = |w - z_2^4|$. Να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο του w

ιι) το μιγαδικό w_0 που έχει το ελάχιστο μέτρο

ιιι) την ελάχιστη τιμή του $|w + 7 - i|$

7.823 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $1 + 2|z|^2 = |z^2 + 1|^2 + 2|z + 1|^2$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) ο z δεν είναι πραγματικός

ιι) $(z + \bar{z} + 1)^2 + (z\bar{z} - 1)^2 = 0$

ιιι) $z^2 + z + 1 = 0$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = z^{2012} + z^{2014} + 2013$$

7.824 Έστω z_1, z_2, \dots, z_8 οι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$z^8 + z^4 i - 1 = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_8)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, \dots, z_8 είναι σημεία του ίδιου κύκλου (C)

β) $\left(z_1 + z_2 + \cdots + z_8 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_8} \right) \in \mathbb{R}$

γ) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_8| = \left| \frac{i}{z_1} + \frac{i}{z_2} + \cdots + \frac{i}{z_8} \right|$

δ) $\left| \frac{z_1^2 + i}{z_1} + \frac{z_2^2 + i}{z_2} + \cdots + \frac{z_8^2 + i}{z_8} \right| \leq 2|z_1 + z_2 + \cdots + z_8|$

ε) Αν M_1, M_2, \dots, M_8 οι εικόνες των z_1, z_2, \dots, z_8 αντίστοιχα και M τυχαίο σημείο του κύκλου (C), να αποδείξετε ότι:

$$(MM_1)(MM_2) \cdots (MM_8) \leq 3$$

7.825 Έστω A, M, N οι εικόνες των μιγαδικών i, z, iz αντίστοιχα. Αν τα σημεία A, M, N είναι συνευθειακά, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OMN είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $i - z = \lambda i(z - 1)$

γ) να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \frac{i - z}{1 - z}$ είναι φανταστικός

δ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου M , ώστε τα σημεία A, M, N να είναι συνευθειακά

7.826 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z| = 1$ και $w = 2z + 1$.

α) Να βρείτε τη γραμμή (C) πάνω στην οποία ανήκουν οι εικόνες του w

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο $N(-1, 0)$ και οι εικόνες των z, w είναι σημεία συνευθειακά

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

ε) Αν οι μιγαδικοί w_1, w_2 βρίσκονται στη γραμμή (C) και είναι $|w_1 - w_2| = 4$, να βρείτε το $|w_1 + w_2|$

7.827 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $|z - 2| = 1$ και $|w - i| = 4$. Να βρείτε:

α) τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w

β) τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z + w|$

γ) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|2z - 3w - 4 + 3i|$

7.828 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 2 + \lambda + i\sqrt{3 - \lambda^2}$, με $-\sqrt{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3}$

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του μιγαδικού $\frac{z + 1}{z - 1}$ είναι ανεξάρτητο του λ

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z

γ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς z , έστω z_1 αυτός που έχει μέτρο $\sqrt{3}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$w + |w + 2 - i| + 3i = |z_1 + 1|^2$$

7.829 Έστω οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$.

α) Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός

β) Αν $w \notin \mathbb{I}$ και είναι $w = \bar{z}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C) του z

γ) Αν $z_1, z_2 \in (C)$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2 - 2i| \leq 2\sqrt{2}$

ii) αν $z_1 - z_2 = 2(1 + i)$, να βρείτε τους z_1, z_2

7.830 Έστω ο μιγαδικός $z \neq i$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}$

α) Αν $Im(f(z)) = 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

β) Αν $u = z - i$ και $w = f(z) - i$, να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού uw

γ) Αν η εικόνα του z είναι σε κύκλο με κέντρο $K(0, 1)$ και ακτίνα $\rho > 0$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $f(z)$ είναι σε κύκλο με το ίδιο κέντρο. Πότε οι δύο κύκλοι συμπίπτουν;

7.831 Ο μιγαδικός w βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(-2, 1)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Θεωρούμε τον μιγαδικό $z = 4w + 8$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο $|\bar{w}i - 1 + 2i|$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

γ) Να αποδείξετε ότι: ι) $0 \leq |z| \leq 8$ ii) $z - \bar{z} = \frac{|z|^2}{4}i$

7.832 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $w - 2z = -4i^{2014} - \frac{(1 + i)^{32}}{(8i)^5}$.

Αν ο αριθμός $(z - 4 + 2i)(\bar{z} - 4 - 6i)$ είναι φανταστικός, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $w = 2z + 4 + 2i$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και w

γ) Αν u είναι το μέσο των εικόνων των z, w να αποδείξετε ότι $1 \leq |u - 8 + 5i| \leq 3$

7.833 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και ο φανταστικός αριθμός w για τους οποίους ισχύει $5z = (3 + 4w)|z|$.

- α) Να αποδείξετε ότι $w = \pm i$
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z

7.834 Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$z^{100} + z^{99} + z^{98} + \dots + z + 1 = 0$$

Να αποδείξετε ότι: α) $z^{101} = 1$ β) $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$

7.835 Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση $(\bar{z})^{2010} z^{2013} = 1$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$ και $\bar{z} = z^2$
 β) Να λύσετε την εξίσωση (1)
 γ) Έστω ο μιγαδικός z_0 , με $Im(z_0) > 0$, που είναι λύση της εξίσωσης (1) και έστω ο μιγαδικός

$$w = \frac{\lambda + z_0}{\lambda - z_0}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- ι) το $|w|$ ως συνάρτηση του λ
 ιι) το λ , ώστε ο w να έχει το μέγιστο μέτρο

7.836 Έστω ο μιγαδικός $z = 6 + \sigma \nu \nu(\pi t) + [8 + \eta \mu(\pi t)]i$, με $t \geq 0$

- α) Να βρείτε το $|z - 6 - 8i|$
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
 γ) Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση της εικόνας του z από την αρχή των αξόνων
 δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \geq 0$, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων
 ε) Για $t = 0$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο αριθμός $w = z + 1 + \frac{\lambda}{z + 1}$ να είναι πραγματικός

7.837 Δίνονται οι μιγαδικοί α, β, γ οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση $\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- α) ο αριθμός $w = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ είναι πραγματικός
 β) οι εικόνες των α, β, γ είναι σημεία συνευθειακά

7.838 Έστω ο μιγαδικός $z = \lambda(1 + i) + 1 - i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z
 β) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε ο μιγαδικός z να έχει το ελάχιστο μέτρο
 γ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ως συνάρτηση του λ , ώστε να ισχύει $z = \frac{\alpha + \beta i}{1 + i}$
 δ) Αν $|z| = 2\sqrt{2}$ και $\lambda > 0$, να βρείτε τον μικρότερο θετικό ακέραιο αριθμό ν , ώστε ο μιγαδικός z^ν να είναι πραγματικός

7.839 Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^\nu = 3 + 4i \text{ και } z^{\nu+1} = 2 + 11i$$

Να βρείτε:

- α) τους ν και z
 β) τις τιμές του $\mu \in \mathbb{N}^*$, ώστε να είναι $z^\mu = (-1 + 2i)^\mu$

7.840 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = |w| = 2$ και $z^2 + w^2 \neq 0$.

