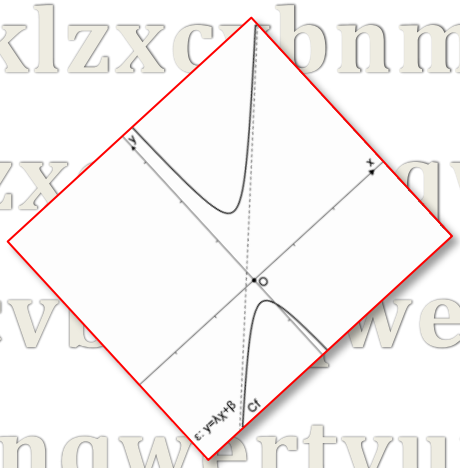
ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

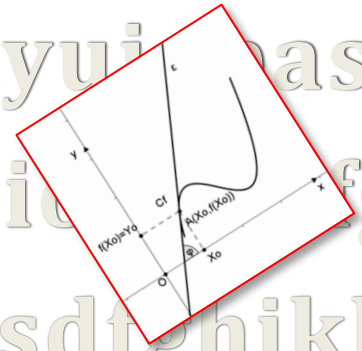
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

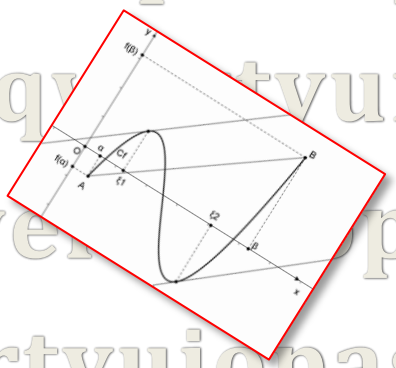
23/6/2016

Δ.Ε.ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ

Ψηφιακή Επιμέλεια : Μ.Ι.ΣΤΡΟΥΜΠΟΥΛΗ







Τελευταία ενημέρωση 23/6/16

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

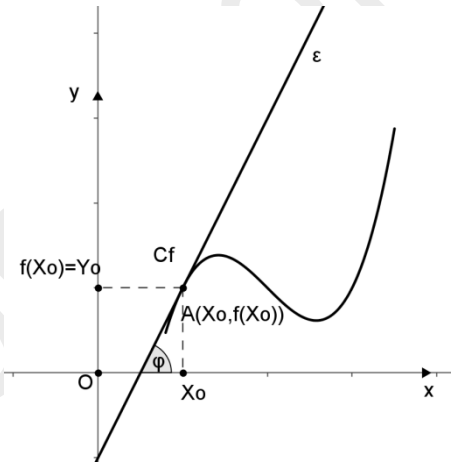
commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η
Πότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$, όπου f συνάρτηση.
Να γραφτεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

Απάντηση

Έστω f : συνάρτηση και $A(\chi_0, f(\chi_0)) \in C_f$. Αν υπάρχει το $\boxed{\lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \in \mathbb{R}}$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο Α , την ευθεία που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης το λ. Άρα $\boxed{\lambda = \varepsilon\varphi\varphi}$ και

$\boxed{\varepsilon: y - f(x_0) = \lambda.(x - x_0)}$ η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$.



ΕΡΩΤΗΣΗ 2η
Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0; Τι πρέπει να ισχύει με τα πλευρικά όρια ;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\chi_0 \in D_f$, αν υπάρχει το $\lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $f'(x_o) =$ παράγωγος της f στο χ_0 , δηλ.

2004 και 2009:

Θέμα 1ºΒ (5Μ)

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Προφανώς για να υπάρχει το όριο θα πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα, δηλ.

$$\boxed{\lim_{\chi\to\chi_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\chi\to\chi_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_o)}$$

- Ένας άλλος ορισμός για την $f'(x_o)$ είναι ο εξής:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Πράγματι : $f'(x_o) = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xRightarrow[\chi=\chi_0+h]{\chi-\chi_0=h\Rightarrow} f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\chi_0+h)-f(x_0)}{h}$.

- Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με $\Delta\chi$, ενώ το $f(x_0+h) - f(\chi_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(\chi_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται : $f'(x_o) = \lim_{\Delta\chi\to 0} \frac{\Delta f(\chi_0)}{\Delta\chi}$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο χ_0 με $\boxed{\frac{d f(\chi_0)}{dx} = \left.\frac{d f(x)}{dx}\right|_{x=x_0}}$

Θέμα 1ο (2000)

Α1 (4μονάδες)

Σημείωση

Λόγω του συμβολισμού $\mathbf{f'(x_o) = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda = εφφ}$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ θα δίνεται από τον τύπο : $\boxed{\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_o)\cdot(x - x_o)}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η
Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα , που συνδέει την παράγωγο και τη συνέχεια μιας συνάρτησης f στο $\chi=\chi_0$

Απάντηση

<<Έστω f συνάρτηση με Π.Ο.=Α και $\chi_0 \in A$ αν η f παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε και f συνεχής στο χ_0>>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού f παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε $f'(x_0) = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, για να δείξω ότι η f συνεχής στο x_0 αρκεί να δείξω ότι :

$$\boxed{f(x_0) = \lim_{\chi\to\chi_0} f(x)}$$

2000, 2003 και 2007(επαν): Θέμα 1ο Α(8,5Μ-8Μ-10Μ)
2009: Θέμα 1ο Σ-Λ(2Μ)

Για $\chi \neq \chi_0$ έχουμε :

$$\lim_{\chi\to\chi_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{\chi\to\chi_0}[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)]$$
$$= \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{\chi\to\chi_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Άρα : $\lim_{\chi\to\chi_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\chi\to\chi_0} f(x) = f(x_0)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

2016(επαν), 2012(επαν) : ΘΕΜΑ 1ο Σ-Λ

- Όπως σε κάθε θεώρημα έτσι και εδώ ισχύει η αντιθετοαντιστροφή:

<<Έστω f συνάρτηση με Π.Ο.=Α και $\chi_0 \in A$ αν η f ΌΧΙ συνεχής στο χ_0 τότε και f ΌΧΙ παραγωγίσιμη στο χ_0>>

2011(επαν) και 2004(επαν)
Θέμα 1° Σ-Λ(2Μ)

- **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει δηλαδή : **Αν η f είναι συνεχής στο $\chi_0 \in \mathbf{A = \Pi.O.}$, δεν είναι απαραίτητο ότι είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.**

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

- **Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο.=Α;**
- **Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)$\subset \mathbf{A = \Pi.O.}$;**
- **Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] $\subset \mathbf{A = \Pi.O.}$;**
- **Τι ονομάζεται 1η παράγωγος της f ή παράγωγος της f, τι 2η παράγωγος και τι νιοστή παράγωγος της f;**

Απάντηση

2010(επαν)
Θέμα 1° Α2
(4Μ)

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο.= Α , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\chi_0 \in A$.
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta) \subset A = \Pi.O.$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$.
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] \subset A = \Pi.O.$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ και ισχύει:

$$\lim_{\chi\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\ ,\ \lim_{\chi\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$$

- Έστω f μία συνάρτηση με Π.Ο. το Α και $A_1 \subseteq A$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $\chi \in A_1$ στο $f'(\chi) = (f(x))'$, ορίζουμε τη συνάρτηση f' , η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f . Την f' μπορούμε να την συμβολίσουμε και με $\frac{df}{dx}$.
- Προφανώς η παράγωγος της f' είναι η δεύτερη παράγωγος της f και f''= (f')' .
- Γενικεύοντας με επαγωγική μέθοδο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η νιοστή παράγωγος της f για $\nu \geq 3$ θα συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$ και θα ισχύει $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η
Να συμπληρωθούν και να αποδειχθούν :

$(\mathbf{c})' = \ldots\ ,\ \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

- Έστω f(x)=c , c ∈ ℝ
- Π.Ο.= ℝ
- Για κάθε $\chi_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x_o) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$

  Άρα $(c)' = 0\ ,\ \ c \in \mathbb{R}$

$(\chi)' = \ldots$

Απόδειξη

- Έστω f(x)=χ
- Π.Ο.= ℝ
- Για κάθε $\chi_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x_o) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{\chi-x_0}{x-x_0} = 1$

  Άρα $(\chi)' = 1$.

