# ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## Α΄ Γενικού Λυκείου

## ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

**Μιχαήλογλου Στέλιος – Πατσιμάς Δημήτρης**

# ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

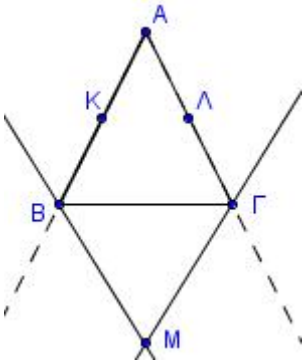
## 2ο ΘΕΜΑ

**2824.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. μ 13
**β)** $EH = \Delta Z$ μ 12

**2846.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. μ 15
**β)** $A\Delta = AE$ μ 10

**2847.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ.
Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου.
Να αποδείξετε ότι:
**α)** $MK = M\Lambda$ μ 13
**β)** Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. μ 12

**2848.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ .Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
**α)** $M\Delta = ME$ μ 12
**β)** το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. μ 13




**2854.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ .Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$ . μ 12
**β)** $MK = M\Lambda$ μ 13

**3417.** Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και $A'B'\Gamma'$ $(A'B' = A'\Gamma')$.

**α)** Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. μ 13
**β)** Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. μ 12

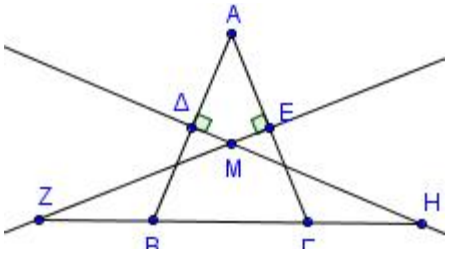
**3420.** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
**α)** Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. μ 12
**β)** Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ . μ 13

**3421.** Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ.Να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. μ 12

**β)** Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. μ 13

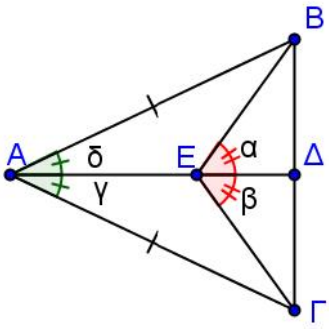
**3426.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα. μ 13
**β)** Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ. μ 12

**4974.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ .Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.



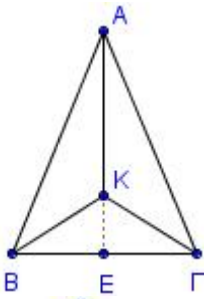

**α)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. μ 15
**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. μ 10

**5035.** Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB=A\Gamma\right)$ του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:



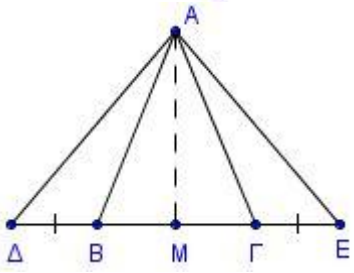

**α)** Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. μ 8
**β)** Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. μ 8
**γ)** Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. μ 9

**5048.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB=K\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. μ 12
**β)** Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. μ 6
**γ)** Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία ΒΚΓ. μ 7

**5053.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta=\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:




**α)** $\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ μ 6
**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. μ 12
**γ)** Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ. μ 7

**5069.** Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta=AB$ και $AE=A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. μ 12
**β)** Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς τη κορυφή Α διχοτομεί την πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΔΑΕ. μ 13

**5075.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB=M\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα. μ 12
**β)** Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ. μ 13

**5136.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

**α)** τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. μ 5

**β)** τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. μ 10

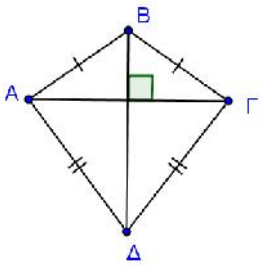
**γ)** το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. μ 10

**5139.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ $(ΚΑ = ΚΒ)$ και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας Κ. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές. μ 12

**β)** η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ. μ 13

**5144.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. μ 12

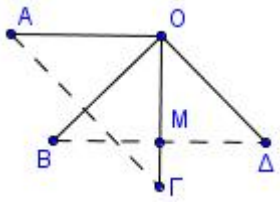
**β)** Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. μ 13

**5157.** Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Oy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $ΜΑ = ΜΒ$ μ 15

**β)** Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ. μ 10

**5560.** Αν $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Δ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, να αποδείξετε ότι:



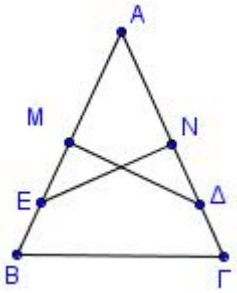

**α)** $ΑΓ = ΒΔ$ μ 10

**β)** το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ. μ 15

**5582.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.
Να αποδείξετε ότι:

**α)** $ΒΕ = ΓΔ$ μ 6 **β)** $ΒΔ = ΓΕ$ μ 10 **γ)** $Δ\hat{Β}Γ = Ε\hat{Γ}Β$ μ 9

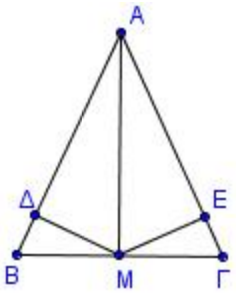
**5591.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



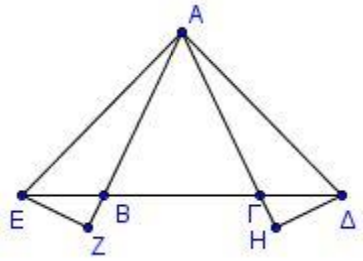

**α)** Αν $ΜΔ = ΝΕ$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. μ 12

**β)** Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΝΕ$. μ 13

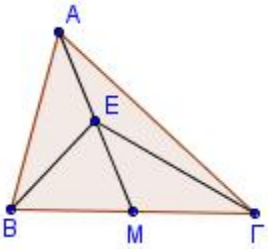
**5592.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
**α)** Αν $ΜΔ = ΜΕ$ , τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. μ 13
**β)** Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $ΜΔ = ΜΕ$ . μ 12



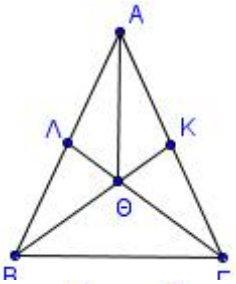

**5595.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ . Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$ . Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
**α)** $ΑΔ = ΑΕ$ μ 12
**β)** $ΕΖ = ΔΗ$ μ 13



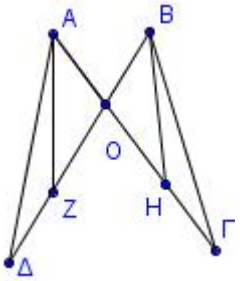

**5597.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$ , να αποδείξετε ότι:
**α)** $A\hat{E}B = E\widehat{M}Γ$ μ 12
**β)** $ΑΒ = ΕΓ$ . μ 13



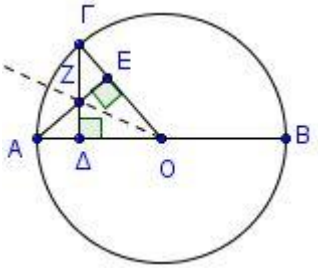

**5607.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ οι οποίες τέμνονται στο Θ. Να αποδείξετε ότι:
**α)** Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες. μ 12
**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα. μ 13



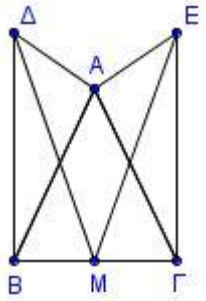

**5628.** Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ = ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ$ και σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΟΗ = ΟΖ$ . Να αποδείξετε ότι:
**α)** $A\hat{Δ}O = B\hat{Γ}O$ . μ 12
**β)** $ΑΖ = ΒΗ$ μ 13




**5634.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές. μ 13
**β)** Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. μ 12



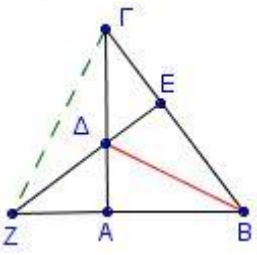
**6592.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ . Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$ . Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:




**α)** τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, μ 12

**β)** $A\Delta = AE$ . μ 13

**7453.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

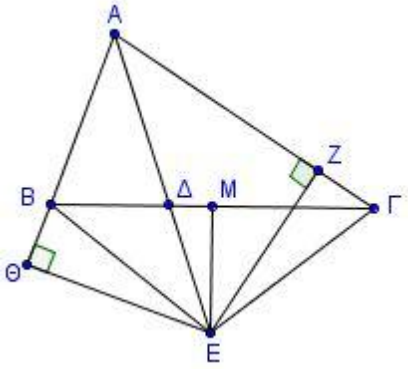



**α)** $BE = AB$ μ 12

**β)** το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. μ 13

## 4ο ΘΕΜΑ

**2787.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:



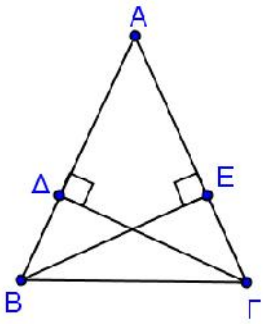

**α)** Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

**β)** Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.

**γ)** $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^\circ$ .

**3695.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

**Π**: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ , τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

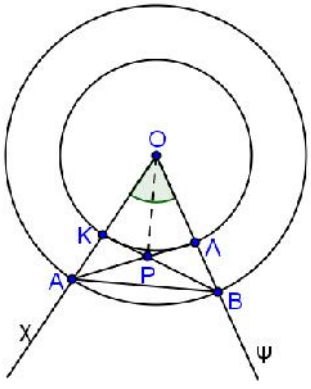



**α)** Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας. μ 10

**β)** Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει. μ 10

**γ)** Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή** της ως ενιαία πρόταση. μ 5

**3696.** Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι $(O,\rho_1)$ και $(O,\rho_2)$ με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία Κ,Α και την Oψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

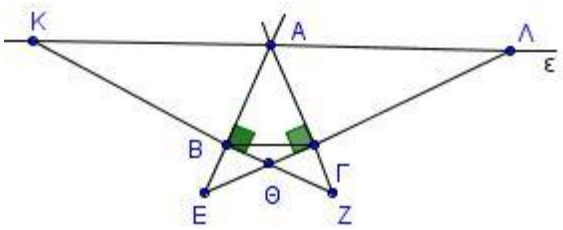



**α)** $A\Lambda = BK$ μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ, ΒΚ. μ 8

**γ)** Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}\psi$ . μ 9

**4806.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στη πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στη πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

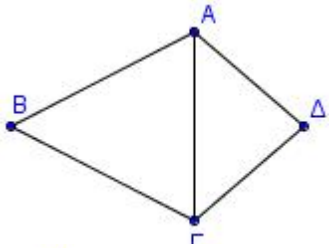
**i.** $AZ = AE$ **ii.** $AK = A\Lambda$

**β)** Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ,ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

# ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

## 2ο ΘΕΜΑ

**5029.** Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



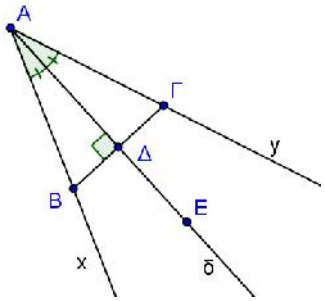

Να αποδείξετε ότι:

**α)** $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. μ 10

**γ)** Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. μ 7

**5619.** Δίνεται γωνία χΑy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.

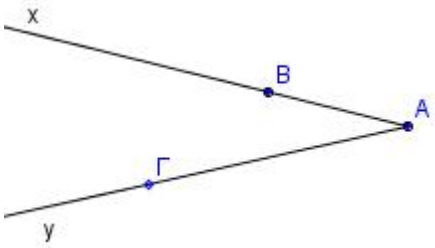



Να αποδείξετε ότι:

**α)** $AB = A\Gamma$ μ 12

**β)** Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. μ 13

**5733.** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.




Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

**α)** ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. μ 9

**β)** ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. μ 9

**γ)** ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. μ 7

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

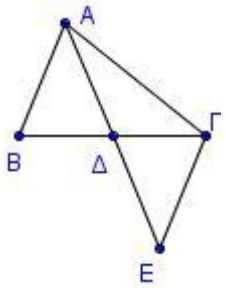
# ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

## 2ο ΘΕΜΑ

**2837.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $A\Delta = \Delta E$ μ 13 **β)** $A\Delta < \Delta B$ μ 12

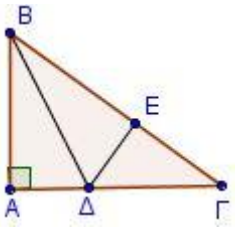
**3425.** Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $AB = \Gamma E$ μ 12

**β)** $A\Delta < \dfrac{AB + A\Gamma}{2}$ μ 13

**5580.** Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $A\Delta = \Delta E$ μ 8

**β)** $A\Delta < \Delta\Gamma$ μ 9 **γ)** $A\Gamma > AB$ μ 8

## 4ο ΘΕΜΑ

**3726.** Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω $A'$ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

**α)** Αν η $BA'$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

**i.** Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$. μ 6

**ii.** Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίεςμε την ευθεία ε. μ 6

**β)** Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:

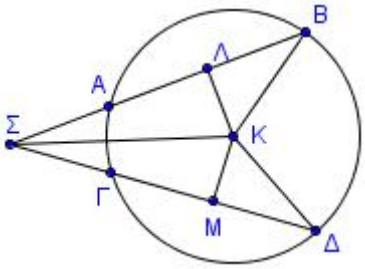
**i.** $KA = KA'$ μ 6

**ii.** $KA + KB > AO + OB$ μ 7

# ΚΥΚΛΟΣ

## 2ο ΘΕΜΑ

**2816.** Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ότι $ΣΒ = ΣΔ$ .Τα ΚΛ και ΚΜ είναι αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.



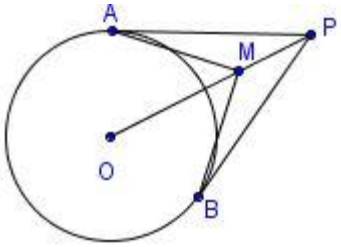

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. μ 10

**ii.** $ΚΛ = ΚΜ$ . μ 10

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες. μ 5

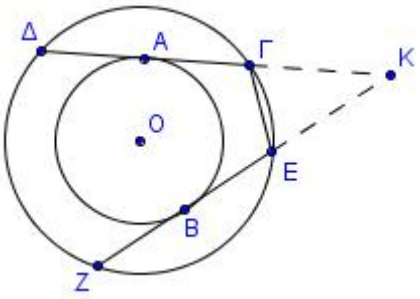
**5127.** Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:




**α)** τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. μ 12

**β)** $M\hat{A}O = M\hat{B}O$ . μ 13

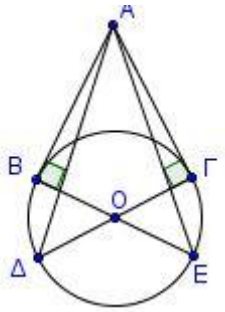
**5613.** Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται στον κύκλο (0,ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.




**α)** Να αποδείξετε ότι $ΔΓ = ΖΕ$ μ 12

**β)** Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. μ 13

**5647.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

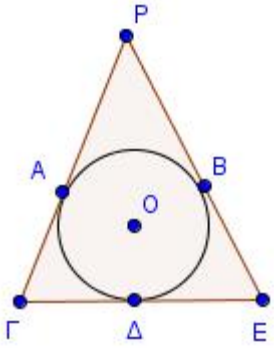



**α)** Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. μ 13

**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. μ 12

## 4ο ΘΕΜΑ

**3728.** Έστω ότι ο κύκλος $(O,ρ)$ εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ$

**ii.** $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$

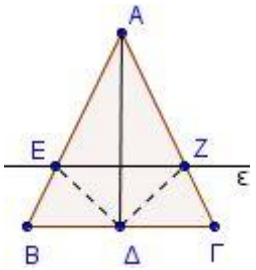
**β)** Αν $ΑΓ = ΒΕ$ , να αποδείξετε ότι

**i.** Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

**ii.** Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.

# ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

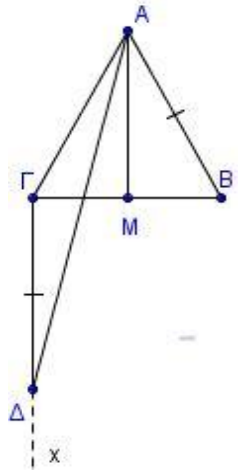
## 2ο ΘΕΜΑ




**2845.** Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = AΓ)$ φέρουμε τη ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. μ 10

**β)** Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. μ 15




**5061.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = AΓ)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $Γx \perp ΒΓ$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $ΓΔ = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

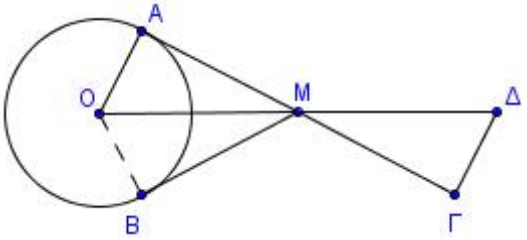
**α)** $\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ μ 12

**β)** Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. μ 13

**5066.** Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $AΔ = AB$ και $AE = AΓ$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. μ 12

**β)** $ΔE \parallel ΒΓ$ μ 13

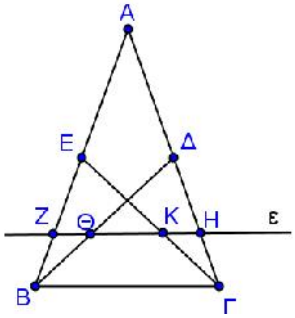



**5134.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ.Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα $MΓ = MA$ και την ΟΜ κατά τμήμα $MΔ = OM$.