Θεωρούμε τον μιγαδικό $u = \frac{2zw}{z^2 + w^2}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) ο u είναι πραγματικός β) $|u| \geq 1$
 γ) αν $u = 2$, τότε το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $0, z, w$ είναι ισόπλευρο

7.841 Έστω ο μιγαδικός z ώστε $3z^7 + 7\bar{z}^7 = 10$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z^7 = \bar{z}^7 = 1$ β) οι εικόνες του z είναι ομοκυκλικά σημεία
 γ) αν $z \neq 1$, τότε ο αριθμός $w = \frac{1 - z}{1 + z}$ είναι φανταστικός

7.842 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z + i\sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2}Im(z)$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \geq 1$
 γ) Να αποδείξετε ότι $|z + i\sqrt{2}| - |z - i\sqrt{2}| = 2$
 δ) Να αποδείξετε ότι $|z^2 + 2| = |z|^2$
 ε) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z^2 βρίσκονται στην ευθεία $x = -1$

7.843 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|^2 + z\bar{w} = 1 \text{ και } |w|^2 + \bar{z}w = 3$$

- α) Να αποδείξετε ότι $|z + w| = 2$
 β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w βρίσκονται σε κύκλους με κέντρα την αρχή των αξόνων
 γ) Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w
 δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά

7.844 Η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1 = 3 + 2i$ και z_2

- α) Να βρείτε τις τιμές των α, β
 β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = z_1^\nu + z_2^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι πραγματικός
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $f(u) = |u - z_1| + |u - z_2|$, με $u \in \mathbb{C}$
 δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\kappa, \lambda)$, αν η εικόνα του μιγαδικού $\kappa z_1 + \lambda z_2$ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$

7.845 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και ο ακέραιος $n > 1$, ώστε $z_1^n = 2 + i$ και $z_2^n = 1 + 2i$. Αν $w = \frac{z_1}{z_2}$, να αποδείξετε ότι:

- α) ο w δεν είναι πραγματικός β) $\frac{w+1}{w-1} \in \mathbb{I}$
 γ) $|z-w| + |z+w| \geq 2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

7.846 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς $Re(f(z))$ και $Im(f(z))$ ως συνάρτηση των x και y .
 β) Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $f(z)$ είναι η ευθεία $y = \sqrt{3}x + 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z .
 γ) Αν M, N, P είναι αντίστοιχα οι εικόνες των $z, f(z)$ και i , να βρείτε:

- ι) τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(z) - i = (\alpha + \beta i)(z - i)$
 ιι) το λόγο $\frac{PN}{PM}$

7.847 Έστω $z, w \neq 0$ μιγαδικοί, ώστε $|z+w| = |z-w|$ και A, B είναι αντίστοιχα οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{AOB} = 90^\circ$ β) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2$
 γ) ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός

7.848 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, με $|w|(z - \bar{z}) + (w\bar{w} - 12)(z + \bar{z})i = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) ο z δεν είναι φανταστικός αριθμός
 β) η εικόνα M του z κινείται σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$
 γ) αν η εικόνα M του z κινείται στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι η εικόνα N του w κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνα 3.

7.849 Δίνεται η εξίσωση $z\bar{z} + 4Re[(1 - 2i)z] + 4 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι έχει άπειρες λύσεις
 β) Αν z_1, z_2 είναι δύο λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 8$
 γ) Αν t_1, t_2 είναι οι τιμές των μιγαδικών για τις οποίες η παράσταση $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστη, να αποδείξετε ότι:

$$|t_1 + t_2|^{2n} + |10(t_1 - t_2)|^n = 2^{4n+1}5^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

7.850 Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 2z + 2 = 0$ και A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, z_1 + z_2$ αντίστοιχα, τότε:

- α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
 β) να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_1 - z_2|$$

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$

7.851 Έστω $\phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ και A, B αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών:

$$z_1 = \sigma \nu \nu \phi + i \eta \mu \phi \text{ και } z_2 = -\sigma \nu \nu \phi + i \eta \mu \phi$$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2
 β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \leq |z_1 - z_2| \leq 2$
 γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό w για τον οποίο ισχύουν:

$$|w| \leq 1 \text{ και } |w - z_1| = |w - z_2|$$

- ι) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w
 ιι) Να αποδείξετε ότι $w^{2016} \leq 1$
 ιιι) Αν τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι:

$$|nz_1 + z_2| + |z_1 + nz_2| = 2n - 2, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

7.852 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1^3 + z_2^3 = 0$ β) $|z_1| = |z_2|$ γ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των $0, z_1, z_2$ είναι ισόπλευρο.

7.853 Έστω οι μιγαδικοί z, w , με $Im(z) > 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z|w| + w|z| = 40 \text{ και } zw = 25$$

- α) Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των z, w
 β) Να βρείτε τον μιγαδικό $u = z - i$ ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μιγαδικοί z, w ώστε ο αριθμός $z^n - w^n$, με $n \in \mathbb{N}^*$, να είναι φανταστικός.

7.854 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ώστε $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1^{10} + z_2^{10} = 0$ β) $z_1^{2n} + z_2^{2n} = 0$, όπου $n \in \mathbb{N}$ με n περιττός γ) $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}|z_2|$

7.855 Αν $z \notin \mathbb{R}$ και $z^3 = 1$, να αποδείξετε ότι:

- α) ο αριθμός $z - \frac{1}{z}$ είναι φανταστικός β) $|z + 1| = 1$
 γ) $(iz)^{2010} + (1 + \frac{z}{z^2})^{2009} - (iz)^{2008} = 0$

7.856 Αν z_1, z_2, z_3 ώστε $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ και $|z_3| = 4$, να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$
 β) $8|z_1 + z_2 + z_3| = |16z_1z_2 + z_2z_3 + 4z_3z_1|$
 γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό

$$z_0 = \frac{16z_1z_2 + z_2z_3 + 4z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$$

και τους μιγαδικούς w για τους οποίους ισχύει η σχέση $|(3 + 4i)w + 4 - 3i| = |z_0| - 3$. Να βρείτε:

- ι) τον γεωμετρικό τόπο του w
- υ) την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης $|iw - 2 + 3i|$

7.857 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = \sqrt{2}, z_2 \neq 3i$ και $(z_3 + 2)^8 = 16(z_3 + 1)^8$. Αν ο αριθμός $w = \frac{z_2 + 3i}{z_2 - 3i}$ είναι φανταστικός, τότε:

- α) Να βρείτε τα μέτρα των z_2 και z_3
- β) Να αποδείξετε ότι:
 - ι) $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$
 - ιι) $6|z_1 + z_2 + z_3| = |2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 9z_3z_1|$

7.858 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ώστε να είναι:

$$z_1^2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2^3 = 26 + \sqrt{53}i \quad \text{και} \quad z_3^4 = 3 + \sqrt{7}i$$

- α) Να βρείτε τα μέτρα τους
- β) Να αποδείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$
- γ) Να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 9z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 6$$

7.859 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, ώστε $|z| = \bar{z} + \lambda z$

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$
- β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - i|$
- δ) Να αποδείξετε ότι $z^3 \in \mathbb{R}$

7.860 Έστω $z \in \mathbb{C}^*$, ώστε $z + \frac{1}{z} = -1$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z \neq 1$
- β) $z^3 = 1$
- γ) $|z + 1| = |z| = 1$
- δ) $z^{50} + \frac{1}{z^{50}} = z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$

7.861 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση $z + \frac{\kappa^2}{z} = \kappa$, όπου $\kappa > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z| = 2\operatorname{Re}(z) = \kappa$
- β) $z^2 + |z|\bar{z} = 0$
- γ) $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{2013} = 1$

7.862 Έστω οι μιγαδικοί x, y, z με $|x| = |y| = |z| = \rho > 0$ και $x + y = z$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $x \neq y$ και $x \neq z$
- β) $x^2 + xy + y^2 = 0$ και $x^3 = y^3$
- γ) ο αριθμός $\frac{x}{y}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $w^2 + w + 1 = 0$, την οποία να λύσετε
- δ) $x^{2012} + y^{2012} + z^{2012} = 0$

7.863 Έστω οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = z^2 + |z|^2$. Αν A, B είναι εικόνες των z, w αντίστοιχα, τότε:

- α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{OA}, \vec{OB} συναρτήσει των α, β
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά
- γ) Αν το σημείο A κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου B
- δ) Αν το σημείο B κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου A

7.864 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, ώστε $z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1 \neq z_2$ και $z_1^3 - z_2^3 = 0$
- β) $|z_1| = |z_2| = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{3}} = |z_1 + z_2|$
- γ) η γωνία των διανυσματικών ακτίνων των z_1, z_2 ισούται με 120°

7.865 Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(z^3 - 1) - i\sqrt{3}(z^2 + z + 1) = 0 \quad (1)$$

- α) Να λύσετε την εξίσωση (1)
- β) Αν z_1, z_2, z_3 οι ρίζες της εξίσωσης (1) και A, B, Γ είναι οι εικόνες τους αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου αυτού