$(\chi^\nu)' = \ldots \qquad , \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N} - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

Απόδειξη

- Έστω f(x)= χ^ν
- Π.Ο.= ℝ
- Για κάθε $\chi_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x_o) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{\chi^\nu - {\chi_0}^\nu}{x-x_0} =$

$$\lim_{\chi \to \chi_0} \frac{(\chi - \chi_0)(\chi^{\nu-1} + \chi^{\nu-2} \cdot \chi_0 + \chi^{\nu-3} \cdot {\chi_0}^2 + \cdots + \chi^2 \cdot {\chi_0}^{\nu-3} + \chi \cdot {\chi_0}^{\nu-2} + {\chi_0}^{\nu-1})}{x - x_0}$$

$$\lim_{\chi \to \chi_0} (\chi^{\nu-1} + \chi^{\nu-2} \cdot \chi_0 + \chi^{\nu-3} \cdot {\chi_0}^2 + \cdots + \chi^2 \cdot {\chi_0}^{\nu-3} + \chi \cdot {\chi_0}^{\nu-2} + {\chi_0}^{\nu-1})$$

$${\chi_0}^{\nu-1} + {\chi_0}^{\nu-2} \cdot \chi_0 + {\chi_0}^{\nu-3} \cdot {\chi_0}^2 + \cdots + {\chi_0}^2 \cdot {\chi_0}^{\nu-3} + \chi \cdot {\chi_0}^{\nu-2} + {\chi_0}^{\nu-1}$$

$$= {\chi_0}^{\nu-1} + {\chi_0}^{\nu-1} + {\chi_0}^{\nu-1} + \cdots + {\chi_0}^{\nu-1} + {\chi_0}^{\nu-1} + {\chi_0}^{\nu-1} = \nu \cdot {\chi_0}^{\nu-1}$$

Άρα $(\chi^\nu)' = \nu \cdot \chi^{\nu-1}$.

commonmaths

2009(επαν)και 2005(επαν) : ΘΕΜΑ 1° Α1 (9Μ)

$(\sqrt{\chi})' = \ldots \quad , \chi > 0$

Απόδειξη

- Έστω f(x)=$\sqrt{\chi}$,
- Π.Ο.= $[0, +\infty)$
- Για κάθε $\chi_0 \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f'(x_o) = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi_0}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{(\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi_0})(\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi_0})}{(x-x_0)(\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi_0})} = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{\sqrt{\chi}^2-\sqrt{\chi_0}^2}{(x-x_0)(\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi_0})} =$$

$$= \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi_0})} = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi_0}} = \frac{1}{\sqrt{\chi_0}+\sqrt{\chi_0}} = \frac{1}{2\sqrt{\chi_0}}.$$

Άρα $(\sqrt{\chi})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$, $\chi > 0$

$(\eta\mu\chi)' = \ldots$

2010(επαν) : ΘΕΜΑ 1° Α1 (8Μ)

$(\sigma\upsilon\nu\chi)' = \ldots$

2006(επαν)-2011(επαν) : ΘΕΜΑ 1° Α1 (10Μ), 2015 (Σ-Λ)

$(e^{\chi})' = \cdots$

$(\ln\chi)' = \ldots \quad , \chi > 0$

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο χ_0 , να δειχθεί ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει :

$$\boxed{(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(\chi_0) = \mathbf{f}'(\chi_0) + \mathbf{g}'(\chi_0)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $F(x)=f(x)+g(x)$,
- Π.Ο.= A
- Για κάθε $\chi_0 \in A$ έχουμε

$$F'(x_o) = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)+g(x)-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\chi\to\chi_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] =$$

$$= \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(\chi_0) + g'(\chi_0).$$

Άρα $\quad (\mathbf{f}+\mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$ **.**

Γενικά για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, \dots, f_\nu$ θα ισχύει :

$$(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_\nu)' = f_1' + f_2' + f_3' + \dots + f_\nu' .$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η

Να συμπληρωθούν :

$$\boxed{[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x})]' = \qquad\qquad}$$

$$\boxed{[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})]' = \qquad\qquad}$$

$$\boxed{[\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)(\mathbf{x})]' = \qquad\qquad\qquad\qquad , \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}}$$

Να συμπληρωθεί η ισότητα :

(f(x)·g(x)·h(x))'=

2006(επαν) :
ΘΕΜΑ 1ο
Σ-Λ(2Μ)

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η
Τι γνωρίζεται για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και

η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο g(χ_0) ,

τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει :

$$\boxed{(\mathbf{fog})'(\mathbf{x_0}) = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(\mathbf{x_0})\big) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x_0})}$$