**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα, και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. μ 13

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί $OA \parallel ΓΔ$. μ 12

## 4ο ΘΕΜΑ




**3721.** Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = AΓ)$ φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $BZ = ΓH$ μ 8

**β)** τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. μ 9

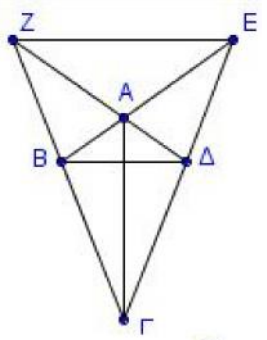
**γ)** $ZK = HΘ$. μ 8

**3729.** Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)** το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

**β)** $\Gamma A = \Delta B$

**γ)** η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $PA + PB$ .

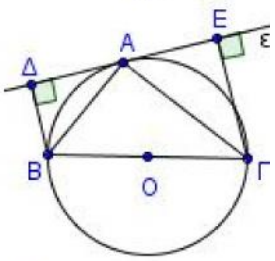



**3903.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$ . Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

**α)** Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ. μ 7

**β)** $\Gamma Z = \Gamma E$ μ9 **γ)** $EZ \parallel B\Delta$ . μ 9

**4307.** Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

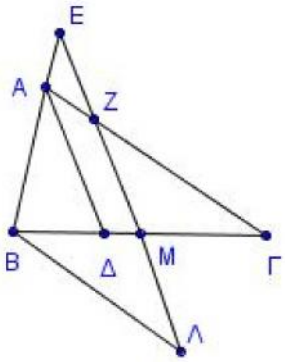



**α)** Να αποδείξετε ότι οι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΔΒΓ και ΕΓΒ. μ 8

**β)** Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $A\Delta = AE = AZ$ . μ 8

**γ)** Να αποδείξετε ότι: $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$ . μ 9

**4583.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ , η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ.
Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

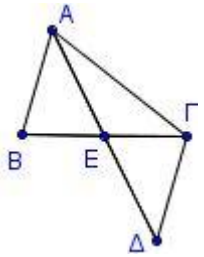



**α)** Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.

**β)** $B\Lambda = \Gamma Z$ .

**γ)** $AE = A\Gamma - B\Lambda$ .

**5904.** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α,Β,Γ,Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο Ε ισαπέχει από τα χωριά Β,Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. μ 5

**ii.** αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν,να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. μ 5

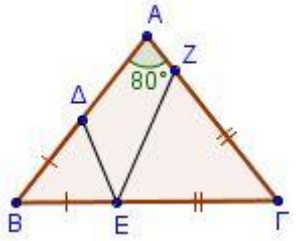
**iii.** τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ. μ 8

**β)** Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓπου ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. μ 7

# ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

## 2ο ΘΕΜΑ

**2814.** Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ είναι $\hat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΖΕ.
**β)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΕΖ.

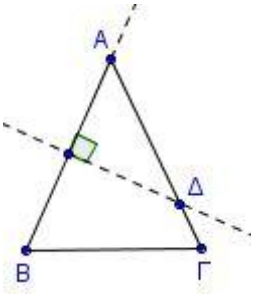
**2839.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $BE = AB$ μ 12

**β)** Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. μ 13

**2853.** Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία χΟψ. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οχ και Οψ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ,Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; μ 25

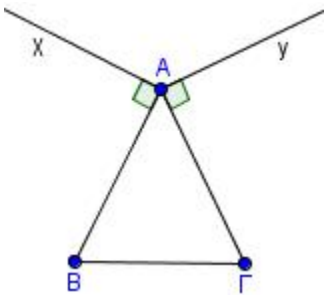
**2855.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια από τη γωνία Β.




**α)** Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. μ 10

**β)** Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία ΑΔΒ είναι $80^\circ$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 15

**2857.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αχ και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.




**α)** Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. μ 12

**β)** Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με $80^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ. μ 13

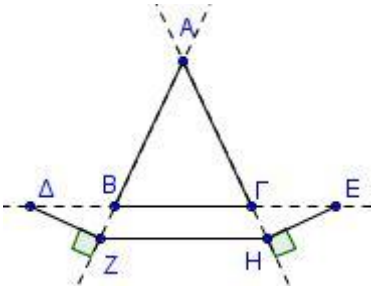
**2860.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. μ 8

**β)** Οι γωνίες ΑΙΓ και ΑΙΒ είναι ίσες. μ 10

**γ)** Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. μ 7

**3424.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.



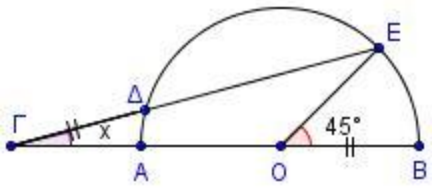

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $BZ = \Gamma H$. μ 10

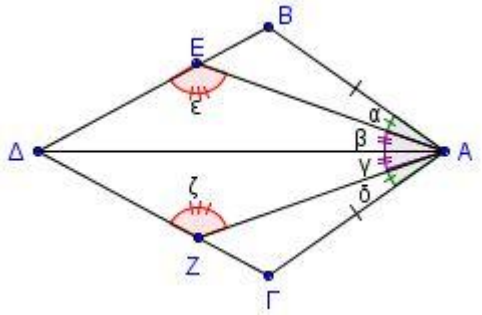
**ii.** Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. μ 7

**β)** Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. μ 8

**4972.** Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ισούται με το ΟΒ και $B\hat{O}E = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}O = x$. μ 25



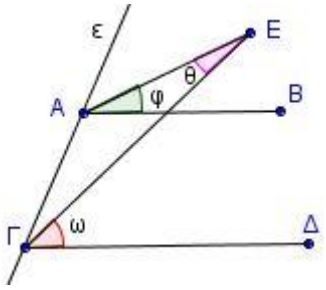

**5017.** Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. μ 12

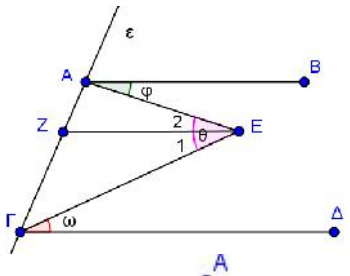
**β)** Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες. μ 13

**5040.** Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε. Να αποδείξετε ότι:

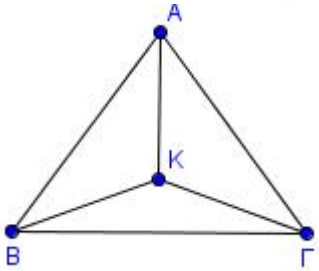



**α)** Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$. μ 10

**β)** Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$. μ 15




**5055.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, τέτοιο, ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

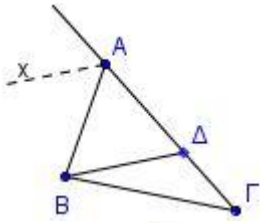



**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΒΚ και ΑΓΚ. μ 8

**γ)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΚΓ. μ 7

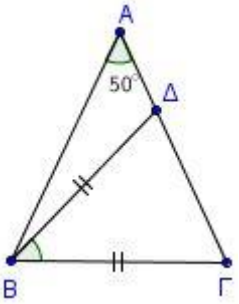
**5064.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.




**α)** Να αποδείξετε ότι:
- **i.** το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. μ 10
- **ii.** $ΔΓ = ΑΓ - ΑΒ$ μ 5

**β)** Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ. μ 10

**5080.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΒΓ$.

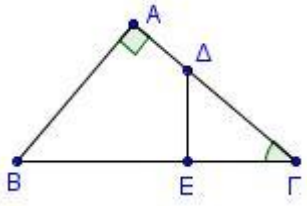



**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. μ 12

**β)** Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{B}Γ = \hat{A}$. μ 13

**5089.** Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ με $\hat{Γ} = 40^\circ$.

Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $ΔΕ \perp ΒΓ$.




Να υπολογίσετε:

**α)** τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ. μ 10

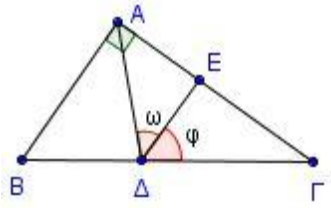
**β)** τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ. μ 15

**5092.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$. Να υπολογίσετε

**α)** τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 10

**β)** τη γωνία $Δ\hat{A}Γ$ μ 15

**5094.** Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$. Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και $ΔΕ \parallel ΑΒ$.

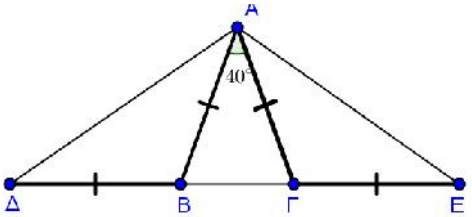



Αν $\hat{B} = \hat{Γ} + 20^\circ$,

**α)** Να υπολογίσετε:
- **i.** τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. μ 8
- **ii.** τις γωνίες ω και φ. μ 10

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. μ 7

**5100.** Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $ΔΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΕ$ και $Β\hat{A}Γ = 40^\circ$.




Να αποδείξετε ότι:

**α)** $Α\hat{B}Δ = Α\hat{Γ}Ε = 110^\circ$. μ 10

**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. μ 10

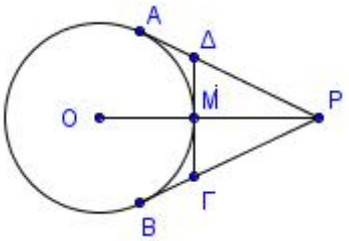
**γ)** Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. μ 5

**5142.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 20^\circ + \hat{Γ}$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ. μ 12

**β)** Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ. μ 13

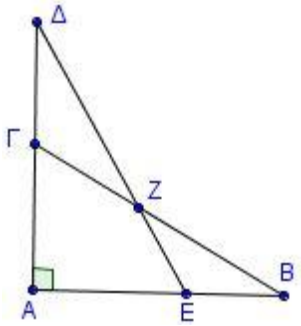
**5567.** Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.




**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. μ 13

**β)** Αν $A\hat{P}B = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ. μ 12

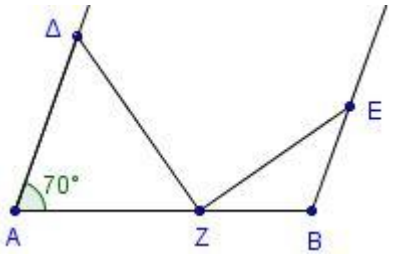
**5570.** Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ. μ 13

**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. μ 12

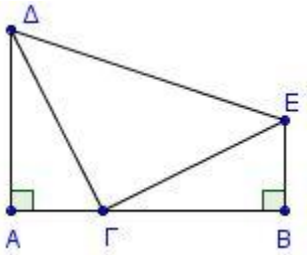
**5572.** Στο διπλανό σχήμα, οι ΑΔ, ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta Z$, $BE = EZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. μ 16

**β)** Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^\circ$. μ 9

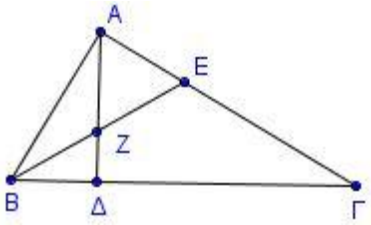
**5573.** Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες Α,Β είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. μ 13

**β)** Αν $E\hat{\Gamma}B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. μ 12

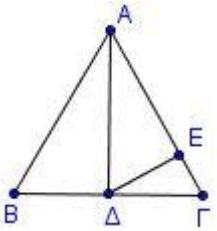
**5578 .** Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.




**α)** Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 60^\circ$. μ 10

**β)** Αν το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. μ 15

**5599 .** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

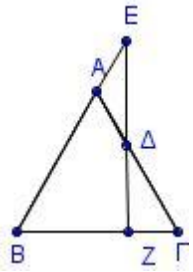



**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. μ 8

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. μ 9

**γ)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. μ 8

**6002.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = A\Delta$.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. μ 10

**β)** Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ

(προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. μ 15

**6584.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. μ 9

**β)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. μ 9

**γ)** Αν η γωνία Β είναι $20^{\circ}$ μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. μ 7

**6593.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ .

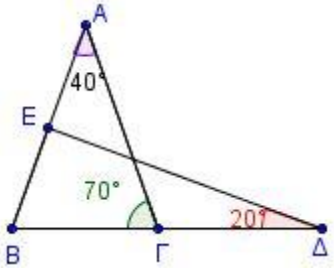
**α)** Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. μ 13

**β)** Αν $\hat{A}=75^{\circ}+\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 12

**6595.** Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

**α)** το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. μ 12

**β)** η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. μ 13




## 4ο ΘΕΜΑ

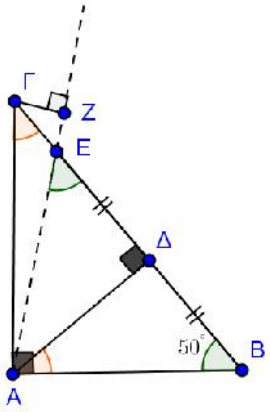
**2788**. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ με $\hat{B}=50^{\circ}$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\Delta E=B\Delta$ . Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. μ 6

**ii.** $\Gamma\hat{A}E=10^{\circ}$ . μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. μ 9



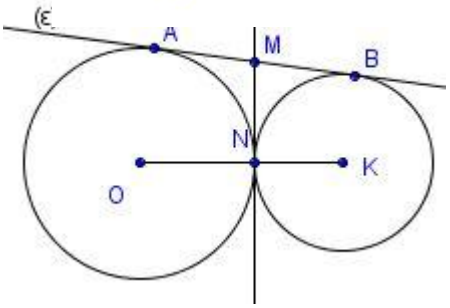

**3777.** Δύο κύκλοι $\left(O,\rho_1\right)$, $\left(K,\rho_2\right)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

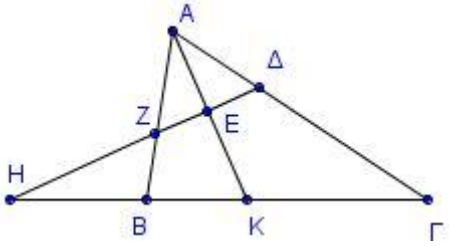
**α)** Το Μ είναι μέσον του ΑΒ. μ 7

**β)** $O\hat{M}K=90^{\circ}$. μ 9

**γ)** $A\hat{N}B=90^{\circ}$ μ 9




**3825.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

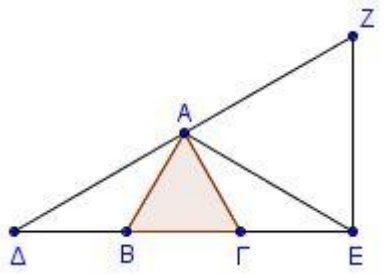


**α)** $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}}{2}$ μ 7

**β)** $ZK = K\Delta$ μ 8

**γ)** $Z\hat{H}\Gamma = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ μ 10

**4588 .** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

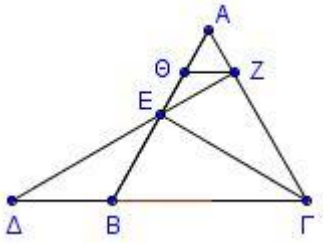



**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. μ 8

**β)** Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. μ 12

**γ)** Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$. μ 5

**4622.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το΄ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:



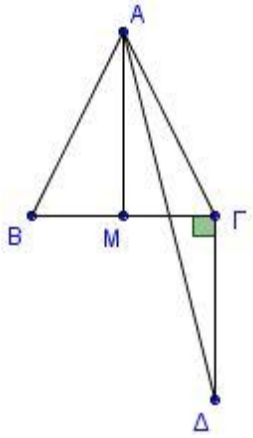

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. μ 5

**γ)** Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$. μ 5

**δ)** Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$. μ 5

**5900.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:




**α)** $AM \parallel \Gamma\Delta$ μ 6

**β)** η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. μ 7

**γ)** $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$ μ 7

**δ)** $A\Delta < 2AB$ μ 5

# ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

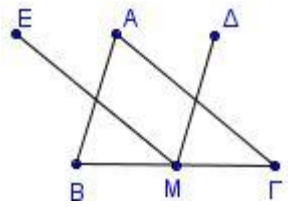
## 2ο ΘΕΜΑ

**2822.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
**α)** το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. μ 7
**β)** το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. μ 9
**γ)** η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ. μ 9

**2825.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ( προς το Μ) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα $NE = \Gamma N$ .
**α)** Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$ . μ 13
**β)** Είναι τα σημεία Ε,Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 12

**2827.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
**α)** Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. μ 10
**β)** Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 15

**2829.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $\Delta A = AE$ μ 8
**β)** Τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά. μ 9
**γ)** $\Delta E = B\Gamma$ . μ 8

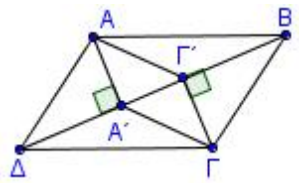
**2834.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.
**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. μ 12
**β)** Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 13

**2836.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $OE = OZ$ . Να αποδείξετε ότι:
**α)** $\Delta E = BZ$ μ 12
**β)** Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

**2858.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. μ 10
**β)** Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. μ 15

**3411.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $M\Delta = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 12
**β)** Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. μ 13

**5073.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:




**α)** $AA' \| \Gamma\Gamma'$ μ 8

**β)** $AA' = \Gamma\Gamma'$ μ 10

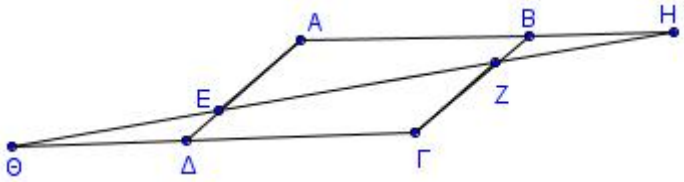
**γ)** Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄είναι παραλληλόγραμμο. μ 7

**5104.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και Β τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα. μ 12

**β)** Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

**5108.** Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔθεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

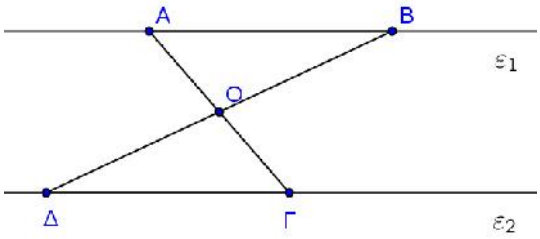



**α)** $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ μ 8

**β)** $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ μ 8

**γ)** $BH = \Theta\Delta$ μ 9

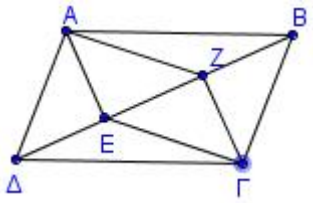
**5129.** Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. μ 12

**β)** το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

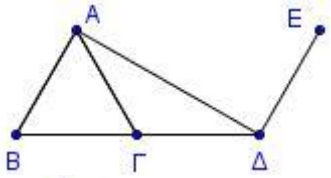
**5162.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ . Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη διαγώνιο ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $AE = \Gamma Z$ μ 15

**β)** Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

**5568.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο, ώστε $\Delta E = B\Gamma$ .(Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη ΒΔ).