7.866 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \alpha z + 1 = 0$, με $\alpha \in (-2, 2)$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $u = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$, ισούται με $\alpha^2 - 2$
- β) Αν w είναι μιγαδικός με $w \neq -2i$, ώστε να ισχύει η σχέση

$$z_1(w + 2i)^2 + z_2(\bar{w} - 2i) = 0$$

να αποδείξετε ότι: ι) $|w + 2i| = 1$ υ) $|w - i| \leq 1 + \alpha^2$

7.867 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι $\bar{z}w = i$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 - ι) αν ισχύει $|w + 1| = |w|$, τότε $|z - i| = 1$
 - ιι) αν ισχύει $|w - i| = \sqrt{2}$, τότε $|z - 1| = \sqrt{2}|z|$
- β) Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι C_1 και C_2 των εικόνων M των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύουν αντίστοιχα οι σχέσεις $|z - i| = 1$ και $|z - 1| = \sqrt{2}|z|$
- γ) Αν οι εικόνες M_1 και M_2 των μιγαδικών z_1 και z_2 κινούνται στους C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$

7.868 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \alpha z + 9 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα $|z_1|$ και $|z_2|$
 β) Αν ισχύει $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2$ να βρείτε την τιμή του α
 γ) Για $\alpha = 0$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 10$$

7.869 Έστω $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$, οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \alpha = z$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha > 0$ β) Αν $|z_1| = 1$, τότε:

- ι) να βρείτε το α
 ιι) να βρείτε τους z_1 και z_2
 ιιι) να λύσετε την εξίσωση $(z - z_1)^2 + (z - z_2)^2 = 0$

7.870 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \lambda(2 - i)$ και $z_2 = \frac{1}{z_1}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την εικόνα M του μιγαδικού που αντιστοιχεί στο μέσο του τμήματος με άκρα τους τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M , ανήκει στην υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{5x^2}{4} - 5y^2 = 1$$

7.871 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \text{ και } |z_1 + z_2 + z_3| = \rho^2$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ β) $\rho = 2$
 γ) $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 8$

7.872 Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z και τη συνάρτηση $f(z) = |z| + iz$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $f(|z|) = (1 + i)|z|$ και $|f(|z|)| = \sqrt{2}|z|$
 β) αν ισχύει $|f(|z|)| = 2\sqrt{2}$, τότε $|z| = 2$
 γ) αν $z, w \in \mathbb{C}$, τότε $|f(z) - f(w)| \leq 2|z - w|$

7.873 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1^2 + z_2^2 = 2(z_1 - 3)(z_2 + 3) - 7 \text{ και } \operatorname{Im}(z_1 - z_2) > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

- ι) $(z_1 - z_2)^2 - 6(z_1 - z_2) + 25 = 0$
 ιι) $z_1 - z_2 = 3 + 4i$

β) Αν ο μιγαδικός z_2 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας 5, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z_1

7.874 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \text{ και } B = \{w \in \mathbb{C} / w = z + \frac{2}{z}, z \in A\}$$

- α) Να εκφράσετε γεωμετρικά το σύνολο A
 β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $K = |z_1 - z_2|$, με $z_1, z_2 \in A$
 γ) Αν $z_1, z_2 \in A$, με $|z_1 - z_2| = 2$, να υπολογίσετε την παράσταση $|z_1 + z_2 - 2012i|$
 δ) Να αποδείξετε ότι το σύνολο B αποτελείται από τα σημεία μιας έλλειψης και να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z - w|$, όπου $z \in A$ και $w \in B$

7.875 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, ώστε $w^2 = \bar{z}$ και $z^2 = -\bar{w}$

- α) Να αποδείξετε ότι: ι) $|z| = |w| = 1$ ιι) $z = -w$
 β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w

7.876 Έστω ο μιγαδικός z , με $|z| = 1$ και $|1 - z| = x$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $x \in [0, 2]$ β) $z + \bar{z} = 2 - x^2$ γ) $|1 + z^2| = |z + \bar{z}|$
 δ) $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$

7.877 Δίνεται ο μιγαδικός z , με $|z| = 1$ και $|1 + z| = x$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $x \in [0, 2]$ β) $\operatorname{Re}(z) = \frac{x^2 - 2}{2}$
 γ) $|z^2 - z + 1| = |x^2 - 3|$ δ) $\sqrt{3} - x \leq |z^2 - z + 1| \leq \frac{13}{4} - x$

7.878 Η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ και θεωρούμε τον μιγαδικό $z = \frac{1 + 2w}{1 - w}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο (C) με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 1
 β) Αν z_1, z_2, z_3 τρεις μιγαδικοί του κύκλου (C) , να αποδείξετε ότι:

- ι) ο αριθμός $u = \frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_2 + z_3}{z_1} + \frac{z_3 + z_1}{z_2}$ είναι πραγματικός

- ιι) αν επιπλέον είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, τότε

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$$

7.879 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $z - \bar{z} = 4i$ και $w + \bar{w} = -2$.

- α) Να αποδείξετε ότι $|z + iw| \geq 1$
 β) Αν είναι $z + iw = -2 + i$ και M, N είναι οι εικόνες των z, w αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του MN διέρχεται από σταθερό σημείο

7.880 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $|4 + z| - |4 - z| = 6$

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι:

- ι) $\operatorname{Re}(z) \geq 3$ ιι) $|4 + z|^2 - |4 - z|^2 \geq 48$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$

7.881 Έστω a, b, c είναι τρεις μη μηδενικοί μιγαδικοί και διάφοροι μεταξύ τους ανά δύο και θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z_1 = \frac{a}{b-c}, z_2 = \frac{b}{c-a} \text{ και } z_3 = \frac{c}{a-b}$$

α) Αν δύο από τους z_1, z_2, z_3 είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι:

ι) και ο τρίτος είναι φανταστικός

ii) αν A, B, C είναι οι εικόνες των a, b, c αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC είναι η αρχή O των αξόνων

β) αν $z_1 = z_2$, τότε είναι:

$$(|a| - |b|)(|a| + |b|) \leq |a^2 + b^2| \leq (|a| + |b|)|c|$$

8 Θέματα εξετάσεων

(α') 2002

8.882 Έστω z μιγαδικός αριθμός και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(n) = i^n z$, με $n \in \mathbb{N}$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$$

β) Αν $|z| = \rho > 0$ και η διανυσματική ακτίνα του z σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα $x'x$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[\sigma \nu \nu \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$$

ii) αν $\rho = 2$ και $\theta = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $0, z$ και $f(13)$

(ημερήσια)

8.883 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = -1 + i$ και $z_2 = 3 - 4i$.

α) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τους μιγαδικούς $z_1 + 5z_2$ και $\frac{z_2}{z_1}$

β) Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του z_1 σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$

γ) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τον μιγαδικό z_1^8

(εσπερινά)

8.884 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$.

α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$

β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β, γ

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 2z_1| = |z_2|$

(ομογενείς)

(β') 2003

8.885 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = 3z - i \cdot \bar{z} + 4$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $Im(w) = 3\beta - \alpha$

β) αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία $y = x - 12$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $y = x - 2$

γ) Να βρείτε ποιός από τους παραπάνω μιγαδικούς z έχει το ελάχιστο μέτρο

(ημερήσια)

8.886 α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις $|z| = 2$ και $Im(z) \geq 0$

β) Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) , τότε η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.887 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$

και $w = \frac{i(i+z)}{i-z}$, με $z \neq i$. Να αποδείξετε ότι:

α) $w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2 + (y-1)^2} i$

β) Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$

γ) Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$

(εσπερινά)

8.888 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z+i}{z}$, με $z \neq 0$

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο

γ) Αν $Re(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες

του μιγαδικού αριθμού z , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα
(ομογενείς)

(γ) 2004

8.889 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $Im(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$
- β) αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$
- γ) για τον πραγματικό αριθμό α , ισχύει $0 \leq \alpha \leq 1$
- δ) οι εικόνες M των μιγαδικών αριθμών z , ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(εσπερινά)

8.890 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $x = 3 - \kappa$ και $y = 2\kappa + 1$. Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $3Re(z) + 4Im(z) = 3$, τότε $\kappa = -2$
- β) αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$
- γ) οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

(εσπερινά επαναληπτικές)

8.891 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$

- α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{(z_1 z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$$

(ομογενείς)

(δ) 2005

8.892 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β) ο αριθμός $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός

γ) $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

(ημερήσια)

8.893 α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \text{ και } 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i$$

β) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν:

$$|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2} \text{ και } |w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$$

ι) να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$

ιι) να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.894 Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 0$, θεωρούμε τους μιγαδικούς:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i \text{ και } w = \kappa + 4i$$

Για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν $Re(z) + Im(z) = 0$ και $|w| = 5$, να αποδείξετε ότι:

- α) $z = -1 + i$ και $\kappa = 3$
- β) υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu \bar{z} = 3i - w$

(εσπερινά)

8.895 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{x + 3}{2 - i}$, με $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε ο z να είναι φανταστικός
- β) Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός
- γ) Αν $x = 4$, να βρείτε το μέτρο του \bar{z}

(εσπερινά επαναληπτικές)

8.896 Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 - 3i$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 - ι) $\frac{z_1}{z_2} = i$
 - ιι) $|iz_1 + z_2|^2 = 0$
 - ιιι) $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$
- β) Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2}, \text{ όπου } k \in \mathbb{R} \text{ και } k \neq -1$$

Να αποδείξετε ότι $Im(w) = -1$

(ομογενείς)

(ε') 2006

8.897 Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

ι) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

ιι) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

(ημερήσια)

8.898 Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 4z + 13 = 0$ (1)

α) Να λύσετε την εξίσωση (1)

β) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = |z_1|^2 - 2|z_1 z_2| + \sqrt{13}|\bar{z}_2| + i^{2006}$$

γ) Αν $z_1 = 2 + 3i$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - z_1| = 5$

(εσπερινά)

8.899 Έστω $z \in \mathbb{C}$, ώστε $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$

α) Να αποδείξετε ότι $|5z - 1| = |z - 5|$ και $|z| = 1$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $w = 5z + 1$

(ομογενείς)

(ς') 2007

8.900 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

β) Αν z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον παραπάνω τύπο για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα, τότε:

ι) να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2

ιι) να αποδείξετε ότι $z_1^{2n} = (-z_2)^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(ημερήσια)

8.901 Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = \frac{2 - \bar{z}}{2 + \bar{z}}$, με

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$. Αν $w - z \in \mathbb{R}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $w - z = 1$

β) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

γ) αν ο z^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να βρείτε τον z και να αποδείξετε ότι:

$$(z + 1 + i)^{20} - (\bar{z} + 1 - i)^{20} = 0$$

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.902 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z = (\lambda - 2) + 2\lambda i, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β) Αν $z + \bar{z} = 2$, να βρείτε το $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$

γ) Αν $|z| = 2$ και $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, να βρείτε την τιμή του λ

(εσπερινά)

8.903 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 1 + i| = |iz|$.

α) Να βρείτε:

ι) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών αριθμών z

ιι) ποια από τα σημεία M απέχουν από την αρχή $O(0, 0)$ απόσταση ίση με $\sqrt{5}$

β) Αν $\operatorname{Re}(z) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι $z = -i$

(εσπερινά επαναληπτικές)

8.904 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i, z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$

β) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε:

ι) να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

ιι) αν $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(ομογενείς)

(ς') 2008

8.905 Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν οι σχέσεις

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \text{ και } |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z

β) το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών w

γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

(ημερήσια)

8.906 Δίνεται ότι ο μιγαδικός $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των β και γ

- β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$
 γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - \bar{z}_1|$$

- δ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού w

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.907 Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

- α) $\lambda = -6, \mu = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της παραπάνω εξίσωσης
 β) $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

(εσπερινά)

8.908 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \kappa + (\kappa + 1)i$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$
 β) Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z| = 1$;
 γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4 \beta - (1 + i)^4 \alpha$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$

(ομογενείς)

(n') 2009

8.909 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο
 γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς w , για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$

(ημερήσια)

8.910 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς ξ για τους οποίους ισχύει:

$$(2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 8 = 0$$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό z_1 και τον φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση

γ) Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$$

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.911 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = 2 + 3i \text{ και } z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1$$

- α) Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$
 β) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $\bar{z}_1 - z_2$
 γ) Να γράψετε τον μιγαδικό $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $\kappa + \lambda i$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

(εσπερινά)

8.912 Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}$

- α) Να αποδείξετε ότι $-\bar{z} = -1 + i, z^2 = 2i$ και $z^3 = -2 + 2i$
 β) Αν A, B, Γ είναι αντίστοιχα οι εικόνες των $-\bar{z}, z^2, z^3$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
 γ) Να αποδείξετε ότι: $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2$

(ομογενείς)

(θ') 2010

8.913 Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}^*$

- α) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης
 β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$
 γ) Αν $w \in \mathbb{C}$ ώστε $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο
 δ) Να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

(ημερήσια)

8.914 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 z_2 = 5$

- α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1 και z_2
 β) Έστω $w \in \mathbb{C}$, ώστε $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$
 Να βρείτε:

- ι) το γεωμετρικό τόπο του w
 ιι) τους μιγαδικούς w , ώστε $2\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.915 Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $2z - i \cdot \bar{z} = 3$

- α) Να βρείτε τον μιγαδικό z
 β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει η σχέση $|w + z| = |z^2|$
 γ) Αν $u = \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1}$, να αποδείξετε ότι $u^{2010} = -1$
 (εσπερινά)

8.916 Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6z + \gamma = 0$, με $\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$

- α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$
 β) Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης
 γ) Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$
 δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$$

(εσπερινά επαναληπτικές)

8.917 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z| = |z - 2i|$

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1$
 β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$
 γ) Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

(ομογενείς)

(ι') 2011

8.918 Έστω οι μιγαδικοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z
 β) Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$
 γ) Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$
 δ) Να αποδείξετε ότι $|z - w| = |z|$

(ημερήσια)

8.919 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + Im(z) \text{ και } w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 4y$

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$

γ) Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$

δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ , έτσι ώστε το τετράπλευρο $K\Lambda B$ να είναι τετράγωνο

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.920 Δίνονται οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και $w = z + \frac{4}{z}$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2 για τους οποίους είναι $w = 2$

β) Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του πρώτου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου

δ) Αν $|z| = 2$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$

(ομογενείς)

(ια') 2012

8.921 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \text{ και } |w - 5\bar{w}| = 12$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$

γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η έλλειψη με εξίσωση $4x^2 + 9y^2 = 36$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

δ) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z - w| \leq 4$

(ημερήσια)

8.922 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = 1$ και $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \in \mathbb{R}$

β) $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , για τους οποίους ισχύει $u - iw = \frac{i}{w} - w$, με $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

(ημερήσια επαναληπτικές)

8.923 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z - 3|^2 + |z + 3|^2 = 36 \text{ και } |2w - 1| = |w - 2|$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο, είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς, με $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$

γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο, είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

(εσπερινά)

8.924 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|iz - 1| = 1$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$

β) Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$

γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB , όπου $K(0, -1)$, είναι ορθογώνιο.

(ομογενείς)

(ιβ') 2013

8.925 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$

β) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και είναι $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2$, να αποδείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 5$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς a_0, a_1, a_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α). Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 = 0$$

να αποδείξετε ότι $|v| < 4$

(ημερήσια)

8.926 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$

β) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και είναι $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2$, να αποδείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 5$

γ) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i \text{ και } u = \left(\frac{z_1 + i}{z_2 - i}\right)^{2013}$$

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και u

(εσπερινά)

8.927 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα τη $x = 1$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους

γ) Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι $|z - w| \leq 10$ και $|z + w| \leq 10$

δ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος (β), να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$

(ημερήσια-εσπερινά επαναληπτικές)

8.928 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ εκτός από ένα σημείο του

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$$

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z αν είναι $|z| = \sqrt{5}$ (ομογενείς)

(ιγ') **2014**

8.929 Δίνεται η εξίσωση:

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \text{ με } z \in \mathbb{C}$$

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση

β) Αν $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει:

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος β.