Γενικά , αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ) , τότε η συνάρτηση fog είναι στο Δ και ισχύει :

$$\boxed{(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\chi})))' = \mathbf{f}'\big(\mathbf{g}(\boldsymbol{\chi})\big) \cdot \mathbf{g}'(\boldsymbol{\chi})}$$

Δηλαδή , αν u=g(x) , τότε: $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

Με το συμβολισμό του Leibniz , αν y=f(u) και u=g(x) , έχουμε τον τύπο :

$$\boxed{\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}}$$ **(ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ)**

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 9η

Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων :

- **f(x)=εφχ , χ≠ $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, κ ∈ ℕ.**
- **g(x)=σφχ , χ≠ κπ , κ ∈ ℕ.**
- **h(χ)=$\chi^{-\nu}$, χ≠ 0.**
- **τ(χ)=χ^{α}, χ> 0 , α ∈ ℝ − ℕ.**
- **H(χ)=α^{χ}**
- **F(χ)=ln|x|**

ΛΥΣΗ

- Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi}$.

  Π.Ο.= $A_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

  Για κάθε $\chi \in A_1$ έχουμε:

  $$f'(x) = (\varepsilon\varphi\chi)' = \left(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)' = \frac{(\eta\mu\chi)' \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi)'}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} =$$

  $$= \frac{\sigma\upsilon\nu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \cdot (-\eta\mu\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

  Άρα $\boxed{(\varepsilon\varphi\chi)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}$

2011 και 2009(επαν): ΘΕΜΑ 1ο Σ-Λ (2Μ)

- Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g(\chi) = \sigma\varphi\chi}$.

  Π.Ο.= $A_2 = \mathbb{R} - \{x / \eta\mu x = 0\}$

  Για κάθε $\chi \in A_2$ έχουμε:

  $g'(x) = (\sigma\varphi\chi)' =$

2012: ΘΕΜΑ 1ο Σ-Λ (2Μ)

- Έστω η συνάρτηση $\mathbf{h(\chi) = x^{-\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

  Π.Ο.= $\mathbb{R}^*$

  Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

  $$f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^{\nu} - 1 \cdot (x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} =$$

  $$= \frac{0 \cdot x^{\nu} - 1 \cdot \nu x^{\nu-1}}{\chi^{2\nu}} = \frac{-\nu . \chi^{\nu-1}}{\chi^{2\nu}} = -\nu\chi^{-\nu+1}$$

  Άρα $\boxed{(x^{-\nu})' = -\nu\chi^{-\nu+1}}$

- Έστω η συνάρτηση $\mathbf{H(\chi) = x^{\alpha}}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

  Π.Ο.= $(0, +\infty)$

  Για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$ έχουμε:

  $$H(x) = x^{\alpha} = e^{\ln(x^{\alpha})} = e^{\alpha \cdot \ln x} \xRightarrow{u(x)=\alpha\cdot\ln x} y = e^{u(x)} \Rightarrow y' = (e^{u(x)})'$$

  $$= e^{u(x)} \cdot u(x)' = e^{\alpha\cdot\ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

  Άρα $\boxed{\mathbf{(x^{\alpha})' = \alpha \cdot \chi^{\alpha-1}}}$

2006 :
ΘΕΜΑ 1° Σ-Λ
(2Μ)

- Έστω η συνάρτηση $\mathbf{H(\chi) = \alpha^{\chi}}$, $\boldsymbol{\alpha > 0}$.

  Π.Ο.= $\mathbb{R}$

  Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ έχουμε:

  $$H(x) = \alpha^{\chi} = e^{\ln(\alpha^{\chi})} = e^{\chi\cdot\ln\alpha} \xRightarrow{u(x)=\chi\cdot\ln\alpha} y = e^{u(x)} \Rightarrow y' = (e^{u(x)})'$$

  $$= e^{u(x)} \cdot u(x)' = e^{\chi\cdot\ln\alpha} \cdot (\chi \cdot \ln\alpha)' = \alpha^{\chi} \cdot 1 \cdot \ln\alpha = \alpha^{\chi} \cdot \ln\alpha.$$

  Άρα $\boxed{\mathbf{(\alpha^{\chi})' = \alpha^{\chi} \cdot \ln a}}$

2006 και
2010(επαν) :
ΘΕΜΑ 1° Σ-Λ
(2Μ)