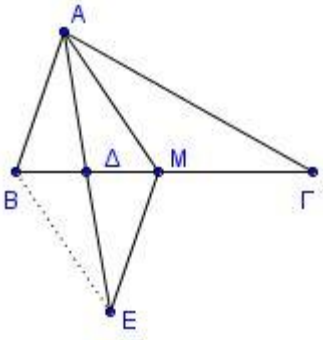



**α)** Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. μ 12

**β)** Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

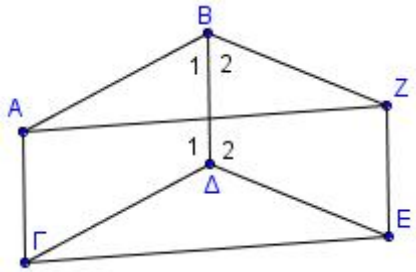
**5574.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκταση της ώστε $A\Delta = \Delta E$ .

Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. μ 12
β) $ΜΕ = ΜΓ$. μ 13

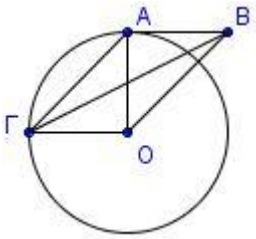
**5589.** Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

**β)** $A\hat{B}Z = Γ\hat{Δ}E$ μ 12

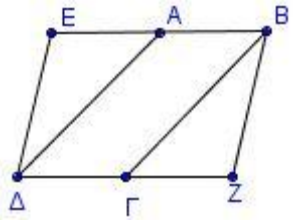
**5635.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα ΑΒ με $AB = OΓ$.




**α)** Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. μ 15

**5654.** Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $ΓZ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $BZ = EΔ$ μ 13

**β)** Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 12

**6882.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AΓ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΜΑ$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

**α)** το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. μ 12

**β)** $BM = \frac{AE}{2}$. μ 13

## 4ο ΘΕΜΑ

**3701.** Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $AB > AΔ$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

***Ισχυρισμός 1***: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

***Ισχυρισμός 2***: $A\hat{E}Δ = B\hat{Z}Γ$.

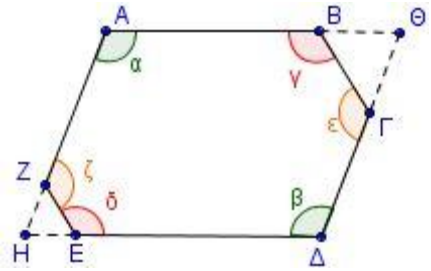
***Ισχυρισμός 3***: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β.

**α)** Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. μ 16

**β)** Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 9

**3723.** Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύον τα εξής:

$\hat{α} = \hat{β}$, $\hat{γ} = \hat{δ}$ και $\hat{ε} = \hat{ζ}$.




**α)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε}$ μ 8

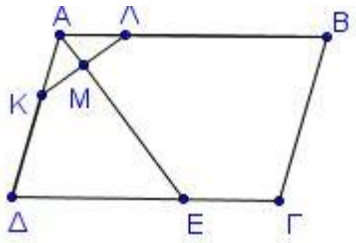
**β)** Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες

τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓπροεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές. μ 10

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. μ 7

**3812.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$. Θεωρούμε σημεία Κ,Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

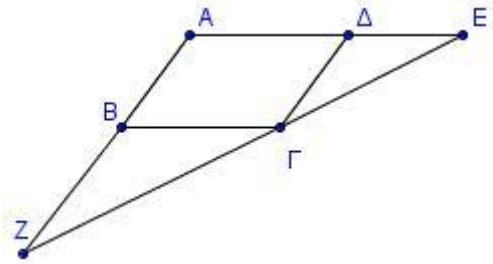



**α)** $A\Delta = \Delta E$. μ 8

**β)** $B\Gamma + \Gamma E = AB$. μ 10

**γ)** $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$ μ 7

**3954.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στη προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$ μ 10

**ii.** Τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά. μ 10

**β)** Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. ≪ Έχουμε:

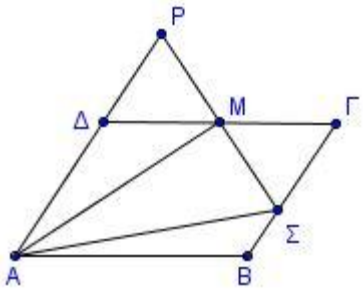
$B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ)

και $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ ( ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα : $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.≫

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. μ 5

**4616.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΜ στο σημείο της Μ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ρ και την ΒΓ στο Σ. Να αποδείξετε ότι:

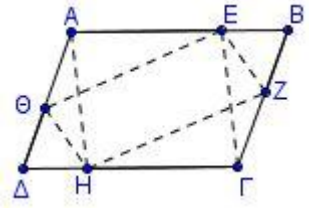



**α)** $\Delta P = \Sigma\Gamma$ μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισοσκελές. μ 8

**γ)** $A\Sigma = A\Delta + \Gamma\Sigma$ μ 9

**4651.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

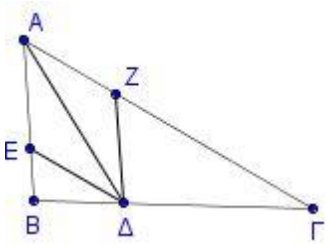



**α)** Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**β)** Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

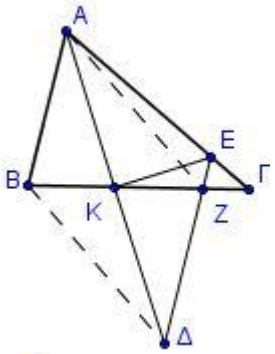
**γ)** Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. μ 9

**4735.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΓ$ . Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:



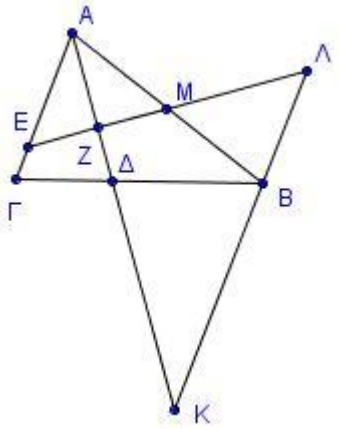

**α)** Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. μ 9
**β)** Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. μ 8
**γ)** Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. μ 8

**4781.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $ΑΚ = ΚΔ$ . Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντλίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. μ 6
**β)** Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ. μ 6
**γ)** Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. μ 7
**δ)** Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**4821.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. μ 15
**β)** Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

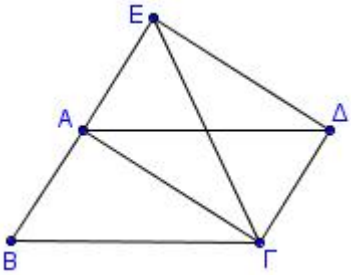
## ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

### 2ο ΘΕΜΑ

**5071.** Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

**α)** $ΜΔ = ΜΓ$ μ 12
**β)** Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. μ 13

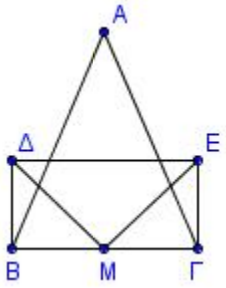
**5588.** Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.




Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. μ 8
**β)** Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. μ 9
**γ)** $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ μ 8

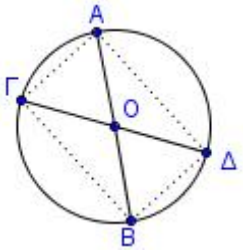
**5615.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $M\Delta = ME$ . Να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. μ 13

**β)** Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο. μ 12

**5646.** Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

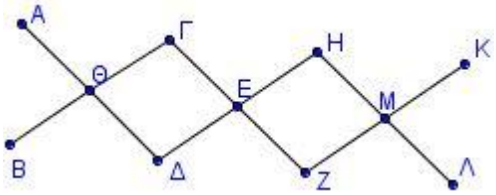



**α)** Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. μ 13

**β)** Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. μ 12

## 4ο ΘΕΜΑ

**2799.** Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

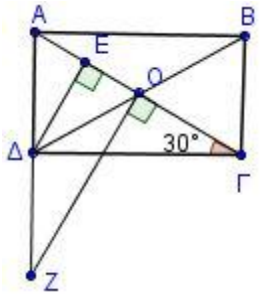



**α)** Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. μ 10

**β)** Τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά. μ 9

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**3700.** Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$ .




**α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες. μ 13

**β)** Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. μ 12

**3704.** Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

**α)** Αν $M_1$ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την $\varepsilon_1$ και $M_2$ το συμμετρικό του $M_1$ ως προς την $\varepsilon_2$, να αποδείξετε ότι:

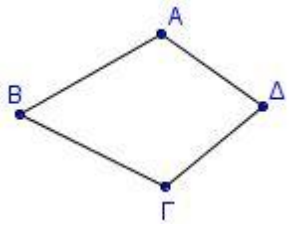
**i.** $OM = OM_1$ μ 6

**ii.** Τα σημεία Μ,Ο και $M_2$ είναι συνευθειακά. μ 8

**iii.** Το τρίγωνο $MM_1M_2$ είναι ορθογώνιο. μ 6

**β)** Αν $M_3$ είναι το συμμετρικό του $M_2$ ως προς την $\varepsilon_1$, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 5

**3722.** Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι:

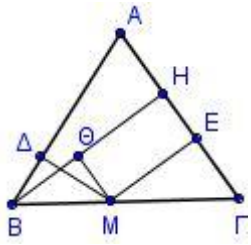



**α)** Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. μ 9

**β)** Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. μ 6

**γ)** Το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. μ 10

**3926.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι:

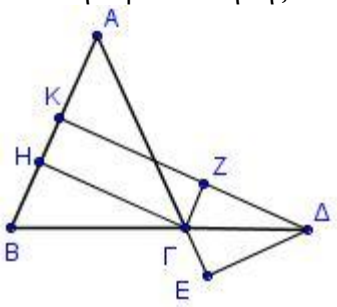



**α)** Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. μ 9

**β)** $ΒΘ = ΔΜ$ μ 9

**γ)** $ΜΔ + ΜΕ = ΒΗ$. μ 7

**4571.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:



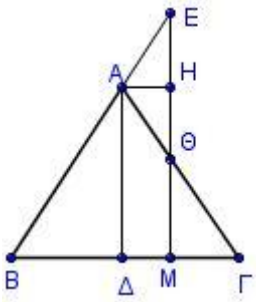

**α)** Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β. μ 4

**β)** Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. μ 4

**γ)** Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. μ 9

**δ)** $ΔΚ - ΔΕ = ΗΓ$ μ 8

**4603.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

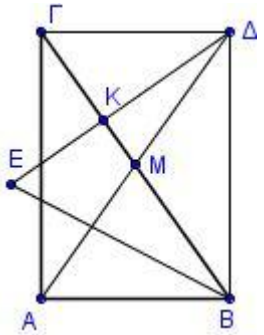



**α)** $Δ\hat{Α}Η = 90^\circ$ μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. μ 8

**γ)** $ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ$. μ 9

**4643.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.
Να αποδείξετε ότι:

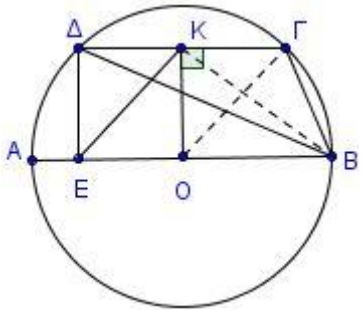



**α)** Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο. μ 8

**β)** $Κ\hat{Ε}Β = 90^\circ - \frac{\hat{Β}}{2}$ μ 8

**γ)** $ΔΕ = ΒΔ$. μ 9

**4814.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $ΓΔ \parallel ΑΒ$ και Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

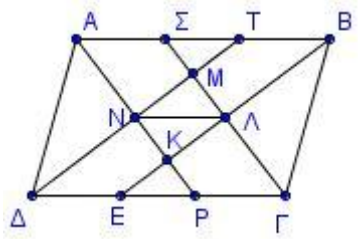



**α)** Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**β)** $Δ\hat{Ε}Κ = \frac{Δ\hat{Ο}Γ}{2}$ μ 12

**γ)** $ΚΕ < ΚΒ$ μ 5

**5908.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΑΔ$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ,Ε στην ΔΓ και Σ,Τα στην ΑΒ) τέμνονται στα στα σημεία Κ,Λ,Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. μ 7
**β)** το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. μ 8
**γ)** $ΛΝ \parallel ΑΒ$ μ 5
**δ)** $ΛΝ = ΑΒ - ΑΔ$ μ 5

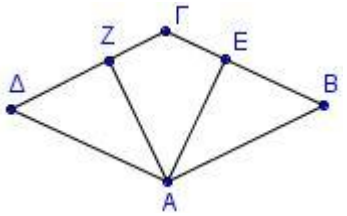
## ΡΟΜΒΟΣ

### 2ο ΘΕΜΑ

**3422.** Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. μ 12
**β)** Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος. μ 13

**3427.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

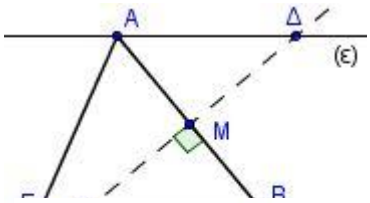



**α)** Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $ΑΖ = ΑΕ$. μ 12
**β)** Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $ΑΖ = ΑΕ$, τότε αυτό είναι ρόμβος. μ 13

**5024.** Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

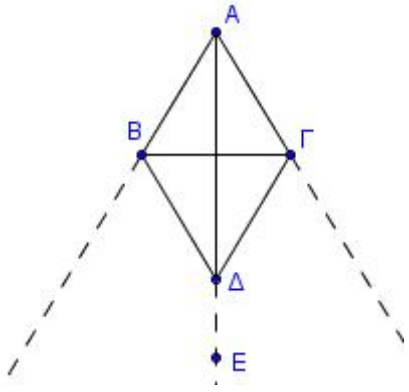
**α)** Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. μ 13
**β)** Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος. μ 12

**5554.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.




**α)** Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$. μ 6
**β)** Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. μ 10
**γ)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. μ 9

**5641.** Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). μ 10
**β)** Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. μ 15

## 4ο ΘΕΜΑ

**3715.** Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

**Π1:** Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

**Π2:** Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

**α)** Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. μ 20

**β)** Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. μ 5

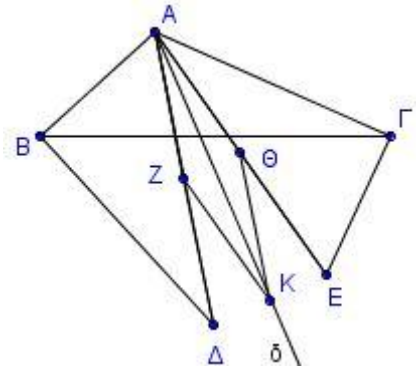
**4652.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $ΒΚ = ΚΛ = ΛΔ$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

**β)** Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος. μ 8

**γ)** Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 7

**4798.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ . Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $ΒΔ = ΑΓ$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $ΓΕ = ΑΒ$ . Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $Δ\hat{A}E$ .




**α)** Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$ . μ 9

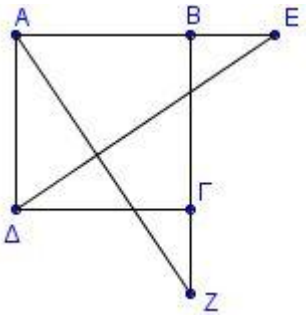
**β)** Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ. μ 9

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $ΚΖ = ΑΖ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. μ 7

# ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

## 2ο ΘΕΜΑ

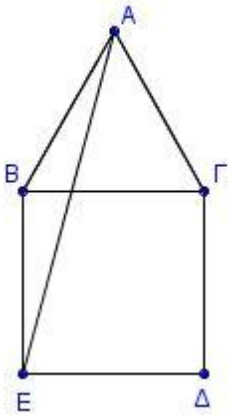
**5575.** Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ$ . Να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. μ 12

**β)** Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. μ 13

**5586.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.



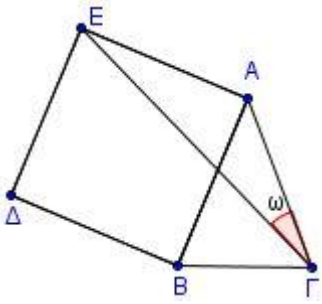

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες

**i.** $A\hat{B}E$ μ 8

**ii.** $B\hat{E}A$ μ 9

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. μ 8

**5587.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. μ 10

**β)** $2E\hat{\Gamma}A = 90^\circ - B\hat{A}\Gamma$. μ 15

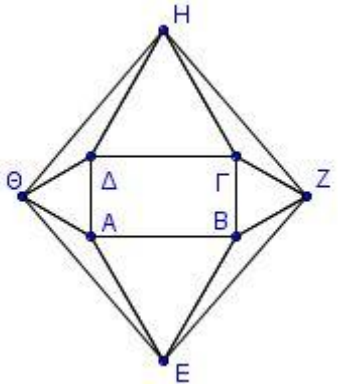
**5601.** Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. μ 13

**β)** Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 12

## 4ο ΘΕΜΑ

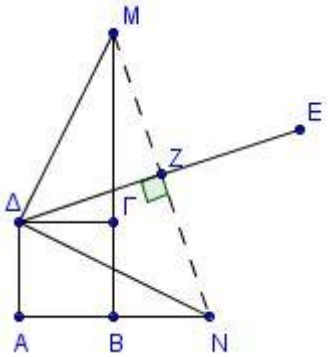
**3705.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.




**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. μ 15

**β)** Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. μ 10

**3727.** Στο τετράγωνο προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα $BN = AB$ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.