(ημερήσια-εσπερινά)

8.930 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq -\frac{i}{2}$ και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$w = \frac{2z - i}{2z + i} \text{ και } w \in \mathbb{I}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$ εκτός από το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ του κύκλου

β) Από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να βρείτε αυτούς για τους οποίους είναι $|w| = 1$

γ) Αν $z = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $w^4 + iw^7 = 0$

(ημερήσια-εσπερινά επαναληπτικές)

9 Προχωρημένα θέματα

(α') **εύρεση μιγαδικών**

9.931 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z - |z+1|| = |z + |z-1||$

9.932 Να βρείτε τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) z^3 + |z|^2 z - 2|z|^3 = 0 \quad \beta) \left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| = 2$$

9.933 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) |a| = |b| = 1 \text{ και } a^2 + b^2 = 1$$

$$\beta) |a| = |b| = |c| = 1 \text{ και } a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

$$\gamma) |a| = |b| = |c| \text{ και } a + b + c = abc = 1$$

$$\delta) a + b + c = ab + bc + ca = abc = 1$$

$$\epsilon) a + b + c = 1 \text{ και } |a + b| = |b + c| = |c + a| = \frac{2}{3}$$

$$\zeta) |a| = |b| = |c| \text{ και } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$$

9.934 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z^{2012} + z + 1 = 0$ και $|z| = 1$

9.935 Να βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει $|1 + z^{2n+1}| \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

9.936 Να βρείτε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z + w + 1| = |z + 1| = 1 \text{ και } |zw(z + w)| = 2(|z| + |w|)$$

9.954 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι:

$$z_1 + z_2 + z_3 = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1) = 0$$

Να αποδείξετε ότι $z_1 = z_2 = z_3 = 0$

9.955 Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = \alpha + i, z_2 = \beta + i$ και $z_3 = \gamma + i$, για τους οποίους ισχύει $\operatorname{Re}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$

β) $\alpha|z_2z_3|^2 + \beta|z_3z_1|^2 + \gamma|z_1z_2|^2 = 2|z_1z_2z_3|$

9.956 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$, με $b \neq c$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a - b| = |c - a| \text{ και } |a| = |b| = |c| = |a + b + c| = 1$$

Να αποδείξετε ότι $|a + b| \cdot |c + a| = 2$

9.957 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2z_3 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} = -1$$

9.958 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και να είναι

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0$$

9.959 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

9.960 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|a| = |b| = |c| = 1$ και $a + b + c \neq 0$. Αν είναι $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $|a^2 + b^2| = |b^2 + c^2| = |c^2 + a^2|$ β) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$
 γ) οι εικόνες των μιγαδικών

$$a, b, c, abc \text{ και } \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

είναι σημεία ομοκυκλικά

δ) $|a + b + c| = 2$

9.961 Έστω $u, v, w \in \mathbb{C}$, τέτοιοι ώστε:

$$|u| = |v| = |w| = |u + v + w|$$

Να αποδείξετε ότι $(u + v)(v + w)(w + u) = 0$

9.962 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, ώστε $|z| = |w| = |z^2 + zw + w^2| = 1$. Να αποδείξετε ότι $|z^n + w^n| \in \{0, \sqrt{2}, 2\}$, όπου $n \in \mathbb{N}$

9.963 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1z_2z_3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$

9.964 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z + w| = |z| = |w| = 1$. Αν n είναι θετικός ακέραιος ώστε $z^n = w^n$, να αποδείξετε ότι ο n είναι πολλαπλάσιο του 3

9.965 Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ και $z^n + z + 1 = 0$, με $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι: α) $z^3 = 1$ β) $n = 3k + 2$, με $k \in \mathbb{N}$

9.966 Θεωρούμε τον μιγαδικό z και τους $m, n \in \mathbb{N}$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $z^m = 1$ και $(1 + z)^n = 1$. Να αποδείξετε ότι ο m είναι πολλαπλάσιο του 3 και ο n είναι πολλαπλάσιο του 6

9.967 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $zw = -1$, να αποδείξετε ότι:

$$|z + w + 2i| + |z + w - 2i| = 2|z| + 2|w|$$

9.968 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$|2z_1 - z_2 - z_3| = |z_2 - z_3| \text{ και } |2z_2 - z_1 - z_3| = |z_1 - z_3|$$

Να αποδείξετε ότι $z_1 = z_2$

9.969 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c| = 1$ και $a + b + c = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0$
 β) $a^2 = bc, b^2 = ca, c^2 = ab$ και $a^3 = b^3 = c^3$

9.970 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = \left| \frac{a + b + c - abc}{ab + bc + ca - 1} \right| = \rho > 0$$

Να αποδείξετε ότι $\rho = 1$ ή ότι δύο από τους a, b, c είναι αντίθετοι

9.971 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + 1 = 0$$

9.972 Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ώστε

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

Να αποδείξετε ότι $z_1 = 1$ ή $z_2 = 1$ ή $z_3 = 1$

9.973 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1| = |z_2 + z_3|, |z_2| = |z_3 + z_1|, |z_3| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

9.974 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε να είναι $|z^n - w^n| = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $zw = 0$

9.975 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, με $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1^n + z_2^n + z_3^n| \in \{0, 1, 2, 3\}$, με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$

9.976 Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανα δύο και είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Αν οι αριθμοί $z_1 + z_2z_3, z_2 + z_3z_1$ και $z_3 + z_1z_2$ είναι πραγματικοί, να αποδείξετε ότι $z_1z_2z_3 = 1$

(γ) εξισώσεις

9.977 Αν η εξίσωση $z^4 - 4z = \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ δεν έχει πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha < -3$

β) οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης είναι σημεία ομοκυκλικά

9.978 Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $x^2 + ax + b = 0$, ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και με τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + |a|x + |b| = 0$

9.979 Θεωρούμε την εξίσωση $a^2z^2 + abz + c^2 = 0$, με $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ και $\frac{b}{c} \in \mathbb{R}$. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2|$ ή $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$

9.980 Δίνεται η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$, με $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς $\frac{z_1}{z_2}$ και $1 + \frac{z_1}{z_2}$, με $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Να αποδείξετε ότι $ac > 0$ και $ab < 0$

9.981 Αν $a, b \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$az^3 + bz^2 + \bar{b}z + \bar{a} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα με μέτρο 1

9.982 Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί a, b, c έχουν ίσα μέτρα και είναι τέτοιοι ώστε η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ να έχει ρίζα με μέτρο 1. Να αποδείξετε ότι $b^2 = ac$

9.983 Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $b \neq 0$ και z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + az + b^2 = 0$. Αν είναι $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ και $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2|$

9.984 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί a, b με $b \neq 0$. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 + az^2 + b = 0$ με είναι κορυφές ρόμβου με κέντρο την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $\frac{a^2}{b} \leq 0$

9.985 Να λύσετε την εξίσωση:

$$|\sqrt{2}(z - |z + \sqrt{2}|) + 1| = |\sqrt{2}(z + |z|) + 1|$$

9.986 Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ οι ρίζες της εξίσωσης:

$$z^4 + \kappa z^3 + \lambda z^2 + \mu z + \nu = 0, \text{ με } \kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Αν είναι $z_1 \cdot z_2 \notin \mathbb{R}$ και $Re(z_3 + z_4)^2 = 2Re(z_1z_2)$, να αποδείξετε ότι:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$$

9.987 Δίνεται η εξίσωση $z^4 + az^3 + bz + 1 = 0$, όπου $-1 < a, b < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι δεν έχει πραγματικές ρίζες

β) Αν για τις ρίζες z_1, z_2, z_3, z_4 ισχύει η σχέση

$$(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)(1 + z_3^2)(1 + z_4^2) = 4$$

να αποδείξετε ότι:

ι) $a = b$

ii) οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης είναι σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$

(δ) γεωμετρικές προτάσεις

9.988 Έστω A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει $|w + iz|^2 = w^2 + z^2$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ή τα σημεία A, B ανήκουν στον άξονα $x'x$.