- Έστω η συνάρτηση $\mathbf{F(\chi) = \ln|x|} \Rightarrow F(\chi) = \begin{cases} \ln x \ , & \text{αν } \chi > 0 \\ \ln(-x) \ , & \text{αν } \chi < 0 \end{cases}$

  Π.Ο.= $\mathbb{R}^*$

  Για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$ έχουμε: $F'(\chi) = (\ln\chi)' = \frac{1}{x}$

  Για κάθε $\chi \in (-\infty, 0)$ έχουμε: $F(\chi) = \ln(-\chi) \xRightarrow{u(x)=-\chi}$

  $$y = \ln\big(u(x)\big) \Rightarrow y' = \big(\ln\big(u(x)\big)\big)' = \frac{1}{u(x)} \cdot u(x)' = \frac{1}{-x}(-x)'$$

  $$= \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

  Άρα $\boxed{\mathbf{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}}$

2008:ΘΕΜΑ 1° Α1 (10Μ)

2016(επαν),2006(επαν):
Θέμα 1° Σ-Λ (2Μ)

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 10η

Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής των τιμών μιας συνάρτησης f ως προς χ στο σημείο χ_0;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη χ , y συνδέονται με τη f(x)=y , όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο χ_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το χ στο σημείο χ_0** την παράγωγο $f'(\chi_0)$.

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 11η
Να διατυπωθεί και να γραφτεί η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

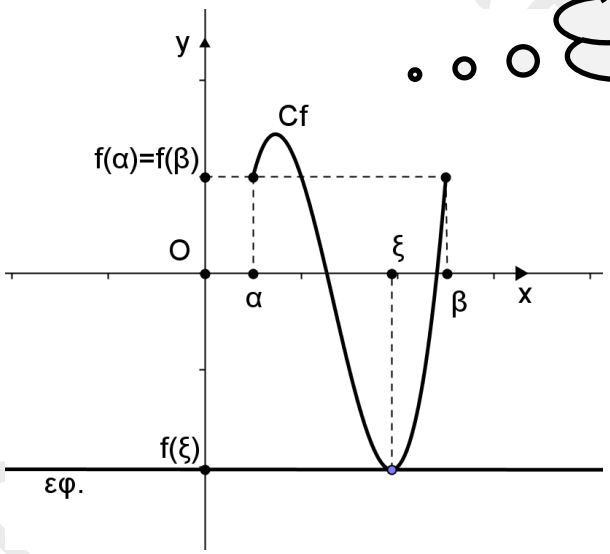
Έστω f μια συνάρτηση με :

- f συνεχής στο [α,β]
- f παραγωγίσιμη στο (α,β) και
- f(α)=f(β)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλ. η παράγωγος έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Γεωμετρική Ερμηνεία

2007(επαν) : Θέμα 1ο (5Μ)



Παρατηρούμε ότι στην C_f υπάρχουν σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον xx' δηλ. $\varphi = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$ με $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$.

2002(επαν): Θέμα 1ο Σ-Λ (2Μ)

Σημείωση

Προφανώς αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μη αντιστρέψιμη (**άρα όχι γν. μονότονη**) σε αυτό , τότε θα υπάρχει διάστημα [α,β] που θα πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

ΕΡΩΤΗΣΗ 12η
Να διατυπωθεί και να γραφτεί η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2003,2008(επαν),2016: Θέμα 1ο (7Μ,5Μ,4Μ)