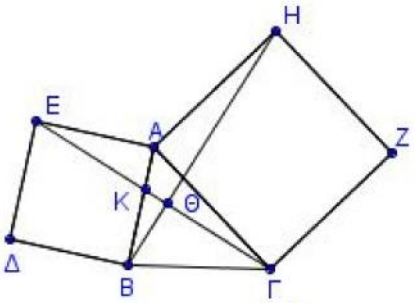

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $\Delta N = \Delta M$ μ 7

**ii.** $\Delta N \perp \Delta M$ μ 10

**β)** Αν Ε το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΜΝ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι τετράγωνο. μ 8

**3817.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι:

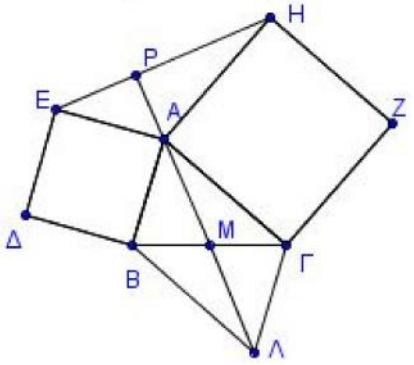



**α)** $\text{E}\hat{\text{A}}\text{H} = \text{A}\hat{\text{B}}\Gamma + \text{A}\hat{\Gamma}\text{B}$ μ 8

**β)** $\text{E}\Gamma = \text{B}\text{H}$ μ 9

**γ)** Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. μ 8

**3906.** Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο, ώστε $\text{AM} = \text{M}\Lambda$ , να αποδείξετε ότι:

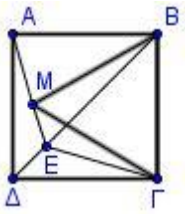



**α)** $\Gamma\Lambda = \text{AE}$ . μ 10

**β)** $\text{A}\hat{\Gamma}\Lambda = \text{E}\hat{\text{A}}\text{H}$ . μ 10

**γ)** Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. μ 5

**4567.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

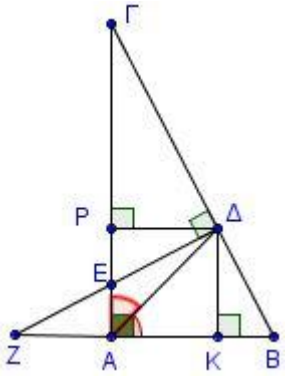



**α)** $\Delta\hat{\text{A}}\text{E} = 15^{\circ}$

**β)** Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

**γ)** Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

**6875.** Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{\text{A}} = 90^{\circ}\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.




Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Α) στο σημείο Ζ.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $\hat{\text{B}} = \Delta\hat{\text{E}}\Gamma$ μ 8

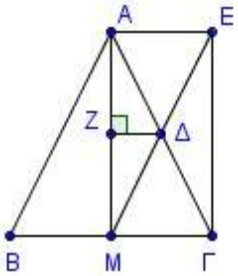
**ii.** $\Delta\text{E} = \Delta\text{B}$ μ 8

**β)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ. μ 9

## ΤΜΗΜΑ ΠΟΥ ΕΝΩΝΕΙ ΜΕΣΑ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

### 2ο ΘΕΜΑ

**3412.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\text{AB} = \text{A}\Gamma\right)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $\text{M}\Delta = \Delta\text{E}$ . Αν το σημείο Ζ είναι το ίχνος του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. μ 12

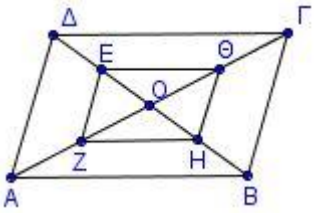
**β)** $\Delta\text{Z} = \dfrac{\text{B}\Gamma}{4}$ μ 13

**3418.** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

**β)** Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. μ 12

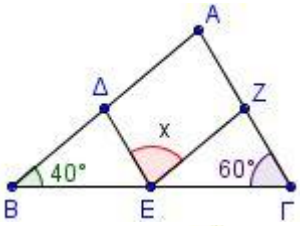
**5021.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

**β)** Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του ΕΘΗΖ. μ 15

**5039.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=40^\circ$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$. Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

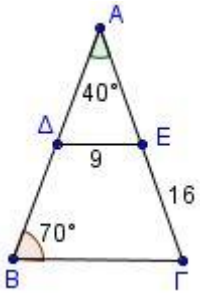



**α)** Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ. μ 8

**β)** Να αποδείξετε ότι: $B\hat{\Delta}E=E\hat{Z}\Gamma=80^\circ$. μ 9

**γ)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΕΖ. μ 8

**5103.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=40^\circ$ και $\hat{B}=70^\circ$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E=9$ και $E\Gamma=16$.

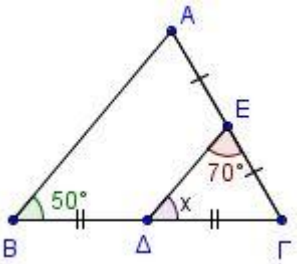



**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. μ 8

**β)** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=18$. μ 8

**γ)** Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

**5111.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta\hat{E}\Gamma=70^\circ$.



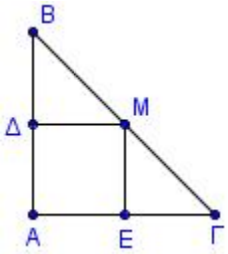

**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$. μ 8

**β)** Να υπολογίσετε

**i.** τη γωνία $\hat{x}$. μ 8

**ii.** τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

**5593.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



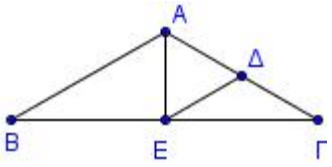

**α)** Αν $M\Delta=ME$ τότε:

**i.** τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. μ 8

**ii.** το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. μ 9

**β)** Αν $AB=A\Gamma$ τότε $M\Delta=ME$. μ 8

**5653.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{B}=30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

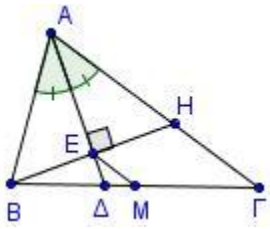



**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. μ 16

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο. μ 9

## 4ο ΘΕΜΑ

**3694.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(AB < AΓ)$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. μ 9

**β)** $EM \parallel HΓ$ μ 8

**γ)** $EM = \dfrac{AΓ - AB}{2}$ μ 8

**3697. α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. μ 8

**β)** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

**i.** ισόπλευρο τρίγωνο. μ 8

**ii.** ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. μ 9

**3699.** Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**β)** $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ μ 8

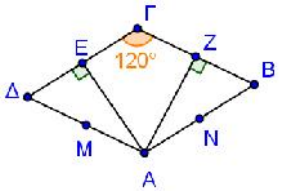
**γ)** Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. μ 9

**3717.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

**α)** Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$. μ 15

**β)** Στη περίπτωση που το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά. μ 10

**3720.** Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



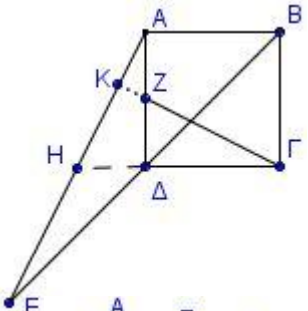

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα. μ 8

**ii.** $A\Gamma \perp EZ$ μ 8

**β)** Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο. μ 9

**3762.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

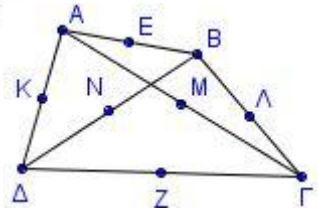



**α)** $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$ μ 8

**β)** Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. μ 9

**γ)** Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. μ 8

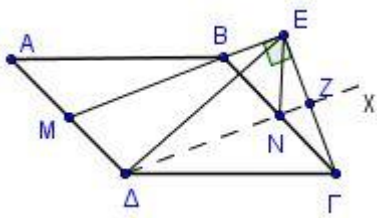
**3784.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $A\Delta = B\Gamma$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος. μ 8

**β)** Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ. μ 7
**γ)** $ΚΕ = ΖΛ$ μ 5
**δ)** Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο. μ 5

**3789.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ $(ΓΕ \perp ΜΒ)$. Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ $(Δx \parallel ΜΒ)$ τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

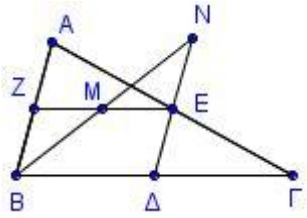



**α)** Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 7
**β)** Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. μ 9
**γ)** $ΔΕ = ΔΓ$. μ 9

**3904. α)** Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος. μ 15
**β)** Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση. μ 10

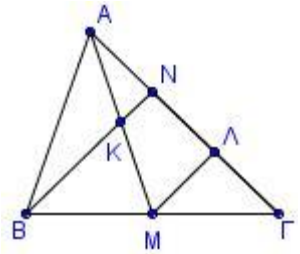
**3915. α)** Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. μ 13
**β)** Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου. μ 12

**3932.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:



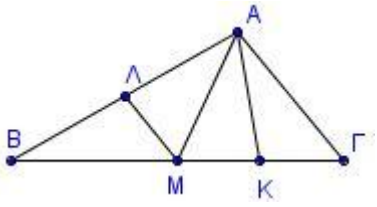

**α)** Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. μ 7
**β)** Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. μ 10
**γ)** $ΒΖ + ΝΕ = ΔΓ$ μ 8

**3938.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:



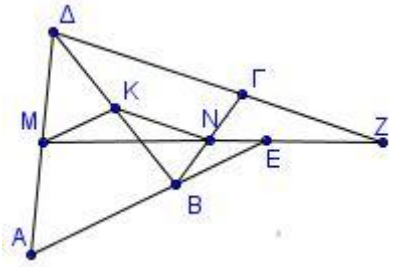

**α)** Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ. μ 9
**β)** $K\widehat{M}Γ = M\hat{B}K + A\hat{K}N$ μ 9
**γ)** $ΒΚ = 3ΚΝ$ μ 7

**3945.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ,Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι:



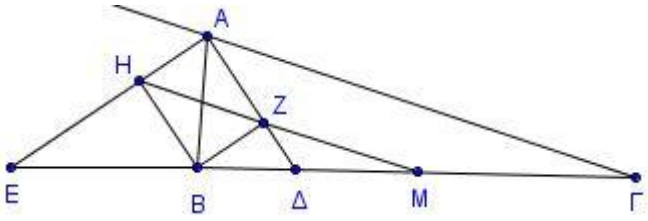

**α)** $M\widehat{A}Γ = A\widehat{M}Γ$. μ 7
**β)** $ΜΛ = ΜΚ$. μ 9
**γ)** Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΑΚ. μ 9

**3948.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = ΓΔ$ και Μ,Ν,Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ,ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



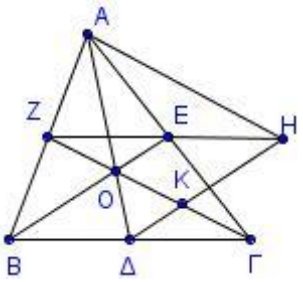

**α)** $ΜΚ = ΚΝ$ μ 13
**β)** $M\hat{E}A = M\hat{Z}Δ$ μ 12

**4579.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ,Ε σημεία της ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



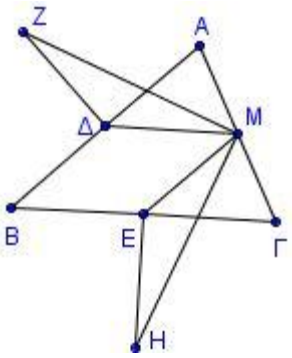

**α)** Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. μ 5
**β)** Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. μ 6
**γ)** Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. μ 6
**δ)** $\text{ΜΗ} = \frac{\text{ΑΒ} + \text{ΑΓ}}{2}$. μ 8

**4593.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα $\text{ΕΗ} = \text{ΖΕ}$. Να αποδείξετε ότι:



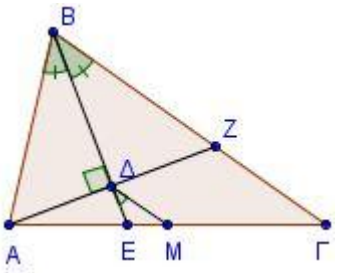

**α)** Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8
**β)** Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9
**γ)** Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ. μ 8

**4640.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με τις γωνίες Β και Γ οξείες και Δ,Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta\text{Ζ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ και .



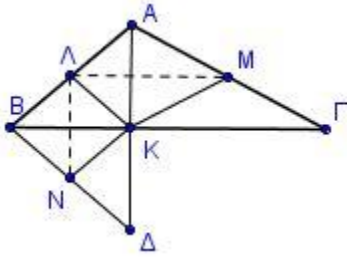

**α)** Να αποδείξετε ότι:
**i.** Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 5
**ii.** Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. μ 10
**β)** Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $\hat{\text{Α}} = 90^\circ$. μ 10

**4649.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} < \text{ΒΓ}$ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας Β. Αν $\text{ΑΖ} \perp \text{ΒΕ}$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:



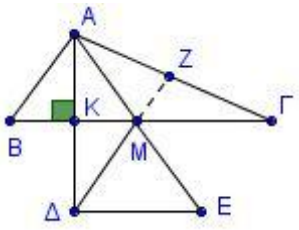

**α)** Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. μ 7
**β)** $\Delta\text{Μ} \parallel \text{ΒΓ}$ και $\Delta\text{Μ} = \frac{\text{ΒΓ} - \text{ΑΒ}}{2}$. μ 10
**γ)** $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Μ} = \frac{\hat{\text{Β}}}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. μ 8

**4783.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\text{ΑΚ} = \text{ΚΔ}$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. μ 7
**β)** Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος. μ 9
**γ)** $\Lambda\text{Μ} \perp \Lambda\text{Ν}$ μ 9

**4803.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓμε διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = M\Delta$.




Να αποδείξετε ότι:

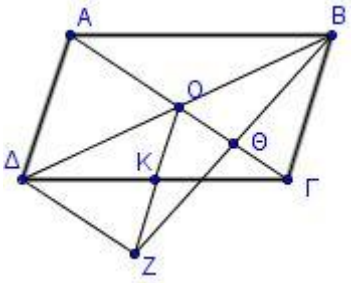
**α)** $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$. μ 7

**β)** Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. μ 6

**δ)** Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ. μ 6

**4810.** Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $KZ = KO$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:




α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. μ 8

**β)** $AO = \Delta Z$ μ 9

**γ)** Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα. μ 8

**7433.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε,Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

**β)** Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. μ 10

**γ)** Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ( η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. μ 5

## ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ – ΘΕΩΡΗΜΑ 30˚

### 2ο ΘΕΜΑ

**2832.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $AH = \Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. μ 12

**β)** Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Ζ. μ 13

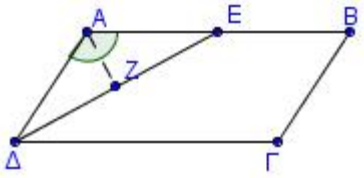
**2841.** Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $A\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$ μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. μ 8

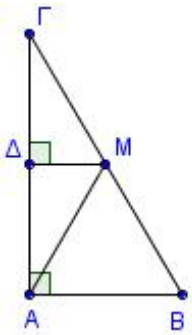
**γ)** $\Delta E = \dfrac{A\Gamma}{2}$ μ 9

**2844.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:



**α)** $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$ μ 10

**β)** $AZ = \dfrac{AB}{4}$ μ 15




**2849.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ με $B\Gamma = 8\,cm$. Έστω ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν $A\hat{M}\Gamma = 120^\circ$, τότε:

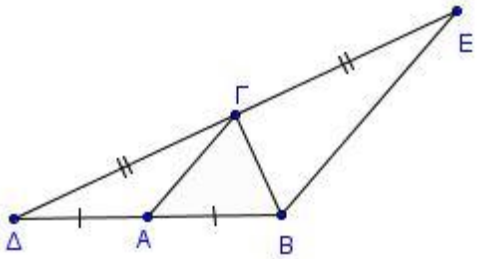
**α)** Να δείξετε ότι $AB = 4\,cm$. μ 12

**β)** Να βρείτε το μήκος της ΜΔ. μ 13

**2852.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο. μ 12

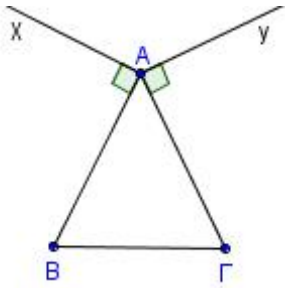
**β)** $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \dfrac{BE}{2}$ μ 13




**2856.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αχ και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. μ 12

**β)** Αν Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές. μ 13

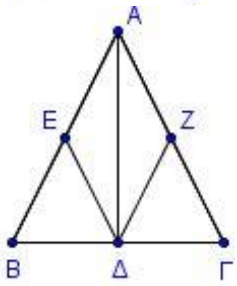



**3416.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα. μ 15

**β)** Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. μ 10



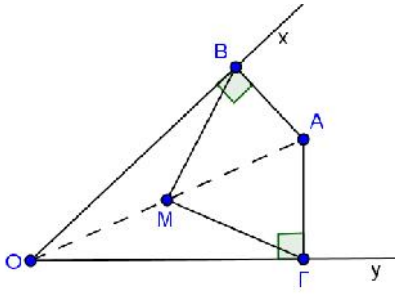

**3419.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$. μ 12 **β)** Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο. μ 13

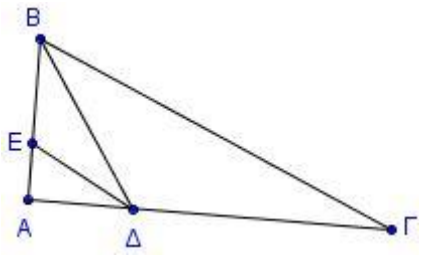
**5033.** Δίνεται γωνία xOy και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οχ, Οy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. μ 10