9.989 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με εικόνες τα σημεία A, B, C αντίστοιχα που ανήκουν στον κύκλο $(O, 2)$ και είναι $AB = BC = CA$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$

β) αν K είναι η εικόνα του μιγαδικού z με $|z| = 2\sqrt{2}$, τότε είναι $|\vec{KA}|^2 + |\vec{KB}|^2 + |\vec{KC}|^2 = 36$

9.990 Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \theta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού $z = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + i|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

9.991 Έστω οι μιγαδικοί z, w ώστε $|z| = |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z - w|$.
Να αποδείξετε ότι $z^2 + w^2 = 0$

9.992 Αν οι μιγαδικοί a, b, c είναι κορυφές τριγώνου ABC , να αποδείξετε ότι:

$$(ABC) = \frac{1}{2}|Im(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a})|$$

9.993 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c|$ και εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εικόνα του μιγαδικού $a + b + c$

9.994 Αν οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ είναι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι το ίχνος Δ της διχοτόμου AD είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = \frac{\beta + \lambda\gamma}{1 + \lambda}$, με $\lambda = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha - \gamma|}$

9.995 Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha^2}{\sigma\nu\nu^2\theta} - \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1, \text{ με } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |z^2 - 1| = \sigma\nu\nu 2\theta$

9.996 Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha^2}{\sigma\nu\nu^2\theta} + \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1, \text{ με } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

Να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |z^2 - \sigma\nu\nu 2\theta| = 1$

9.997 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$3z^2 - 2zw + 2w^2 = 0 \text{ και } Re\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = 0$$

Αν A, B, O είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z, w, 0$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB

9.998 Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ με $n \geq 3$ οι οποίοι έχουν ίσα μέτρα και είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$$\frac{1}{z_1 - z_0}, \frac{1}{z_2 - z_0}, \frac{1}{z_3 - z_0}, \dots, \frac{1}{z_n - z_0}$$

είναι συνευθειακά σημεία

9.999 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_n , με $n \in \mathbb{N}^*$. Αν είναι:

$$|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1 \text{ και } |z_1 + z_2 + \dots + z_n| = n$$

να αποδείξετε ότι $z_1 = z_2 = \dots = z_n$

9.1000 Οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c, d είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = |d| \text{ και } a + b + c + d = 0$$

Να αποδείξετε ότι οι a, b, c, d είναι κορυφές ορθογώνιου παραλληλογράμμου

9.1001 Έστω $z, w, u \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 3, |w| = 4, |u| = 5$ και $z + w + u = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $16z^2 + 9w^2 = 0$

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, με κορυφές τις εικόνες των z, w, u

9.1002 Οι μιγαδικοί z, a, b, c, d με $z = a + b + c + d$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις $|z - a| = |a|, |z - b| = |b|, |z - c| = |c|$ και $|z - d| = |d|$.

α) Να αποδείξετε ότι $z = 0$

β) Αν $|a| = |b| = |c| = |d|$, τότε είναι:

ι) $\bar{a}b + \bar{a}b = \bar{c}d + \bar{c}d$

ii) το τετράπλευρο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c, d είναι ορθογώνιο

9.1003 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύουν:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$

9.1004 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$a + b + c = 0 \text{ και } a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $ab + bc + ca = 0$ β) $a^2 = bc$ γ) $|a| = |b| = |c|$

δ) $|a - b| = |b - c| = |c - a| = \sqrt{3}|a|$

9.1005 Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί a, b, c, d είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν την ιδιότητα $a + b + c = \lambda(c - d)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = \frac{|c - d|}{2}$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες A, B, C των a, b, c αντίστοιχα είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου
 β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο

9.1006 Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και οι εικόνες τους A, B, C αντίστοιχα είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου $(O, 1)$. Αν $k \in \{-2, 0, 1\}$ και ισχύει η σχέση:

$$(a+b+kc)\bar{z}_1\bar{z}_2 + (b+c+ka)\bar{z}_2\bar{z}_3 + (c+a+kb)\bar{z}_3\bar{z}_1 = 0$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο

9.1007 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z_1 - z_2|(2z_3 - z_1 - z_2) + |z_2 - z_3|(2z_1 - z_2 - z_3) + |z_3 - z_1|(2z_2 - z_3 - z_1) = 0$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

9.1008 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

- α) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
 β) $a^2 = bc$ και $b^2 = ca$ γ) $(a - b)^2 = (b - c)(c - a)$
 δ) $a + b + c = 0$ και $|a| = |b| = |c|$
 ε) $|a| = |b| = |c| = 1$ και $|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 = 3$
 ζ) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ και $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
 η) $a + \epsilon b + \epsilon^2 c = 0$ και $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$
 θ) $c - a = \omega(b - a)$ και $\omega^2 - \omega + 1 = 0$
 ι) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$ κ) $a\bar{b} = b\bar{c} = c\bar{a}$

9.1009 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί ανά δύο και είναι $a^3 = b^3 = c^3$. Να αποδείξετε ότι:

- α) οι a, b, c είναι μη μηδενικοί και έχουν ίσα μέτρα
 β) $a^2 + ab + b^2 = 0$ και $a + b + c = 0$
 γ) οι εικόνες των a, b, c σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο
 δ) οι εικόνες των a^2, b^2, c^2 σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο

9.1010 Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε να είναι:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0$$

Έστω επίσης $z_1 = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha, z_2 = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta$ και $z_3 = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z_1^{31} + z_2^{31} + z_3^{31} = 0$
 β) $(z_1 z_2)^{32} + (z_2 z_3)^{32} + (z_3 z_1)^{32} = 0$

9.1011 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν την ιδιότητα $|a| = |b| = |c| = 1$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{2 + |a + b|} + \frac{1}{2 + |b + c|} + \frac{1}{2 + |c + a|} = 1$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

9.1012 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν την ιδιότητα $|a| = |b| = |c| = 1$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} = -1$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

9.1013 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$ και εικόνες τα σημεία A, B, C αντίστοιχα. Αν ισχύει:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} + \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$(a + b)^2 c + (b + c)^2 a + (c + a)^2 b = 6abc$$

9.1014 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$ και εικόνες τα σημεία A, B, C αντίστοιχα. Αν ισχύει:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2$$

9.1015 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, με εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:

- α) $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{I}$ β) $z_1^2 + z_2^2 + 2z_3^2 = 2z_3(z_1 + z_2)$

9.1016 Έστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$, οι οποίοι ανά δύο δεν είναι αντίθετοι, έχουν ίσα μέτρα και είναι:

$$|z_1 - z_4| \cdot |z_2 + z_3| = |z_1 + z_4| \cdot |z_2 - z_3|$$

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3, z_4 είναι κορυφές τραπεζίου.

9.1017 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και ισχύει:

$$z_3 = (\eta\mu\theta)z_1 + (\sigma\upsilon\nu\theta)z_2, \text{ με } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2} \quad \beta) \widehat{AGB} = \frac{3\pi}{4}$$

9.1018 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c| = 1$ και $a + b + c = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) ab + bc + ca = abc \quad \beta) (1-a)(1-b)(1-c) = 0$$

$$\gamma) \frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = 1$$

δ) αν οι a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, τότε οι εικόνες τους σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο

9.1019 Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| \text{ και } \operatorname{Re}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{b}{c}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{c}{a}\right) = -\frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) a + b + c = 0 \quad \beta) a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

γ) $a^3 = b^3 = c^3$ δ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο

9.1020 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 , με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 + 2z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 + 2z_3|^2 = 3$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$$\beta) \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = \operatorname{Re}(z_2\bar{z}_3) = \operatorname{Re}(z_3\bar{z}_1) = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma) |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$$

9.1021 Οι μιγαδικοί a, b, c είναι κορυφές τριγώνου ABC . Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq a+b+c$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $a^2 - za - bc, b^2 - zb - ca, c^2 - zc - ab$ είναι κορυφές τριγώνου που είναι όμοιο με το ABC

9.1022 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c ώστε

$$|a| = |b| = |c| = R > 0 \text{ και } |a+b|^2 + |b+c|^2 = 4R^2$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ή οι γωνίες \widehat{A} και $\widehat{\Gamma}$ διαφέρουν κατά 90° .

9.1023 Αν $z \in \mathbb{C}^* - \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z, \frac{1}{z}, 1$ και -1 είναι σημεία ομοκυκλικά

9.1024 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c, d οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και είναι $|a| = |b| = |c| = |d|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών a, b, c, d είναι κορυφές τετραγώνου:

$$\alpha) \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(b\bar{c}) = \operatorname{Re}(c\bar{d}) = 0$$

$$\beta) ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0 \text{ και } a + b + c + d = 0$$

9.1025 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $|a| = |b| = |c| = 1$, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3i\sqrt{3} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

Να αποδείξετε ότι $a + b + c = 0$

9.1026 Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $4z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου, του οποίου το κέντρο βάρους είναι η αρχή των αξόνων.