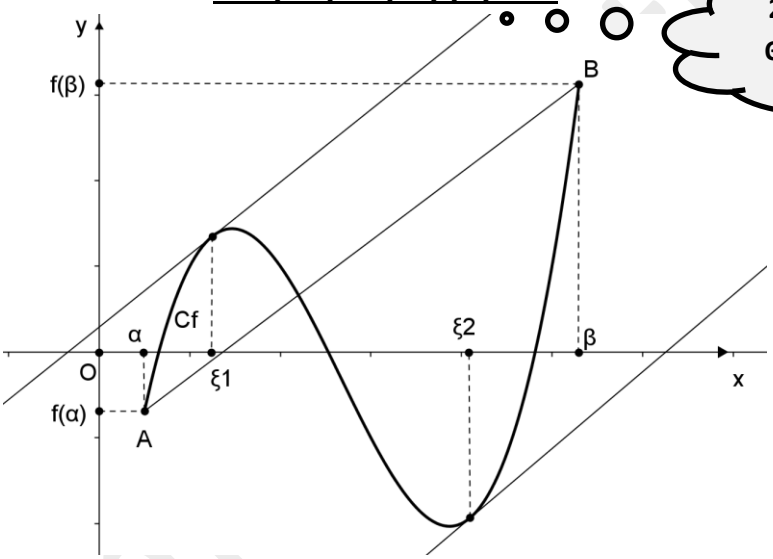
Έστω f συνάρτηση με

- f συνεχής στο [α,β]
- f παραγωγίσιμη (α,β)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική Ερμηνεία

2008(επαν) και 2003: Θέμα 1ο (5Μ και 7Μ)



$\lambda_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\xi_1) = \lambda_{\varepsilon_1}$ άρα $\varepsilon_1 \parallel AB$ δηλ. υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτόμενη της C_f που είναι ∥ στην ΑΒ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13η

Έστω f: συνάρτηση ορισμένη στο Δ. Αν

- **η f : συνεχής στο Δ και**
- **f'(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο του xϵΔ**

να δειχτεί ότι η f = σταθερή στο Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2014,2009 και 2004(επαν):
Θέμα 1ο Α (8Μ-10Μ και 9Μ)
2016 Σ-Λ(2Μ)

Για κάθε $x_1, x_2 \epsilon \Delta$ θα δειχθεί ότι $f(x_1) = f(x_2)$

- προφανώς αν $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 \neq x_2$ με $x_1 < x_2$ έχουμε ότι η
  f: συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και
  f: παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

άρα από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \epsilon (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow 0 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

για κάθε $x_1 < x_2$ άρα f σταθερή.

Ομοίως και για $x_1 > x_2$.

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 14η

Έστω f,g: συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- **f,g συνεχείς στο Δ και**
- $\mathbf{f'(x) = g'(x)}$ **για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε υπάρχει σταθερά c τέτοιο ώστε για κάθε xϵΔ να ισχύει:** $\mathbf{f(x) = g(x) + c}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2007(επαν) : Θέμα 1° Σ-Λ (2Μ)

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ με

- h συνεχείς στο Δ
- και $h'(x) = [f(x) - g(x)]' \Rightarrow$

$h'(x) = f'(x) - g'(x) \Rightarrow h'(x) = 0$

από γνωστό θεώρημα

$h(x) = c, c\epsilon\mathbb{R} \Rightarrow$

$f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow \boxed{f(x) = g(x) + c}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 15η

Τα θεωρήματα :

<<$\mathbf{f'(x) = 0}$ για κάθε $\mathbf{x\epsilon\Delta(\epsilon\sigma\omega\tau.) \Rightarrow f}$: σταθερή στο Δ >> και

<< $\mathbf{f' = g'}$ για κάθε $\mathbf{x\epsilon\Delta}$ (εσωτ.) $\mathbf{\Rightarrow f(x) = g(x) + c}$ $\mathbf{c, \epsilon\mathbb{R}}$ >>

με f,g συνεχείς στο Δ και παραγωγίσιμες στα εσωτερικά σημεία του Δ ισχύουν για Δ να είναι ένωση διαστημάτων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τα παραπάνω θεωρήματα δεν ισχύουν για ένωση διαστημάτων. Πράγματι έστω :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x\epsilon(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

ενώ $f(x) \neq$ σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ άφου

$f(-2) = -1$ και $f(2) = 1$.

Σημείωση

Έστω f συνάρτηση με $\mathbf{f'(\chi) = f(x)}$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ τότε **$f(x)=c.e^x$** με $c\in \mathbb{R}$.

2004: Θέμα 1ο
Σ-Λ :(2Μ)

ΕΡΩΤΗΣΗ 16η

Έστω f: συνάρτηση , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι ↗ στο Δ.**
- **Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f ↓ στο Δ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2006 και 2012: Θέμα 1ο (10Μ και 7Μ)

Αν $f'(x) > 0$ θα δειχθεί ότι f ↗ στο Δ.

Έστω $x_1, x_2 \epsilon \Delta$ με $x_1 < x_2$ θα δειχθεί ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Εφαρμόζω για την f στο $[x_1, x_2]$ το θεώρημα μέσης τιμής.