**β)** $B\hat{M}\Gamma = 2x\hat{O}y$. μ 15



**5059.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας ΑΔΒ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



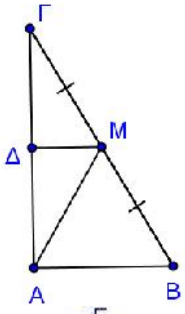

**α)** Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. μ 10

**β)** Αν $A\hat{\Delta}B=60^{\circ}$,

**i.** να υπολογίσετε τη γωνία Γ, μ 8

**ii.** να αποδείξετε ότι $B\Gamma=2AB$. μ 7

**5096.** Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ.

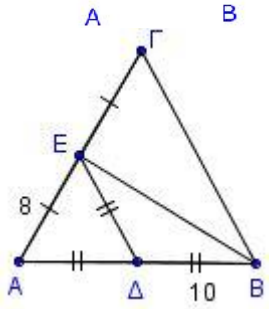



**α) i.** Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. μ 7

**ii.** τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ. μ 9

**β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ. μ 9

**5117.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta=\Delta E=\Delta B$ με $AE=8$ και $\Delta B=10$.

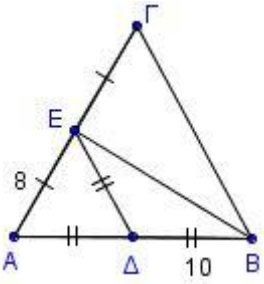



**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. μ 8

**β)** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=20$. μ 8

**γ)** Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

**5118.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta=\Delta E=\Delta B$ με $AE=8$ και $\Delta B=10$.

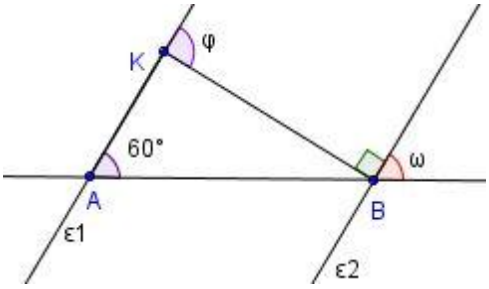



**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. μ 6

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. μ 10

**γ)** Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

**5132.** Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB=6$.

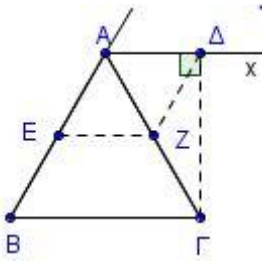



**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ. μ 10

**β)** Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του. μ 7

**γ)** Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας. μ 8

**5149.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αχ της γωνίας Α και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο. μ 13

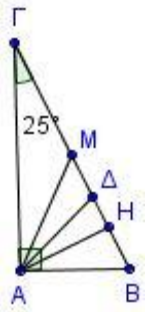
**β)** το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος. μ 12

**5557.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^\circ$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. μ 15

**β)** Αν η πλευρά $B\Gamma=2\,cm$, να βρείτε το μήκος της ΑΒ. μ 10

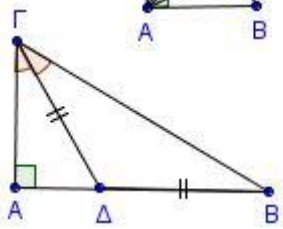
**5562.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B$, $H\hat{A}B$, $A\hat{\Delta}B$. μ 15

**β)** Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}H=20^\circ$. μ 10

**5569.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\Gamma\Delta=\Delta B=2\,cm$. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $\hat{B}=30^\circ$. μ 12

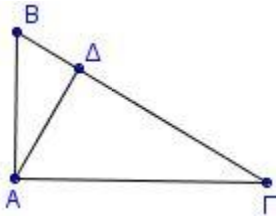
**β)** $AB=3\,cm$ μ 13

**5581.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

**α)** Να υπολογίσετε τη γωνία Γ. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ. μ 15

**5583.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$, $2\hat{\Gamma}=\hat{B}$ και ΑΔ το ύψος του.

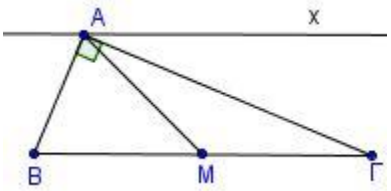



**α)** Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

**β)** Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ. μ 7

**γ)** Να αποδείξετε ότι: $B\Delta=\frac{AB}{2}$. μ 9

**5590.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:




**α)** $M\hat{A}\Gamma=M\hat{\Gamma}A$ μ 12

**β)** η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. μ 13

**5621.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=30^\circ$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $E\Delta=1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

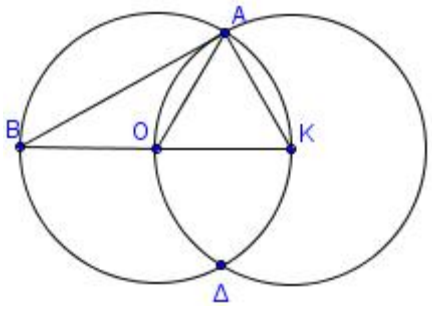
**α)** ΑΓ..... μ 8

**β)** ΒΓ..... μ 9

**γ)** ΑΔ..... μ 8

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

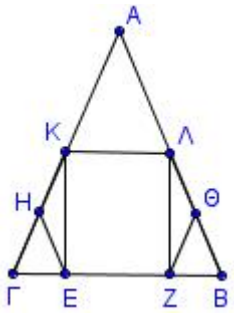
**5626.** Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Ο ,ρ) και (Κ ,ρ) με $OK=\rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.




**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. μ 15

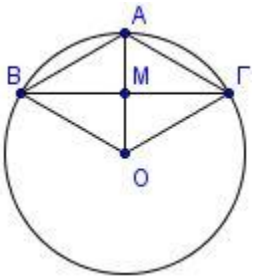
**5630.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα. μ 15

**β)** $ΕΗ = ΖΘ$, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα. μ 10

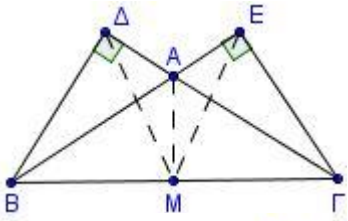
**5637.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.




**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. μ 15

**5638.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



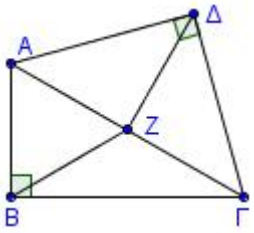

**α)** Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$. μ 10

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι $ΜΔ = ΜΕ$ μ 8

**ii.** Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ. μ 7

**5652.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\hat{Δ} = 90^\circ$.




**α)** Να αποδείξετε ότι $ΒΖ = ΔΖ$. μ 13

**β)** Αν $Α\hat{Γ}Β = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ. μ 12

**6580.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$ και $\hat{Β} > \hat{Γ}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσό του ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\hat{Β} = Γ\hat{Α}Δ$ μ 12 **β)** $Α\widehat{Μ}Δ = 2\hat{Γ}$. μ 13

**6582.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{Β} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ μ 8

**β)** το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, μ 9

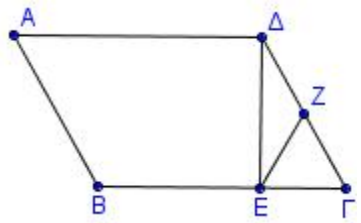
**γ)** το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. μ 8

**6885.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $ΔΓ \perp ΕΓ$ μ 12

**β)** η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. μ 13

**7452.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B}=120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$ . Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



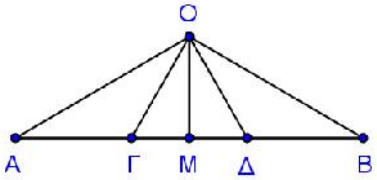

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου. μ 8

**β)** Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $EZ=AK$ . μ 9

**γ)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ. μ 8

## 4ο ΘΕΜΑ

**2792.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta B$ .Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma=A\Gamma$ και $\Delta B=O\Delta$ .




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $\Gamma\hat{O}\Delta=60^\circ$ μ 9

**ii.** $O\hat{A}\Gamma=O\hat{B}\Delta=30^\circ$ μ 9

**β)** Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2OM=OA$ . μ 7

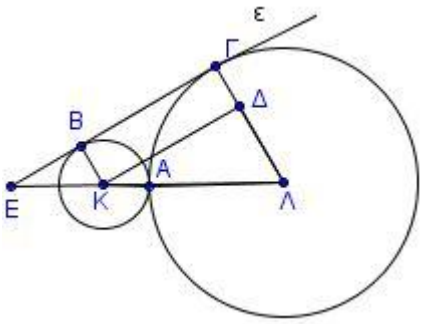
**2797.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $\hat{B}=60^\circ$ και $AZ=BZ$ μ 10 **ii.** $A\Delta=\frac{3}{2}BZ$ μ 8

**β)** Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου. μ7

**3691.** Οι κύκλοι $(K,\rho)$ και $(\Lambda,3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.




**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. μ 9

**β)** Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{K}\Lambda=30^\circ$ μ 8

**γ)** Να αποδείξετε ότι $E\Lambda=6\rho$ . μ 8

**3697. α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. μ 8

**β)** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

**i.** ισόπλευρο τρίγωνο. μ 8

**ii.** ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. μ 9

**3711.** Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

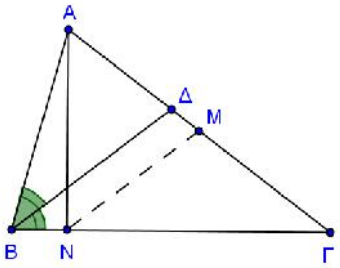
**i.** $AH = A\Delta = AE$ μ 6

**ii.** Το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο. μ 6

**iii.** Τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά. μ 6

**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΗΔ είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 7

**3713.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. μ 5

**β)** Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. μ 10

**γ)** $AN \perp B\Gamma$ μ 10

**3735.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω Αχ η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

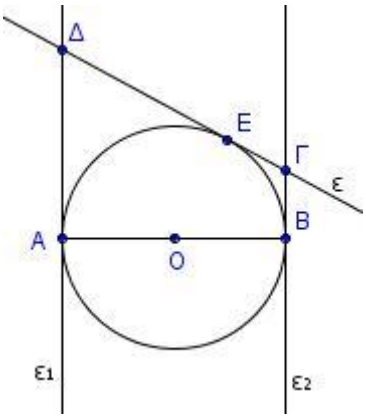
**i.** $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}=180^{\circ}+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ παριστάνουν τις εξωτερικές γωνίες των $\hat{A},\hat{B}$ αντίστοιχα. μ 10

**ii.** Η εξωτερική διχοτόμος της Α τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το μέρος του Β) σε σημείο Ζ. μ 8

**β)** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και $A\hat{Z}B=15^{\circ}$, να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$. μ 7

**3739.** Δίνεται κύκλος (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ.

Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα με ΓΔ μη παράλληλο της ΑΒ.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. μ 6

**ii.** $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ μ 7

**iii.** Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο. μ 7

**β)** Αν η γωνία ΑΔΕ είναι $60^{\circ}$ και η ΟΔ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΔΟ. μ 5

(συμπληρώθηκε η εκφώνηση)

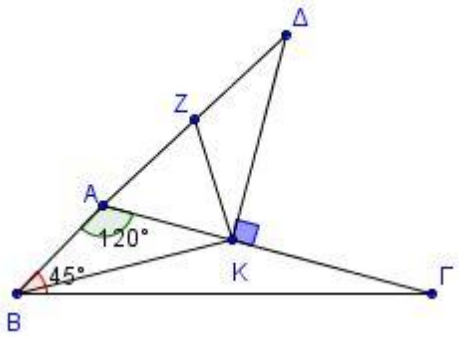
**3741.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2A\Delta$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος. μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές. μ 9

**γ)** Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ. μ 8

**3747.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με $120^\circ$ και γωνία Β ίση με $45^\circ$. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:



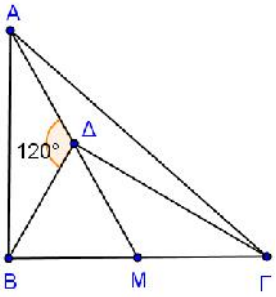

**α)** $A\hat{\Delta}K = 30^\circ$ μ 6

**β)** Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. μ 6

**γ)** Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Z\hat{K}B = 90^\circ$ μ 6

**δ)** Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ. μ 7

**3751.** Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Έστω ότι Δ είναι το μέσο της ΑΜ τέτοιο, ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και γωνία $A\hat{\Delta}B = 120^\circ$.



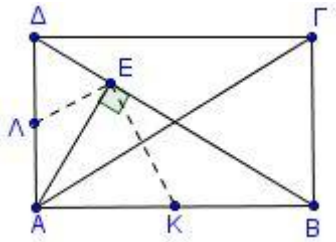

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΜ. μ 5

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο. μ 6

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ είναι ίσα. μ 6

**δ)** Αν το σημείο Κ είναι η προβολή του Δ στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι $2MK = A\Delta$. μ 8

**3754.** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε $AE \perp B\Delta$. Έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:

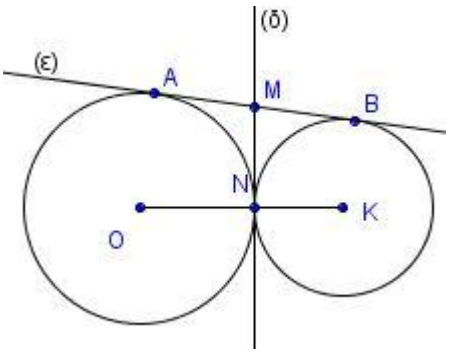



**α) i.** Να αποδείξετε ότι: $K\hat{E}\Lambda = 90^\circ$ μ 8

**ii.** $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ μ 8

**β)** Αν $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$. μ 9

**3777 .** Δύο κύκλοι $(O,\rho_1)$, $(K,\rho_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α,Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

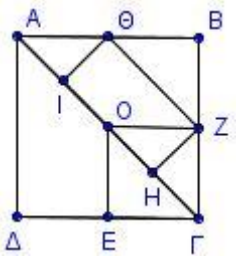



**α)** Το Μ είναι μέσο του ΑΒ. μ 7

**β)** $O\widehat{M}K = 90^\circ$ μ 9

**γ)** $A\hat{N}B = 90^\circ$ μ 9

**3806.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

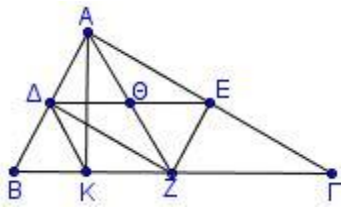



**α)** Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο. μ 7

**β)** $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$ μ 8

**γ)** Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο με $\Theta Z = 2\Theta I$. μ 10

**3808.** Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. μ 8

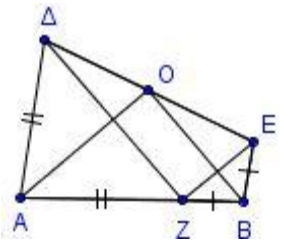
**ii.** $A\Theta=\Theta E=\dfrac{B\Gamma}{4}$ μ 7

**β)** Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma}=30^{\circ}$,

**i.** να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ μ 5

**ii.** να αποδείξετε ότι $BK=\dfrac{B\Gamma}{4}$ μ 5

**3811.** Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ με $A\Delta \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB=A\Delta+BE$ και Ο το μέσο της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο, ώστε $AZ=A\Delta$ και $BZ=BE$. Αν η γωνία $\Delta\hat{A}Z=\varphi$,

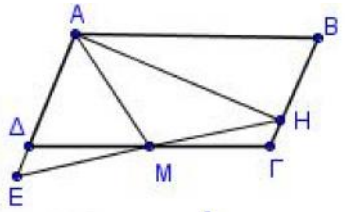



**α)** να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ. μ 8

**β)** να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ. μ 8

**γ)** να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα. μ 9

**3815.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB=2B\Gamma$, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

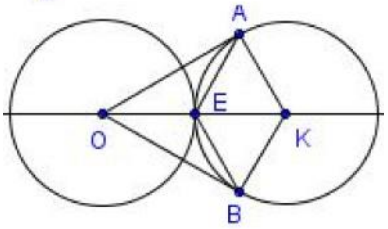



**α)** Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. μ 9

**β)** Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. μ 8

**γ)** $\hat{E}=\Delta\hat{M}A$ μ 8

**3908.** Δύο ίσοι κύκλοι $(O,\rho)$ και $(K,\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο $(K,\rho)$, να αποδείξετε ότι:




**α)** $AE=BE$ μ 9

**β)** $A\hat{O}K=30^{\circ}$ μ 8

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. μ 8

**3961.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

**α)** $\hat{B}=B\hat{A}M$ μ 8

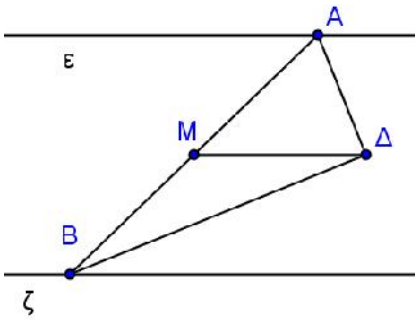
**β)** $A\hat{\Delta}H=\Delta\hat{A}H$. μ 9

**γ)** Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. μ 8

**3994.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda=AE$ και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\Delta K=A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

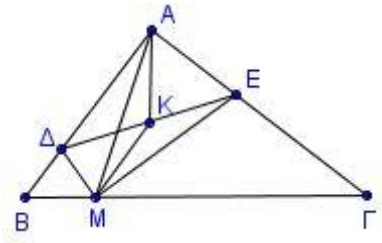
**α)** $K\Delta = \Lambda E$ μ 6
**β)** Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. μ 9
**γ)** Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. μ 10

**4559.** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:




**α)** $B\hat{\Delta}A = 90^\circ$ μ 9
**β)** $B\widehat{M}\Delta = 2M\hat{\Delta}A$ μ 8
**γ)** $M\Delta \parallel \varepsilon$ μ 8

**4562.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

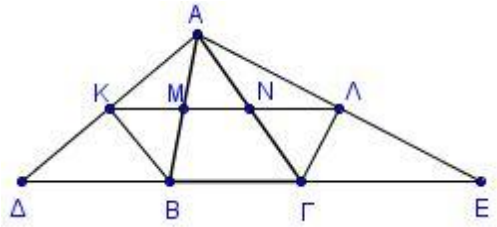



**α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή. μ 12
**β)** Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι $MK = KA$. μ 13

**4565.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

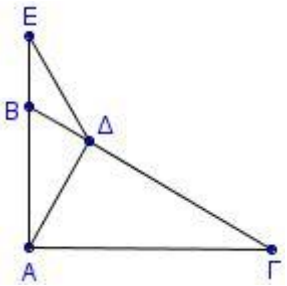
**α)** $N\hat{K}M = N\widehat{M}K$ μ 7
**β)** Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. μ 9
**γ)** $AM = KN + \Lambda P$. μ 9