9.1027 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| \text{ και } |a+b| + |a+c| = |a-b| + |a-c|$$

Να αποδείξετε ότι $b + c = 0$

9.1028 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c, d, e, f για τους οποίους ισχύουν: $|a| = |b| = |c| = r$ και $|d| = |e| = |f| = R$, με $0 < r < R$. Επίσης είναι $a + b + c = d + e + f$ και $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών a, b, c και d, e, f είναι ισόπλευρα

(ε') αλγεβρικές ανισότητες

9.1029 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(w) > 0$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z(3-4i) + \bar{z}(3+4i) + 5 = 0$ και $(w+\bar{w})^4 \cdot (w-\bar{w}) = 192i$. Να αποδείξετε ότι $|z-w| \geq 2$

9.1030 Αν $z \in \mathbb{C}^*$ ώστε $\left|z^3 - \frac{1}{z^3}\right| \geq 4$, να αποδείξετε ότι

$$\left|z - \frac{1}{z}\right| \geq 1$$

9.1031 Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z+w| = 1$ και $|z^2+w^2| = 14$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z^3+w^3|$

9.1032 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Im}(zw) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z|^2 + |w|^2 + \operatorname{Re}(zw) \geq \sqrt{3}$$

9.1033 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z^2 + 2z| = 1$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$

9.1034 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|4z - 3i| \leq 1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\left| \bar{z} + \frac{1}{z} \right|$

9.1035 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $|z^2 + iz + 1| \leq \sqrt{5}$

9.1036 Θεωρούμε τους μη μηδενικούς μιγαδικούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = \left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| = r > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \leq r \leq 2$

β) Αν $r = 2$, να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση

9.1037 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 \geq |a+b+c|^2 + \operatorname{Im}(ab+bc+ca)$$

9.1038 Αν $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ με $c, d \neq 0$ και $|c|^2 + |d|^2 \leq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \left| \frac{a}{c} \right|^2 + \left| \frac{b}{d} \right|^2 \geq |a+b|^2$$

$$\beta) \left| \frac{a}{c} \right|^2 + \left| \frac{b}{d} \right|^2 \geq \left| \frac{a+b}{\sqrt{|c|^2 + |d|^2}} \right|^2$$

9.1039 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{|z|^2 + |w|^2} \geq \left| \frac{z+w}{n} \right|$$

9.1040 Έστω $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}^*$ ώστε να είναι:

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 + \dots + |w_n|^2 \leq 1$$

Για κάθε $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{z_1}{w_1} \right|^2 + \left| \frac{z_2}{w_2} \right|^2 + \dots + \left| \frac{z_n}{w_n} \right|^2 \geq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$$

9.1041 Αν $x, y > 0$ και $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$(1+x)(1+y)|a|^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)|b|^2 +$$

$$+ \frac{(1+x)(1+y)}{x+y}|c|^2 \geq |a+b+c|^2$$

9.1042 Αν $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|\sum z_i|}{1 + |\sum z_i|} \leq \sum \frac{|z_i|}{1 + |z_i|}$$

9.1043 Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $z^5 + 2z^3 + z - 2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} < |z| < 2$

9.1044 Έστω $a, b, c, z \in \mathbb{C}$ ώστε $|a| = |b| = |c| > 0$ και $az^2 + bz + c = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

9.1045 Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z| = 1$ και $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$|1 - z^2| + |1 + z^3| + |1 - z^4| + |1 + z^5| + \dots + |1 - z^{2n}| + |1 + z^{2n+1}| \geq n|z + 1|$$

9.1046 Αν m, n είναι θετικοί ακέραιοι και $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|1 + z^m| + |1 + z^n| + |1 + z^{m+n}| \geq 2$$

9.1047 Έστω $a, b \in \mathbb{C}^*$ με $a \neq b$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $|za + \bar{a}| \geq |zb + \bar{b}|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $\kappa \in [-1, 1]$ ώστε να είναι $b = \kappa a$

9.1048 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+2| + |z+3| + |z+11| \leq |z| + |z+4| + |z+12|$$

9.1049 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{2} \leq |1-z| + |1+z^2| \leq 4$$

9.1050 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ ώστε $|az^2 + bz + c| \leq 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι $|a|, |b|, |c| \leq 1$

9.1051 Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός z ικανοποιεί τη σχέση $|z| - \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$ αν και μόνο αν υπάρχουν μιγαδικοί a, b τέτοιοι ώστε $z = ab$ και $|a - \bar{b}| \leq 1$

9.1052 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z^3 + w^3| \leq 2$ και $|zw| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|z+w| \leq 2$

9.1053 Έστω $\epsilon^3 = 1$ με $\epsilon \neq 1$ και θεωρούμε το σύνολο:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z-1| \leq 1, |z-\epsilon| \leq 1, |z-\epsilon^2| \leq 1\}$$

α) Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$

β) Να βρείτε όλα τα στοιχεία του συνόλου A

9.1054 Έστω $p, q \in \mathbb{C}$ με $|p| + |q| < 1$. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + pz + q = 0$, να αποδείξετε ότι $|z_1| < 1$ και $|z_2| < 1$

9.1055 Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ με $|z| = 1$ ώστε $az^2 + b\bar{z} + c = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$-3 < \frac{c}{a} < 1 \text{ και } -2 < \frac{b}{a} < 2$$

9.1056 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = \alpha \text{ και } |z_1z_2z_3| = \beta \text{ με } \alpha, \beta > 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ ώστε να είναι $|z_\kappa| \leq \frac{3\beta}{\alpha}$

9.1057 Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \alpha > 0$. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$

9.1058 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|a|^2 \leq \operatorname{Re}(b\bar{c}), |b|^2 \leq \operatorname{Re}(c\bar{a}) \text{ και } |c|^2 \leq \operatorname{Re}(a\bar{b})$$

Να αποδείξετε ότι $a = b = c$

9.1059 Αν $z \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|1+z| + |1+z+z^2| \geq 1$

9.1060 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\max\{|z|, |w|\} \leq |z+w| + \sqrt{|zw|}$$

9.1061 Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = \rho > 0$ και θεωρούμε τον μιγαδικό:

$$w = (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του w

9.1062 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|^n \leq 2^{n-1}(|z|^n + |w|^n)$$

9.1063 Έστω ότι z_1, z_2, z_3, z_4 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 4z + 8 = 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$|w - z_1| + |w - z_2| + |w - z_3| + |w - z_4|, \text{ με } w \in \mathbb{C}$$

9.1064 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq \frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) + \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-z}\right) \leq \frac{1}{2}$$

9.1065 Αν $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ με $z^n = 1$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{n-1} \leq |z-1| \leq 2$$

9.1066 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|z-a| + |z-b| = b-a$, με $a, b \in \mathbb{R}$ και $b > a$

β) $|z| + |z-1| + |z-2| + |z-3| = 4$

9.1067 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0 \text{ και } |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3|$$

Να αποδείξετε ότι $3z_1z_2 + z_2z_3 + 2z_3z_1 = 0$

9.1068 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, με $\left|z + \frac{1}{z}\right| < \sqrt{2}$ και $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| < \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| > \sqrt{3}$

9.1069 Έστω $z \in \mathbb{C}$, με $|z^2+z+1| = |z+1|$. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) \in \left[-1, \frac{1}{3}\right]$

9.1070 Έστω $\lambda > 0$ και θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c για τους οποίους είναι $|a+\lambda b| \leq |c|$, $|b+\lambda c| \leq |a|$ και $|c+\lambda a| \leq |b|$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lambda \leq 1$

β) αν $\lambda = 1$ και $|a| = |b| = |c|$, τότε $a^3 = b^3 = c^3$

9.1071 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{|a^2 + b^2 + c^2|} \leq \max\{|a| + |b|, |b| + |c|, |c| + |a|\}$$

9.1072 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $A = |a+b+c|$

β) $B = |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2$

9.1073 Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ και $z \in \mathbb{C}$ ώστε $az^2 + bz + c = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z| < \frac{2|c|}{|b|}$

9.1074 Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$3 \leq |a+b-c| + |b+c-a| + |c+a-b| \leq 6$$

β) Αν είναι $a+b+c=0$, να αποδείξετε ότι:

ι) $a \neq b \neq c \neq a$

υ) $|az+1| + |bz+1| + |cz+1| \geq 3$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

ιι) $|z+a| + |z+b| + |z+c| \geq 3$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

9.1075 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $|z| < |w|$, να αποδείξετε ότι:

$$|1+z| - |1+w| \leq 1 + \frac{|z|}{|w|}$$

9.1076 Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \geq \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) + \frac{1}{6} (|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|)^2$$

9.1077 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) \geq -\frac{3}{2}$$

9.1078 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, με $z + w \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$|z| + |w| \leq |z + w| + \frac{2|zw|}{|z + w|}$$