- f : συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- f : παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \epsilon (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \\ \text{με } x_2 - x_1 > 0 \\ f'(\xi) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

άρα για κάθε $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ. f ↑ στο Δ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 17η
Αν $f \uparrow$ στο διάστημα Δ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon$ Δ (εσωτερικά);
Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2007-2010-2014:
Θέμα 1ο Σ-Λ (2Μ)

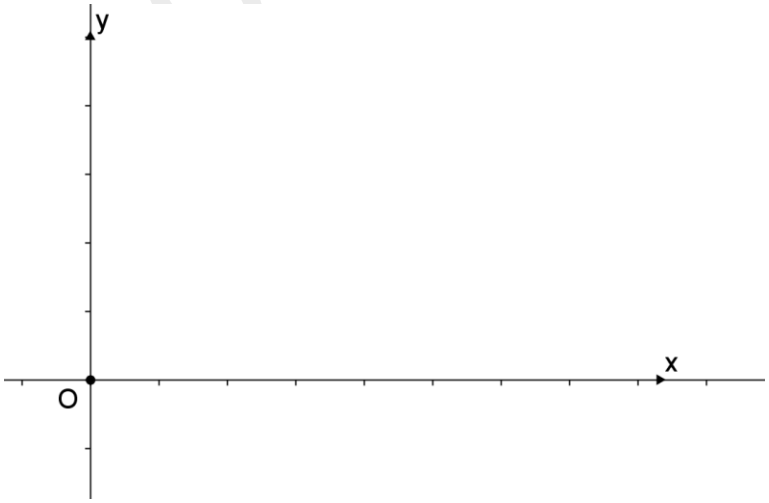
Είναι λάθος διότι:

Η $f(x) = x^3$ είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ αλλά $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

Αφού για x=0 έχω $f'(0) = 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 18η
Να συμπληρωθούν τα κενά:

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι και …… από ένα τοπικό ελάχιστο.
- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το …… από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει …… , τότε θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.
- Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα, μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα …… αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα …… μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.
- Να γίνουν δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που να παρουσιάζουν τις πιο πάνω καταστάσεις.



2012(επαν): Θέμα 1ο (6Μ) και 2002(επαν): Θέμα 1ο Σ-Λ(2Μ)

ΕΡΩΤΗΣΗ 19η

Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα του fermat.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε : $f'(x_0)$=0.

2016(επαν), 2011,2004: Θέμα 1ο (10Μ)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω x_0 = θέση τοπικού μεγίστου άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για μια περιοχή του x_0, δηλαδή για κάθε $x \epsilon (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

- αν $x \epsilon (x_0 - \delta, x_0)$ τότε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{f'(x_0) \geq 0}$
- αν $x \epsilon (x_0, x_0 + \delta)$ τότε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{f'(x_0) \leq 0}$

Άρα $f'(\chi_0) = 0$.

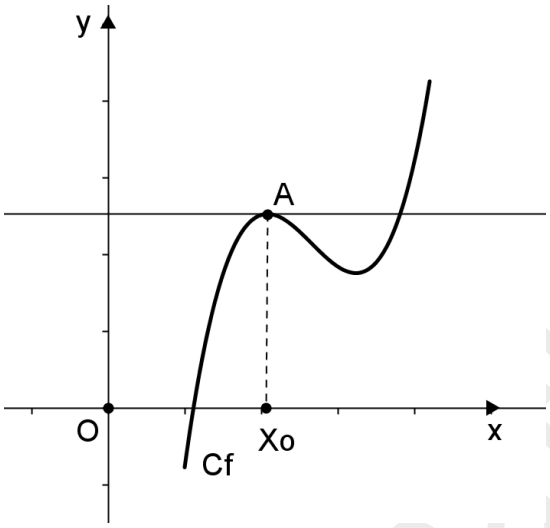
Σημείωση

Η αντιθετοαντιστροφή του Θεωρήματος Fermat είναι :

Έστω f: ορισμένη στο Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του Δ με $f'(\chi_0) \neq 0$ και χ_0 εσωτερικό σημείο του Δ τότε το χ_0 δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΕΡΩΤΗΣΗ 20η
Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος fermat;