**4611.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στη προέκταση της ΒΓ προς το Γ, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma E = A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



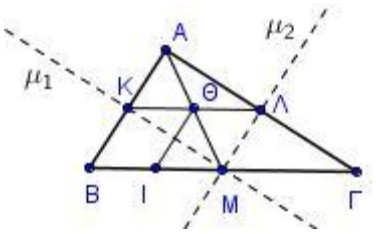

**α)** Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. μ 8
**β)** Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή. μ 9
**γ)** $K\Lambda = \dfrac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$ μ 8

**4635.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.
Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $BE = B\Delta$.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. μ 9
**β)** Να αποδείξετε ότι:
**i.** $BE = \dfrac{AB}{2}$ μ 8
**ii.** $AE = \Gamma\Delta$ μ 8

**4786.** Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

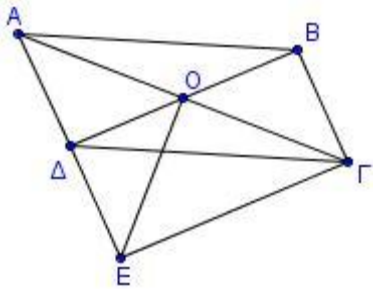
**i.** Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. μ 5

**ii.** Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο. μ 7

**iii.** $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ. μ 6

**β)** Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο, ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο. μ 7

**4791.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή να τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

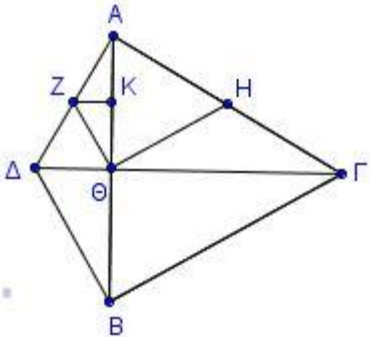



**α)** Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές. μ 7

**β)** Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 9

**γ)** Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές. μ 9

**4795.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{\Delta} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

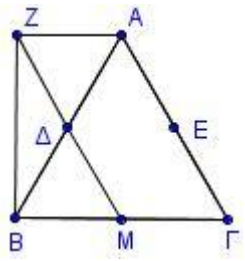



**α)** Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. μ 8

**β)** Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΖΘΗ είναι ορθή. μ 9

**γ)** Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$. μ 8

**4797.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στη προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



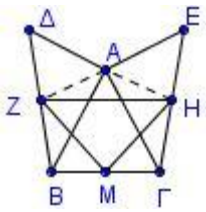

**α)** Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα. μ 6

**β)** Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**γ)** Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. μ 7

**δ)** Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ. μ 6

**4799.** Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $A\Delta = AE$.
Θεωρούμε τα μέσα Ζ,Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. μ 7

**ii.** Το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές. μ 6

**iii.** Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ. μ 7

**β)** Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:

«1. $A\Delta = AE$ από την υπόθεση

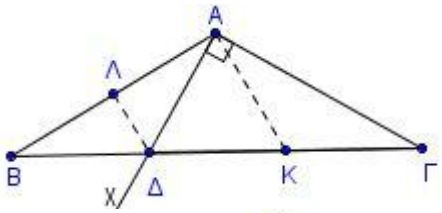
2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις; μ 5

**4801.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Αχ κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:



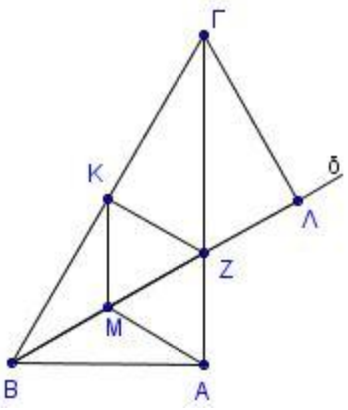

**α)** Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές. μ 8

**β)** $\Delta\Gamma = 2B\Delta$ μ 8

**γ)** $\Lambda\Delta \parallel A K$ μ 5

**δ)** $AK = 2\Lambda\Delta$ μ 4

**4802.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ, να αποδείξετε ότι:



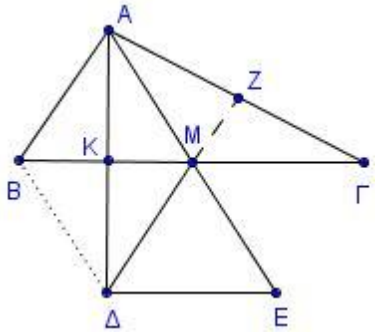

**α)** Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές. μ 6

**β)** Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. μ 6

**γ)** $\Gamma Z = 2ZA$ μ 7

**δ)** $B\Lambda = A\Gamma$ μ 6

**4803.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:



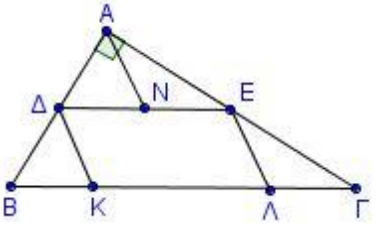

**α)** $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$. μ 7

**β)** Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. μ 6

**δ)** Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσον του Ζ. μ 6

**4816.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ,Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

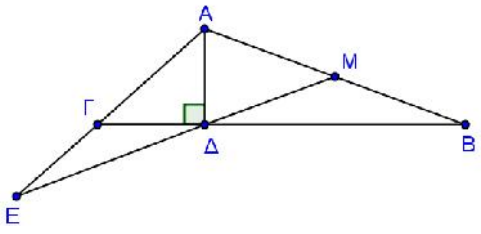



**α)** $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$ μ 10

**β)** Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$. μ 8

**γ)** $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$ μ 7

**4818.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ $(AB > A\Gamma)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:



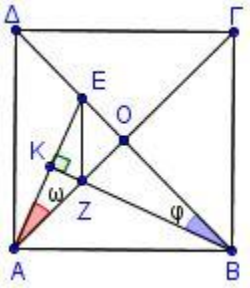

**α)** $\hat{B} = \hat{E}$ μ 8

**β)** $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\widehat{M}\Delta$ μ 10
**γ)** $\Gamma E < A\Gamma$ μ 7

## ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ - ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ

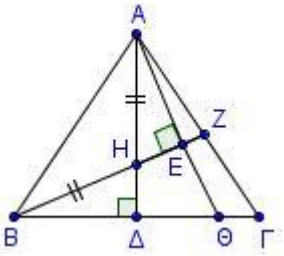
### 4ο ΘΕΜΑ

**3725.** Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



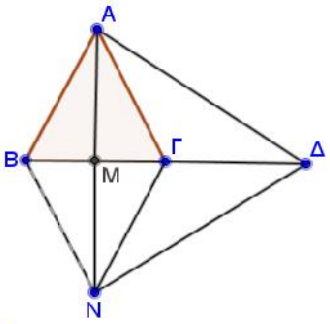

**α)** Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες. μ 6
**β)** $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$. μ 12
**γ)** Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. μ 7

**3732.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο, ώστε $HA = HB$. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.



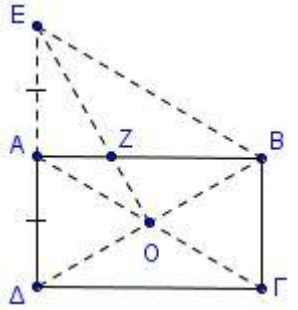

**α)** Να αποδείξετε ότι:
**i.** Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα.
**ii.** $\Delta\Theta = \Theta Z$
**iii.** Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.
**β)** Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**3745.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



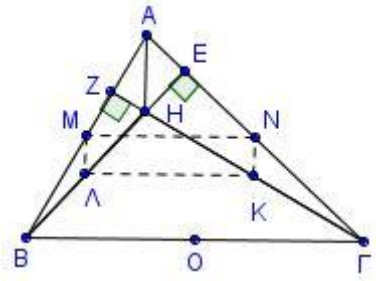

**α)** Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος. μ 8
**β)** Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. μ 8
**γ)** Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. μ 9

**3757.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta A = AE$.




**α)** Να αποδείξετε ότι:
**i.** Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8
**ii.** Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. μ 9
**β)** Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$. μ 8

**3796.** Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β,Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

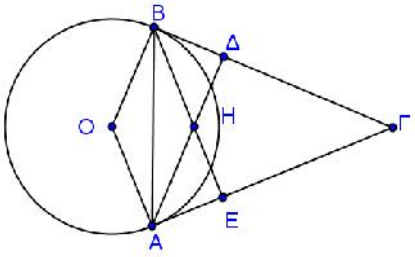
**i.** $ΜΝ = ΛΚ$ μ 6

**ii.** $ΝΚ = ΜΛ = \frac{ΑΗ}{2}$ μ 6

**iii.** Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. μ 6

**β)** Αν Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $M\hat{O}K = 90^\circ$. μ 7

**4606.** Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

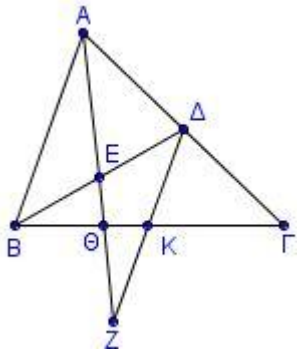



**α)** Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. μ 8

**β)** Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. μ 9

**γ)** Τα σημεία Ο,Η,Γ είναι συνευθειακά. μ 8

**4619.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $ΕΖ = ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

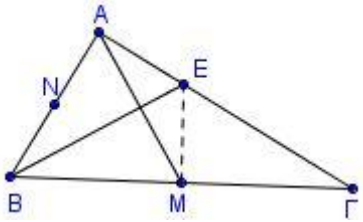



**α)** Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**β)** Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**γ)** Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. μ 9

**4646.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.




**α)** Να αποδείξετε ότι:

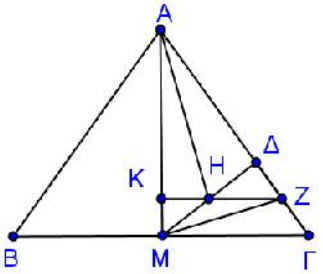
**i.** η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. μ 6

**ii.** $ΑΕ = \frac{ΓΕ}{2}$ μ 6

**iii.** η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. μ 7

**β)** Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. μ 6

**4731.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

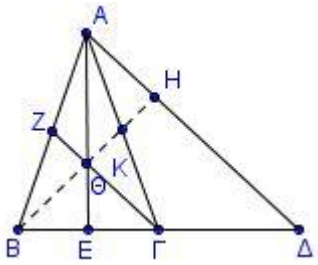



**α)** $ΗΖ = \frac{ΒΓ}{4}$ μ 9

**β)** $ΜΖ \parallel ΒΔ$ μ 8

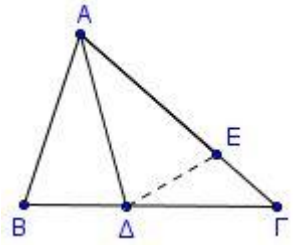
**γ)** Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ. μ 8

**4812.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ .
Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$ .
Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 9
**β)** $ΑΗ = ΘΓ$ μ 9
**γ)** $ΑΗ = 2ΖΘ$ μ 7

**5898.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΒ$ .Να αποδείξετε ότι:

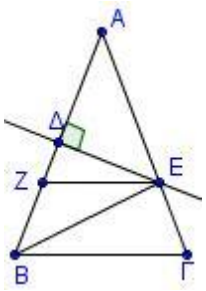



**α)** τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. μ 7
**β)** η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ. μ 9
**γ)** αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. μ 9

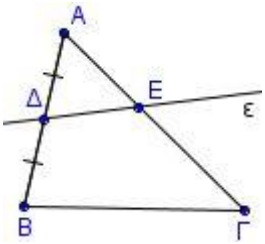
# ΤΡΑΠΕΖΙΟ

## 2ο ΘΕΜΑ

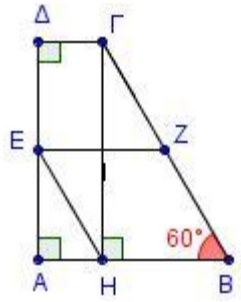
**2817.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = AB$.
Να αποδείξετε ότι:
**α)** τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. μ 7
**β)** η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ. μ 9
**γ)** αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. μ 9



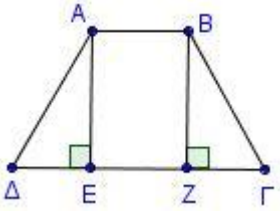

**2831.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ κι σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.
**α)** Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 12
**β)** Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ13



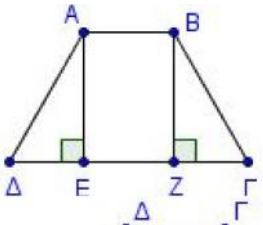

**2850.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
**α)** $AB = 3\Gamma\Delta$ μ 12
**β)** Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13



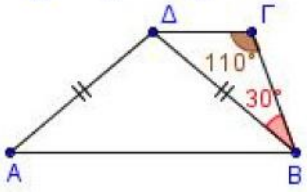

**3414.** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \| \Gamma\Delta)$ με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 12$ και $\Gamma\Delta = 20$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
**α)** Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Gamma Z$ και $AB = EZ$. μ 12
**β)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου. μ13




**3415.** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \| \Gamma\Delta)$.
Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:
**α)** $\Delta E = \Gamma Z$ μ12
**β)** $AZ = BE$ μ 13




**4973.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \| \Gamma\Delta)$ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$. μ 25

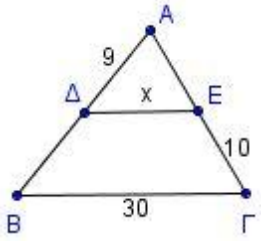


**5007.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\Delta Z = \Gamma E$ μ 13

**β)** Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή. μ 12

**5113.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

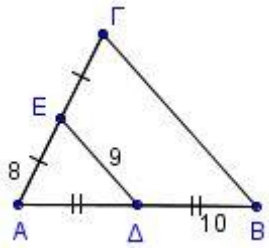



**α)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. μ 8

**γ)** Να υπολογίσετε το μήκος χ του τμήματος ΔΕ. μ 8

**5114.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $AE = 8$, $E\Delta = 9$ και $B\Delta = 10$.

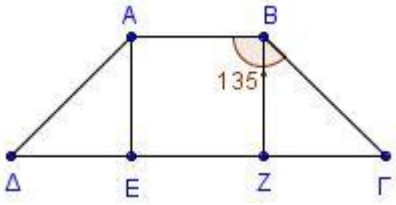



**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. μ 8

**β)** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. μ 8

**γ)** Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. μ 9

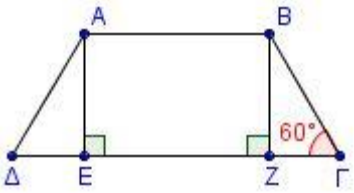
**5167.** Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. μ 10

**β)** Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$. μ 15

**5565.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

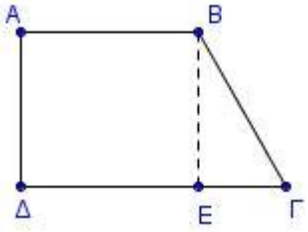



**α)** Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. μ 6

**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα. μ 10

**γ)** Να υπολογίσετε τη περίμετρο του ΑΒΓΔ. μ 9

**5566.** Δίνεται τραπέζιο $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.



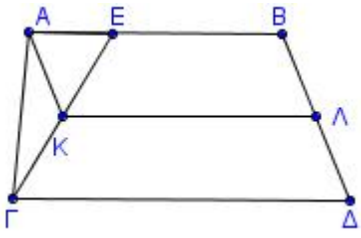

Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.

**α)** Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. μ 8

**β)** Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$. μ 9

**γ)** Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΝ. μ 8

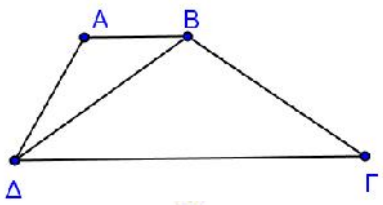
**5577.** Δίνεται τραπέζιο $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.




**α)** Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ. μ 13

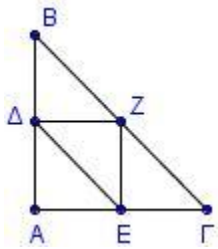
**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. μ 12

**5585.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^\circ$ και $A\hat{\Delta}B = 25^\circ$, να υπολογίσετε:



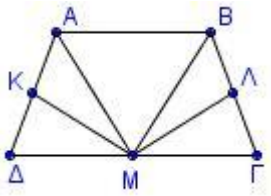

**α)** Τη γωνία Γ. μ 11
**β)** Τη γωνία Α. μ 14

**5612.** Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



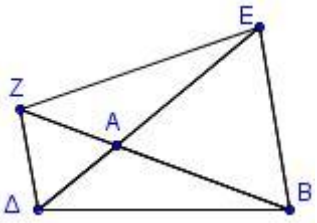

Να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο. μ 12
**β)** Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 13

**5617.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.




Να αποδείξετε ότι:
**α)** $KM = \Lambda M$ μ 12
**β)** $AM = BM$ μ 13

**5644.** Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:

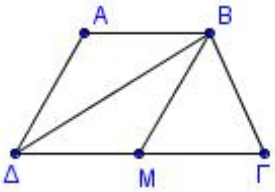



**α)** Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. μ 12
**β)** Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 13

**6583.** Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $AN = K\Gamma$.
**α)** Να αποδείξετε ότι:
**i.** τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα. μ 8
**ii.** το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8
**β)** Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο. μ 9

**6585.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,
**α)** να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$. μ 12
**β)** να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. μ 13

**6590.** Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε

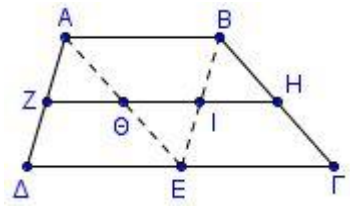



$AB = A\Delta = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$,

$\hat{\Delta} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
**α)** η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. μ 9
**β)** η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. μ 16

## 4ο ΘΕΜΑ

**2794.** Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \| \Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης Ζ,Η,Ε είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ,Ι αντίστοιχα.




**α)** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 10

**β)** Να δείξετε ότι τα σημεία Θ,Ι είναι μέσα των ΑΕ,ΒΕ αντίστοιχα. μ 5

**γ)** Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$. μ 10

**2802.** Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ,ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ,Ν μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα.