9.1079 Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, με $n \geq 2$ ισχύει:

$$\left| \frac{z_1 + i}{iz_1 + 1} \right| + \left| \frac{z_2 + i}{iz_2 + 1} \right| + \dots + \left| \frac{z_n + i}{iz_n + 1} \right| < 2$$

να αποδείξετε ότι το πολύ ένας από αυτούς είναι πραγματικός αριθμός

9.1080 Έστω $x, y, z \in \mathbb{C}$ με $x + y + z = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) & |x - y|^2 + |y - z|^2 + |z - x|^2 = 3(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2) \\ \beta) & 2(|x - y| + |y - z| + |z - x|) \geq 3(|x| + |y| + |z|) \end{aligned}$$

9.1081 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{i}{2}(\bar{z}w - z\bar{w}) \leq \min\{|z|, |w|\} \cdot |z - w|$$

9.1082 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a - b| \sqrt{1 + |c|^2} + |b - c| \sqrt{1 + |a|^2} \geq |c - a| \sqrt{1 + |b|^2}$$

9.1083 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_n , με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \geq \operatorname{Re}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_n z_1)$$

9.1084 Αν $a, b \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|ab + 1| + |a + b| \geq \sqrt{|a^2 - 1| \cdot |b^2 - 1|}$$

9.1085 Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c ώστε να είναι:

$$|a| = |b| = |c| = 2 \text{ και } a + b + c = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $(a + \bar{b})(b + \bar{c})(c + \bar{a}) \in \mathbb{R}$
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

γ) Να αποδείξετε ότι: $|a + b| + |b + c| + |c + a| \geq 3$

9.1086 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$ και $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1 + z_2 + z_3}\right) \geq 0$$

9.1087 Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$, με $|z+w| = |z-w|$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{z}{w} \in I \quad \beta) \left| \frac{iz}{z-w} \right| + \left| \frac{\bar{w}}{z+w} \right| \geq 1$$

9.1088 Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{1}{z} + i \right| + |z + i| > \left| z + \frac{1}{z} \right|$$

9.1089 Έστω $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, ώστε $z^n + nz + \alpha = 0$, με $n \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $|z| \geq 1$

9.1090 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z|^2 + |w|^2 - |z^2 + w^2| \leq \frac{2|\alpha z + \beta w|^2}{\alpha^2 + \beta^2} \leq |z|^2 + |w|^2 + |z^2 + w^2|$$

9.1091 Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$z^n \operatorname{cosec}(n\theta) + z^{n-1} \operatorname{cosec}[(n-1)\theta] + \dots + z \operatorname{cosec}\theta = 1$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $|z| > \frac{1}{2}$

9.1092 Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$, ώστε να είναι:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} = 1$$

Για κάθε $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 \leq \alpha_1 |z_1|^2 + \alpha_2 |z_2|^2 + \dots + \alpha_n |z_n|^2$$

9.1093 Αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z^2 + 1| = 2|z + 1|$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq \sqrt{7}$

9.1094 Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{3} \leq |1+z| + |1-z+z^2| \leq \frac{13}{4}$$

9.1095 Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$2|z| \cdot |w| \cdot |z-w| \geq (|z| + |w|) \cdot |z|w| - w|z|$$

9.1096 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| + |a+b+c| \geq |a| + |b| + |c|$$

9.1097 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a+b| + |b+c| + |c+a| \leq |a+b+c| + |a| + |b| + |c|$$

9.1098 Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ για τους οποίους ισχύει η σχέση:

$$|z_1| = 4|z_2| = 9|z_3| = \dots = n^2|z_n|$$

Να αποδείξετε ότι:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n = 0$$

9.1099 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \left| \frac{b+c}{b-c} \right| + \left| \frac{c+a}{c-a} \right| \geq \sqrt{3}$$

9.1100 Αν $a \geq b \geq c > 0$ και $z \in \mathbb{C}$ με $az^2 + bz + c = 0$, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$

(5') γεωμετρικές ανισότητες

9.1101 Έστω δώδεκα διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί, οι οποίοι έχουν μέτρο 1. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα τους υπάρχουν τουλάχιστον δύο, έστω οι z_1, z_2 , για τους οποίους ισχύει $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \geq \sqrt{3}$

9.1102 Αν $z \in \mathbb{C}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = |z| + |z-1| + |z-i| + |z-1-i|$$

9.1103 Να λύσετε την εξίσωση:

$$|z| + |z-25| + |z-18-24i| + |z+7-24i| = 70$$

9.1104 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $|a| = |b| = |c| = 1$, να αποδείξετε ότι $|a-b|^2 - |b-c|^2 + |c-a|^2 \geq -1$

9.1105 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4 οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και οι εικόνες τους A, B, Γ, Δ αντίστοιχα βρίσκονται σε κύκλο κέντρου O με ακτίνα $\rho > 0$ και είναι $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_4|$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z_1 + z_2| = |z_3 + z_4|$

β) αν $|z_2 - z_3| \neq |z_4 - z_1|$, τότε είναι:

$$|z_1 + z_4| + |z_2 + z_3| < |z_2 - z_1| + |z_4 - z_3|$$

9.1106 Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, με $|a| = |b| = |c| = R$, να αποδείξετε ότι:

α) $|a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2 \leq 9R^2$

β) $|a-b| \cdot |b-c| + |b-c| \cdot |c-a| + |c-a| \cdot |a-b| \leq 9R^2$

9.1107 Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και είναι $|a| = |b| = |c| = R$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{|a-b| \cdot |a-c|} + \frac{1}{|b-c| \cdot |b-a|} + \frac{1}{|c-a| \cdot |c-b|} \geq \frac{1}{R^2}$$

9.1108 Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μη μηδενικών μιγαδικών z, w σχηματίζουν γωνία 60° , να αποδείξετε ότι $|z+w| \leq \sqrt{3}|z-w|$

9.1109 Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $Re(z\bar{w}) \geq 0$, να αποδείξετε ότι $|z+w| \geq |z-w|$

9.1110 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $z_2 \neq z_3$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$. Θεωρούμε τον μιγαδικό $w = \alpha z_2 + (1-\alpha)z_3$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι εικόνες των μιγαδικών w, z_2, z_3 είναι σημεία συνευθειακά

β) $2\rho|w-z_1| \geq |z_1-z_2| \cdot |z_1-z_3|$

9.1111 Έστω M σημείο του επιπέδου ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$MA \cdot M\Gamma + MB \cdot M\Delta \geq AB \cdot B\Gamma$$

9.1112 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με μη αρνητικά πραγματικά μέρη και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1| \leq 4$$

9.1113 Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ και $z_0 = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}$. Για κάθε $w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} |z_0 - z_1|^2 + |z_0 - z_2|^2 + \dots + |z_0 - z_n|^2 &\leq \\ &\leq |w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 + \dots + |w - z_n|^2 \end{aligned}$$

9.1114 Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, \dots, z_n για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 \text{ και } |z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$$

Για κάθε $w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|w - z_1| + |w - z_2| + \dots + |w - z_n| \geq n$$

9.1115 Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ και $w = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1$. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \geq \operatorname{Re}(w) + \sqrt{3}\operatorname{Im}(w)$$

9.1116 Οι μιγαδικοί a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και είναι $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$$

9.1117 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c οι οποίοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ και } |a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2 > 8$$

Να αποδείξετε ότι $|(a + b)(b + c)(c + a)| \leq 1$

9.1118 α) Οι μιγαδικοί a, b, c είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} = 1$$

β) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \geq \frac{1}{R^2}$$

9.1119 α) Αν $a, b, c \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

$$|a|^2 \cdot |b - c| + |b|^2 \cdot |c - a| + |c|^2 \cdot |a - b| \geq |a - b| \cdot |b - c| \cdot |c - a|$$

β) Αν O είναι τυχαίο σημείο στο επίπεδο ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{OA^2}{\beta\gamma} + \frac{OB^2}{\gamma\alpha} + \frac{OG^2}{\alpha\beta} \geq 1$$

γ) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\mu_\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\mu_\beta^2}{\gamma\alpha} + \frac{\mu_\gamma^2}{\alpha\beta} \geq \frac{9}{4}$$

9.1120 Έστω οι μιγαδικοί a, b, c με $a + b + c = 0$ και $|a| = |b| = |c| = 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}$ με $|x| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|x - a| + |x - b| + |x - c| \leq 4$

συνεχίζεται...

επιμέλεια: **zorba the freak**

nicks@freemail.gr