**α)** Αν τα Α,Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

**i.** να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

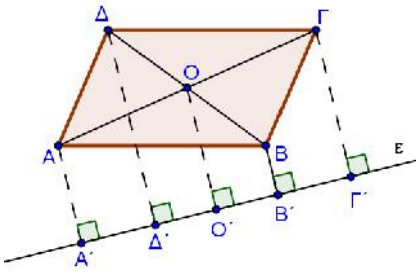
1) $A\Delta < B\Gamma$ μ 4

2) $A\Delta = B\Gamma$. μ 4

**ii.** να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. μ 6

**β)** Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ,Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 9 +2

**2808.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε.




**α)** Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3, BB' = 2, \Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. μ 8

**ii.** Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄. μ 9

**β)** Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 8

**3693.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

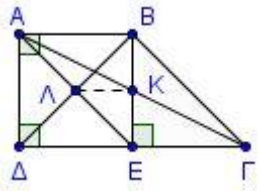
**α)** Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. μ 6

**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. μ 6

**γ)** Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. μ 6

**δ)** Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 7

**3698.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ$, $\Delta\Gamma=2AB$ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$ .Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $\hat{\Gamma}=45^\circ$ μ 8

**β)** $B\Delta=AE$ μ 9

**γ)** $K\Lambda=\frac{1}{4}\Delta\Gamma$ μ 8

**3706.** Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄
και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

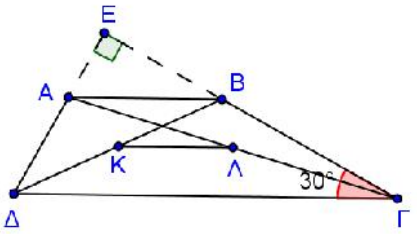
**α)** Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την (ε) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄. μ 10

**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ είναι τραπέζιο ***ή ορθογώνιο***. μ 8

**γ)** Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 7

(Συμπληρώθηκε η εκφώνηση για να ισχύουν τα ζητούμενα)

**3709.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB\|\Gamma\Delta)$ με τη γωνία Γ ίση με $30^\circ$ και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

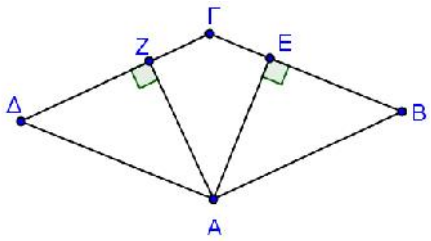



**α)** $AB=2AE$ μ 10

**β)** $K\Lambda=A\Delta$ μ 10

**γ)** Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;
Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας. μ 5

**3718.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $\hat{B}\neq 60^\circ$ . Θεωρούμε $AZ\perp\Gamma\Delta$ και $AE\perp\Gamma B$.




Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. μ 6

**β)** Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ. μ 9

**γ)** Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 10

(Συμπληρώθηκε η εκφώνηση για να ισχύουν τα ζητούμενα)

**3724.** Δίνεται κύκλος $(O,R)$ με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ΄ ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

**α)** Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. μ 8

**ii.** $\Gamma\Delta=A\Delta+B\Gamma$ μ 8

**β)** Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

**3734.** Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \| \Gamma\Delta)$ είναι $AB = A\Delta$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. μ 7

**β)** Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος. μ 10

**γ)** Αν επιπλέον είναι $B\hat{A}\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ. μ 8

**3737.** Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.

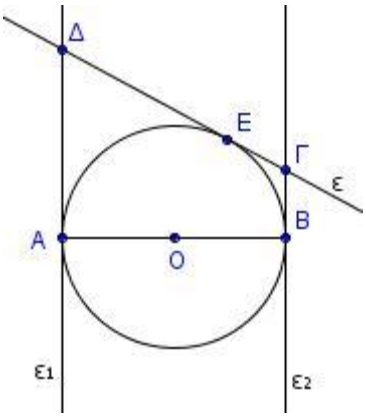
Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. μ 6

**β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. μ 10

**γ)** Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ. μ 9

**3739.** Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ στα Δ και Γ αντίστοιχα με ΓΔ μη παράλληλο της ΑΒ.




α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. μ 6

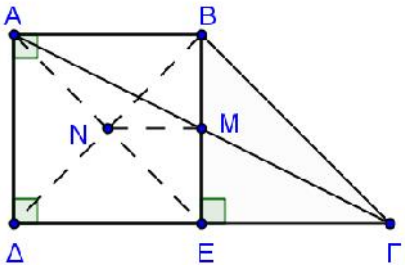
ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ μ 7

iii. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο. μ 7

β) Αν η γωνία ΑΔΕ είναι $60^\circ$ και η ΟΔ τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΔΟ. μ 5

(συμπληρώθηκε η εκφώνηση)

**3765.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$.




Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

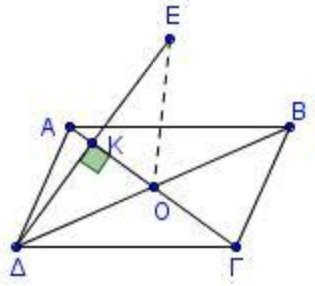
**α)** $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ μ 6

**β)** Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 6

**γ)** $MN = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ μ 7

**δ)** $AE \perp B\Delta$ μ 6

**3775.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκταση του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

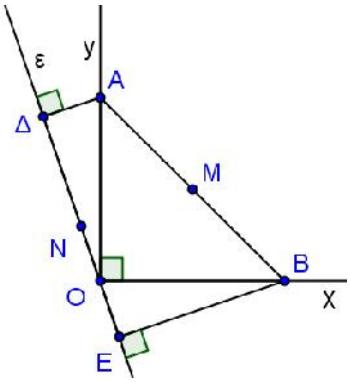



**α)** $EO = \frac{B\Delta}{2}$ μ 8

β) $\Delta\hat{E}B = 90^\circ$ μ 8

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 9

**3798.** Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y = 90^\circ$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Oy,Ox με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ο και αφήνει τις ημιευθείες Οχ, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.




Να αποδείξετε ότι:

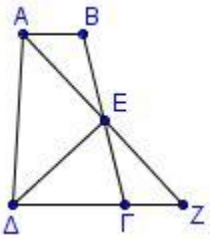
**α)** Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα. μ 7

**β)** $A\Delta + BE = \Delta E$ μ 7

**γ)** $MN = \frac{\Delta E}{2}$, όπου ΜΝ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ. μ 7

**δ)** Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. μ 4

**3810.** Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

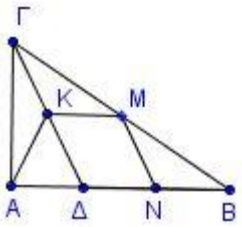



**α)** Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. μ 7

**β)** Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ. μ 10

**γ)** Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. μ 8

**3820.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ,Μ,Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

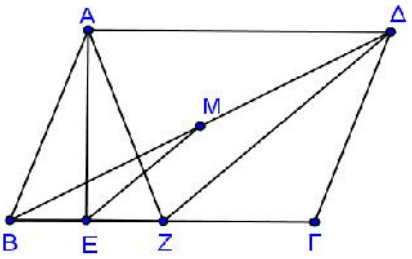



**α)** Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**β)** Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 9

**γ)** Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με ΑΒ/2. μ 8

**3822.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με $70^\circ$ και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.

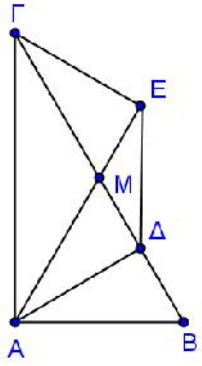



**α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 8

**β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ μ 9

**γ)** Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$. μ 8

**3824.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο. μ 8

**β)** $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$ μ 9

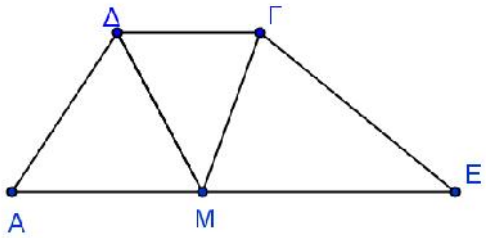
**γ)** Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 8

**3911. α)** Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος. μ 13

**β)** Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα

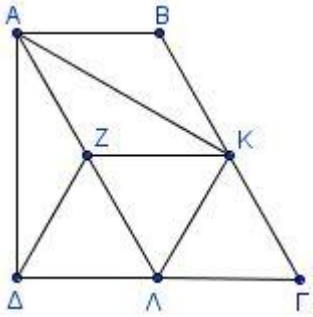
είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας. μ 12

**4569.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:



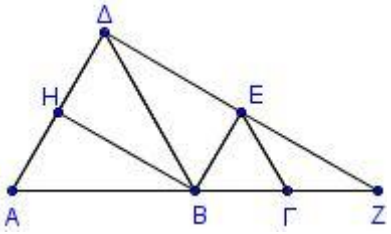

**α)** Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές. μ 8
**β)** Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές. μ 9
**γ)** Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. μ 8

**4599.** Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ\right)$ με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



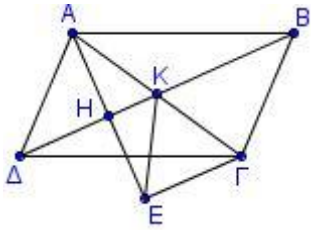

**α)** $B\Gamma = 2\Delta Z$. μ 8
**β)** Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος. μ 9
**γ)** $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$. μ 8

**4626.** Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την (ε) στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:



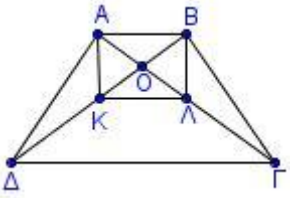

**α)** Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο. μ 8
**β)** Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές. μ 8
**γ)** Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 9

**4630.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:



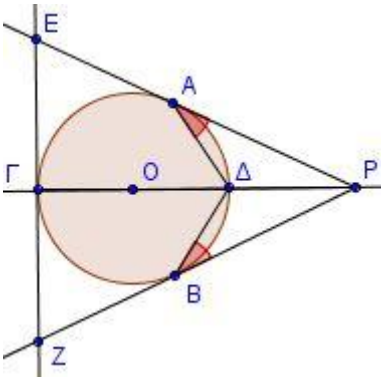

**α)** Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. μ 7
**β)** Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. μ 9
**γ)** Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 9

**4645.** Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $A\Delta = B\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.




**α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. μ 8
**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. μ 8
**γ)** Αν επιπλέον ισχύει ότι $\Gamma\Delta = 3AB$ και Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο. μ 9

**4648.** Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ και τη διακεντρική ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

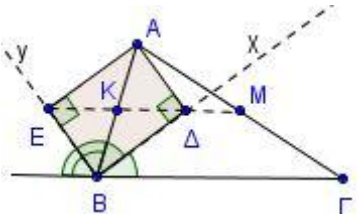



**α)** $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$ μ 8

**β)** $EA = ZB$ μ 9

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 8

**4650.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:




α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. μ 7

**β)** Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη Β και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. μ 10

**γ)** Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = B\Gamma$. μ 8

**4653.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ. Αν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. μ 7

**β)** $Z\Gamma = 2OE$ μ 9

**γ)** Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 9

**4655.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.

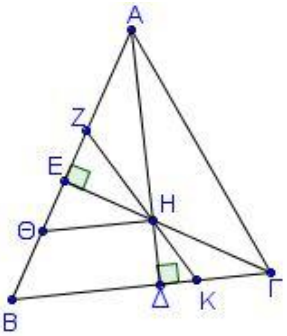
**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. μ 7

**ii.** Τα σημεία Ε,Γ και Ζ είναι συνευθειακά. μ 9

**β)** Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$. μ 9

**4737.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

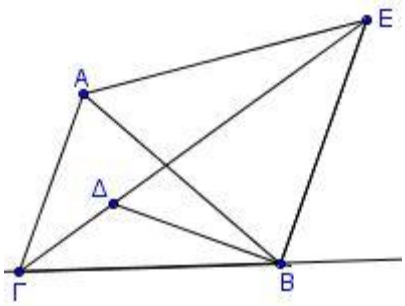



**α)** $ZH = 2ZE$ μ 9

**β)** Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρος. μ 8

**γ)** Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 8

**4765.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Δ. Η εξωτερική διχοτόμος της Β τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε. Δίνεται ότι $A\hat{B}E = 70^\circ = 2\Gamma\hat{E}B$.

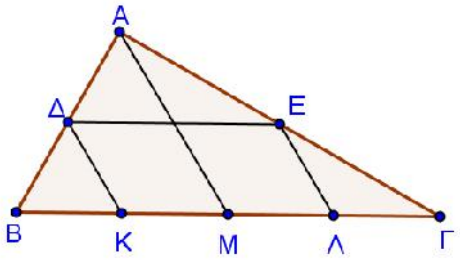



**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 8

**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΕ είναι τραπέζιο. μ 9

**γ)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές. μ 8

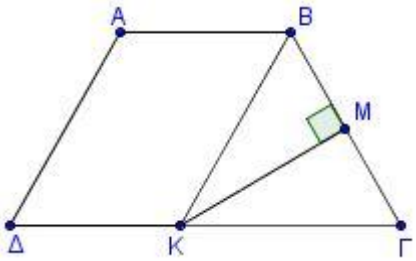
**4767.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $ΒΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:




**α)** Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. μ 13

**β)** Η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ ισούται με $\frac{3}{8}ΒΓ$. μ 12

**4769.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $\hat{B} = 2\hat{Γ}$ και $ΑΒ = ΒΓ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ το τέμνει στο Μ.



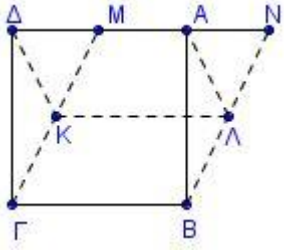

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. μ 10

**β)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. μ 8

**ii.** Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. μ 7

**4771.** Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $ΑΝ = \frac{ΑΔ}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.



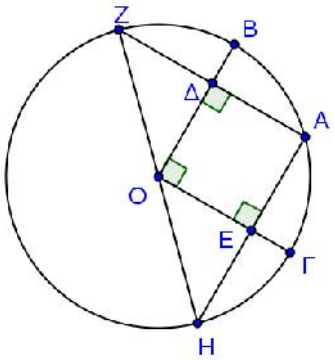

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**β)** Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο. μ 9

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 8

**4774.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ. Από το Α φέρουμε κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



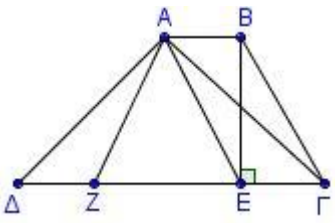

**α)** $ΑΖ = ΑΗ$ μ 4

**β)** Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο. μ 7

**γ)** Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά. μ 7

**δ)** Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 7

**4788.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΔΓ = 4ΑΒ$ και $ΒΓ = 2ΑΒ$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $ΔΖ = ΑΒ$. Αν η γωνία Γ είναι $60^\circ$ και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

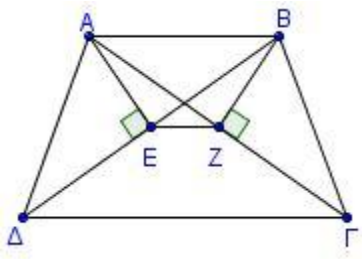



**α)** Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. μ 8

**β)** Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. μ 8

**γ)** Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. μ 9

**4790.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



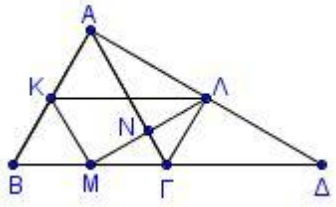

**α)** Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. μ 5

**β)** $AE = BZ$. μ 7

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 7

**δ)** Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. μ 5

**4792.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, τότε:



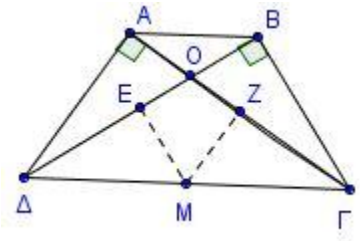

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. μ 7

**β)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. μ 8

**ii.** Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. μ 10

**4796.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ.Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ε και Ζ των ΓΔ,ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $ME = MZ$. μ 6

**β)** Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. μ 6

**γ)** Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα. μ 7

**δ)** Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. μ 6

**4832.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $\overset{\Delta}{AB}K = \overset{\Delta}{A\Gamma}K$ μ 6

**ii.** Το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές. μ 6

**iii.** Το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 7

**β)** Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

« Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB}K$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma}K$ έχουν

1. $BK = K\Gamma$
2. $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α
3. $A\hat{B}K = A\hat{\Gamma}K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία».

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία- Πλευρά –Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. μ 6

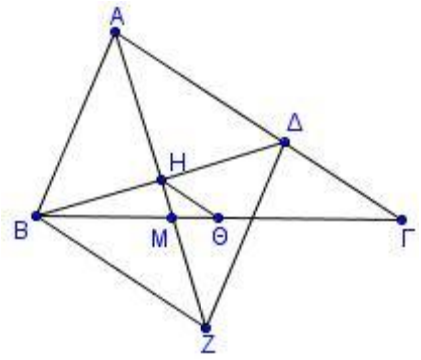
**5886.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

**α)** το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 8

**β)** οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες. μ 8

**γ)** οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. μ 9

**5902.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. μ 9

**β)** το τετράπλευρο ΗΒΖΘ είναι τραπέζιο. μ 9

**γ)** η διάμεσος του τραπεζίου ΗΒΖΘ είναι ίση με $\frac{AB + A\Gamma}{2}$. μ 7

**5911.** Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου. μ 8

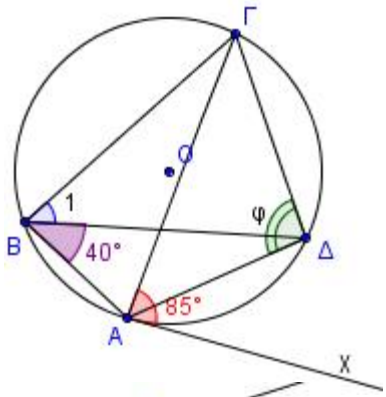
**ii.** $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$ μ 7

**β)** Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 10

## ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

### 2ο ΘΕΜΑ

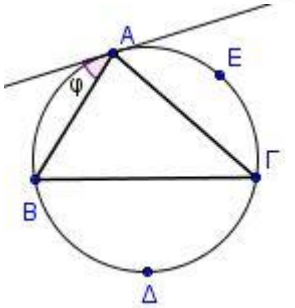
**2819.** Στο διπλανό σχήμα η Αχ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον $\Gamma\hat{A}x = 85^\circ$ και $\Delta\hat{B}A = 40^\circ$.




**α)** Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45^\circ$. μ 10

**β)** Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\varphi}$. μ 15

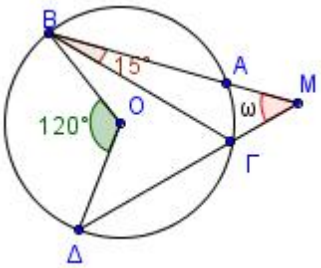
**3413.** Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι $160^\circ$,




**α)** να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 18

**β)** να βρείτε το μέτρο του τόξου $A\overset{\frown}{E}\Gamma$. μ 7

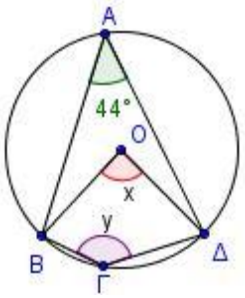
**5009.** Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι $120^\circ$ και η γωνία ΓΒΑ είναι $15^\circ$.




**α)** Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. μ 12

**β)** Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι $45^\circ$. μ 13

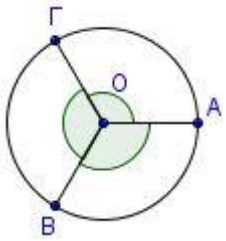
**5012.** Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία ΒΑΔ να είναι $44^\circ$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.




**α)** Να υπολογίσετε τη γωνία x. μ 12

**β)** Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι $136^\circ$. μ 13

**5037.** Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τρείς ίσες διαδοχικές γωνίες ΑΟΒ, ΒΟΓ και ΓΟΑ.

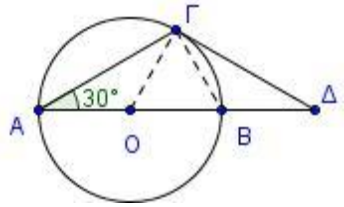



**α)** Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας ΑΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΟΓ. μ 10

**β)** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του. μ 8

**γ)** Αν με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΚ όπου Κ το μέσο της ακτίνας ΟΑ, γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ΟΒ, ΟΓ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα, τότε τα τόξα ΚΜ και ΑΒ είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. μ 7

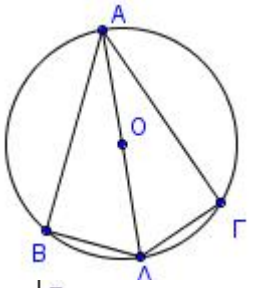
**5153.** Δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $B\widehat{A}\Gamma = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.




**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. μ 12

**β)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΓΒΔ είναι ίσα. μ 13

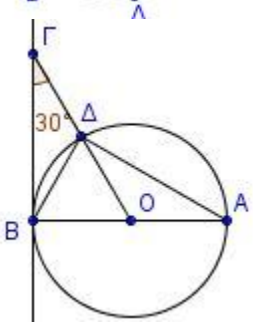
**5603.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:




**α)** Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. μ 10

**β)** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. μ 15

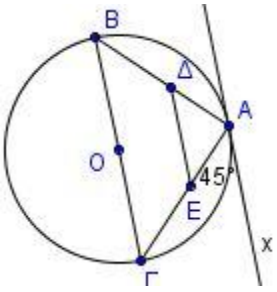
**5608.** Θεωρούμε κύκλο(Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με $30^\circ$. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ, να αποδείξετε ότι:




**α)** $O\Gamma = 2OA$ μ 12

**β)** $B\Gamma = A\Delta$ μ 13

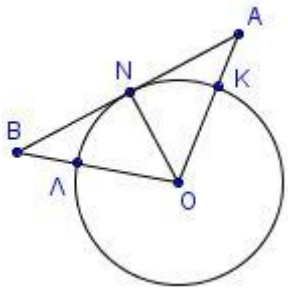
**5623.** Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία $45^\circ$. Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.



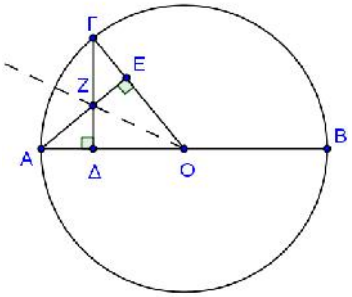

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. μ 10

**β)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. μ 15

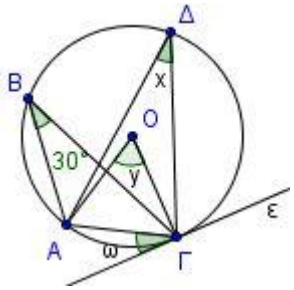
**5633.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια, ώστε $ΝΑ = ΝΒ$ . Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές. μ 13
**β)** Το σημείο Ν είναι το μέσο του τόξου ΚΛ. μ 12



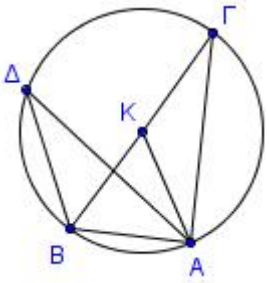

**5634.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ, να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές. μ 13
**β)** Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. μ 12




**6587.** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.
**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες χ,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. μ 15
**β)** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. μ 10

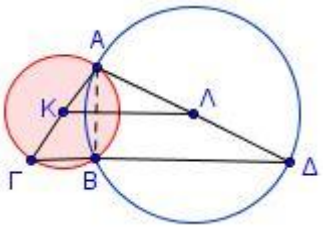



**6588.** Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο, ώστε $ΒΑ = ΚΓ$ . Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,
**α)** να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. μ 7
**β)** να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΑ. μ 9
**γ)** να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. μ 9

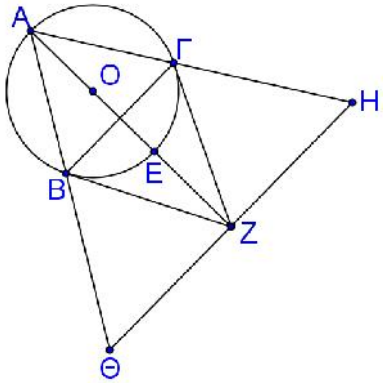



## 4ο ΘΕΜΑ

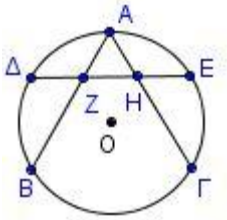
**2806.** Δύο κύκλοι (Κ, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία Α,Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:
**α)** $\hat{A B \Gamma} = 90^{\circ}$ μ 5
**β)** τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά. μ 10
**γ)** το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο. μ 10




**2810.** Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:
**α)** Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. μ 7
**β)** Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. μ 8
**γ)** Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο, με $ΒΘ = ΒΖ$ και $ΘΗ = 2ΒΓ$ . μ 10



**3714.** Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με $120^\circ$. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι:

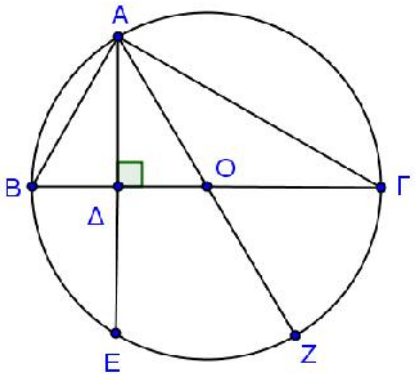



**α)** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. μ 8

**β)** Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους. μ 10

**γ)** Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ μ 7

**3759.** Δίνεται κύκλος ( Ο, R ) με διάμετρο ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Α του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Η προέκταση της ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.



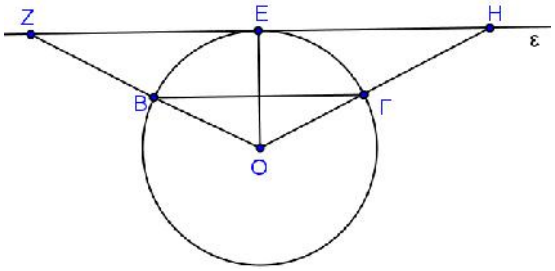

**α)** Να αποδείξετε ότι:

i. $ΖΓ = ΑΒ = ΒΕ$ μ 8

**ii.** Το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 7

**β)** Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου ΒΕΖΓ είναι ίση με 5R, όπου R η ακτίνα του κύκλου. μ 10

**3781.** Έστω κύκλος ( Ο, ρ ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ,ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $ΒΓ \parallel ΖΗ$ μ 5

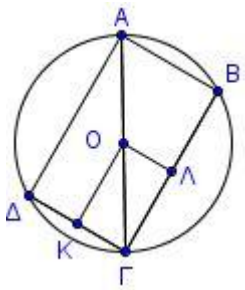
**β)** $ΟΖ = ΟΗ$ μ 5

**γ)** Αν Β το μέσον του ΟΖ

**i.** να αποδείξετε ότι $B\hat{E}Z = \frac{Z\hat{O}H}{4}$ μ 8

**ii.** να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ. μ 7

**4756.** Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές $ΑΔ = ΒΓ$. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



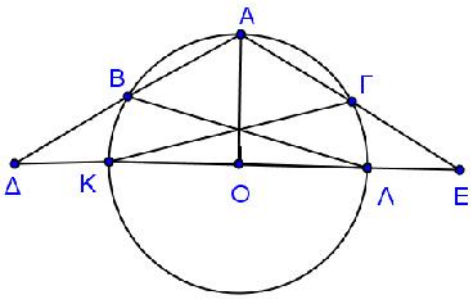

**α)** Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. μ 6

**β)** Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. μ 6

**γ)** Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. μ 7

**δ)** Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο. μ 6

**4804.** Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίναι ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $ΑΒ = ΑΓ = ρ$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:

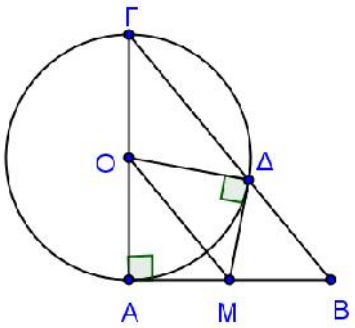



**α)** $B\hat{A}Γ = 120^\circ$ μ 7

**β)** Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα. μ 9

**γ)** $ΚΓ = ΛΒ$ μ 9

**4822.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$. Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

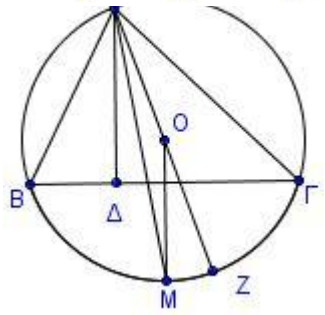



**α)** $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{B}$ μ 9

**β)** Το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές. μ 9

**γ)** Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. μ 7

**5910.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:




**α)** ΑΜ διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ. μ 8

**β)** $O\hat{A}\Gamma=\Delta\hat{A}B$ μ 8

**γ)** $\Delta\hat{A}O=\hat{B}-\hat{\Gamma}$ μ 9

**6879.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O,R)$. Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο, ώστε $\Delta B\perp B\Gamma$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $A\Delta\perp A\Gamma$ μ 8

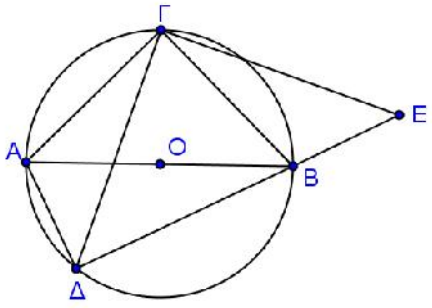
**β)** Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. μ 9

**γ)** Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $OM=\frac{AH}{2}$ μ 8

# ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

## 4ο ΘΕΜΑ

**2796.** Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και έστω ΑΒ μια διάμετρός του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε $BE=A\Delta$.



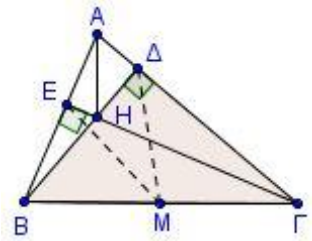

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. μ 8

**ii.** Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. μ 8

**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. μ 9

**2804.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Η και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ.



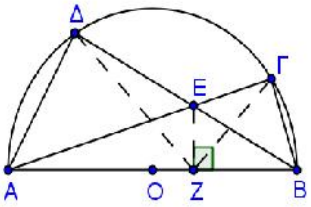

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $M\Delta=ME$ μ 10

**ii.** Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ και ότι $A\hat{H}\Delta=\hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. μ 5

**β)** Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ. μ 10

**3771.** Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $EZ \perp AB$ .Να αποδείξετε ότι:

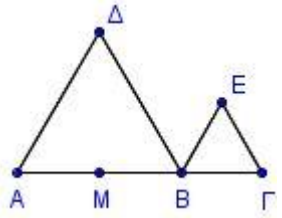



**α)** $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ μ 7

**β)** Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα. μ 9

**γ)** Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$ . μ 9

**3787.** Έστω Α,Β,Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$ . Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

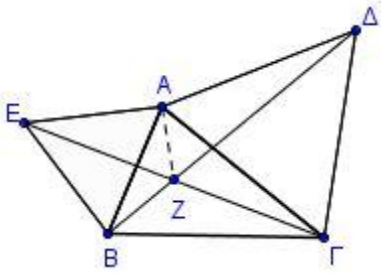



**α)** Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο $(A\Delta \parallel BE)$ μ 9

**β)** Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. μ 8

**γ)** Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. μ 8

**3793.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ , ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΔ, ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

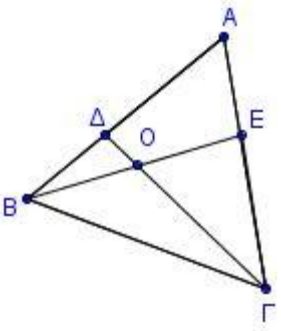



**α)** Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών. μ 10

**β)** Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. μ 10

**γ)** $B\hat{Z}\Gamma = 120^\circ$ . μ 5

**3800.** Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι $A\Delta = AE$ . Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.



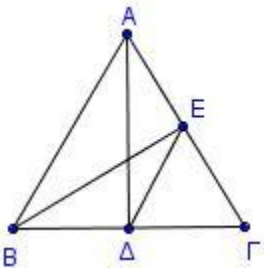

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ . μ 10

**ii.** $B\hat{O}\Gamma = 120^\circ$ . μ 10

**β)** Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 5

**3919.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:



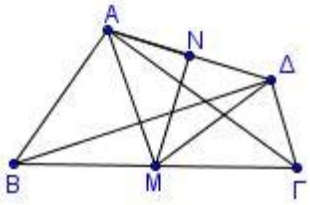

**α)** $B\Gamma = 2E\Delta$ . μ 6

**β)** $B\hat{E}\Delta = \dfrac{\hat{A}}{2}$. μ 7

**γ)** Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. μ 6

**δ)** $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$ . μ 6

**3966.** Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και Μ,Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

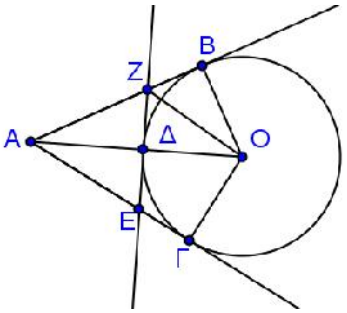



**α)** $AM = M\Delta$ μ 10

**β)** Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. μ 10

**γ)** $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. μ 5

**4753.** Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



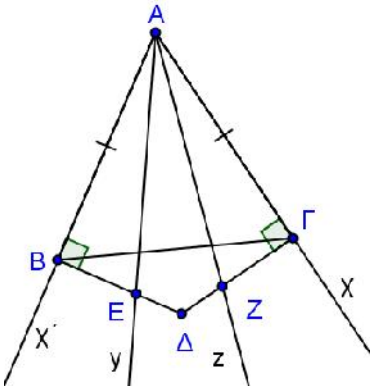

**α)** Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμομε $OA = 2OB$. μ 6

**β)** Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. μ 6

**γ)** $2ZB = AZ$. μ 7

**δ)** Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. μ 6

**4757.** Στις πλευρές Αx΄ και Αx γωνίας x΄Αx θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Αx΄ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Αy και Αz χωρίζουν τη γωνία x΄Αx σε τρείς ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

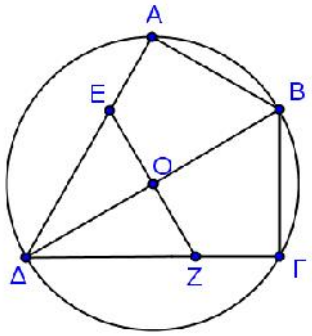



**α)** Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές. μ 8

**β)** Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας x΄Αx. μ 8

**γ)** Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. μ 9

**4793.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.



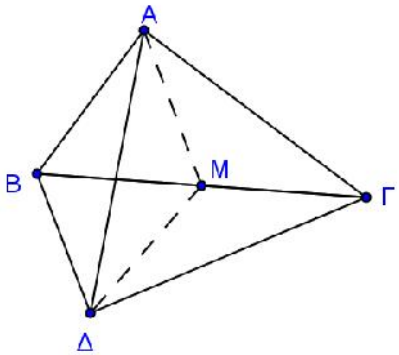

**α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. μ 6

**β)** Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. μ 6

**γ)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. μ 7

**δ)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. μ 6

**5895.** Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και ΔΒΓ $\left(\hat{\Delta} = 90^\circ\right)$ (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

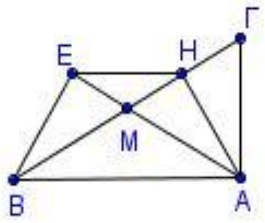



**α)** το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. μ 9

**β)** $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ μ 9

**γ)** $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ μ 7

**6878.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{\mathrm{A}}=90^{\circ}\right)$ έχουμε ότι $\widehat{\mathrm{B}}=30^{\circ}$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ μ 7

**β)** $\mathrm{AH}=\mathrm{BE}$ μ 7

**γ)** το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο. μ 6

**δ)** $\mathrm{EH}\,||\,\mathrm{AB}$. μ 5