Απάντηση



Παρατηρούμε την Cf και βλέπουμε ότι το χ_0 είναι θέση τοπικού μεγίστου . Η εφαπτομένη (αν ορίζεται) στο σημείο με τετμημένη το χ_0 είναι παράλληλη στον $\chi\chi'$, δηλ. $f'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 0$ $\Leftrightarrow \varphi = 0\ \varepsilon \parallel \chi\chi'$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 21η
Το αντίστροφο του θεωρήματος fermat ισχύει;

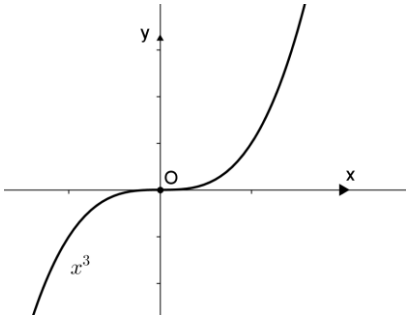
2003: Θέμα 1ο
Σ-Λ : (2Μ)

Απάντηση

Όχι διότι μπορεί να είναι $f'(\chi_0) = 0$ ενώ το χ_0 να μην είναι θέση τοπικού ακρότατου .

Π.χ. $f(x) = x^3 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ δηλ.

$f'(0) = 0$ με το $\chi_0 = 0$ να μην είναι θέση τοπικού ακρότατου αφού.



ΕΡΩΤΗΣΗ 22η

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ . Ποιες από αυτές ονομάζονται κρίσιμα σημεία;

Απάντηση

- **Οι πιθανές θέσεις** των τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι :
  α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της μηδενίζεται.
  β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
  γ) Τα άκρα του διαστήματος Δ (αν ανήκουν στο Π.Ο.)
- **Τα κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ είναι:
  α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της μηδενίζεται.
  β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

2005(επαν) :
Θέμα 1ο Σ-Λ (2Μ)

Σημείωση

Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης μπορεί να είναι θέσεις τοπικών ακρότατων και μπορεί όχι.

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 23η

Να γραφτεί το θεώρημα (κριτήριο) το οποίο μας πληροφορεί , ποια από τα κρίσιμα σημεία της f είναι θέσεις τοπικών ακρότατων αυτής και να αποδειχτεί.

Να γραφτεί και η γεωμετρική ερμηνεία .

2003(επαν) : Θέμα 1ο Σ-Λ(2Μ)

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο (α,β) με εξαίρεση ίσως σ'ένα σημείο χ_0 στο οποίο η f είναι συνεχής.

α) **Αν η $f'(x) > 0$ στο (α, χ_0) και $f'(x) < 0$ στο (χ_0, β) τότε το $y_0 = f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .**

2012(επαν.),2016: Θέμα 1ο (7Μ)

Απόδειξη

Έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0)$ και η f είναι συνεχή στο χ_0 , άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(\alpha, \chi_0]$

δηλ. για $\chi \le \chi_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\chi) \le f(\chi_0)$ **για κάθε** $\chi \in (\alpha, \chi_0]$ (1) .

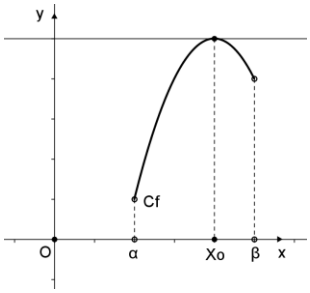
Έχουμε $f'(x) < 0$ για κάθε $\chi \in (\chi_0, \beta)$ και η f είναι συνεχή στο χ_0 , άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[\chi_0, \beta)$

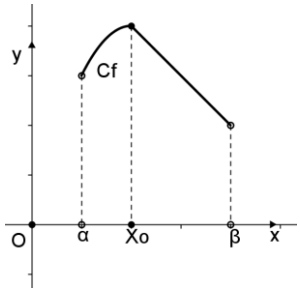
δηλ. για $\chi \ge \chi_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\chi) \le f(\chi_0)$ **για κάθε** $\chi \in [\chi_0, \beta)$ (2).

Από (1) , (2) έχουμε $f(\chi) \le f(\chi_0)$ **για κάθε** $\chi \in (\alpha, \beta)$

Δηλ. $y_0 = f(\chi_0)$ **είναι τοπικό μέγιστο της f.**

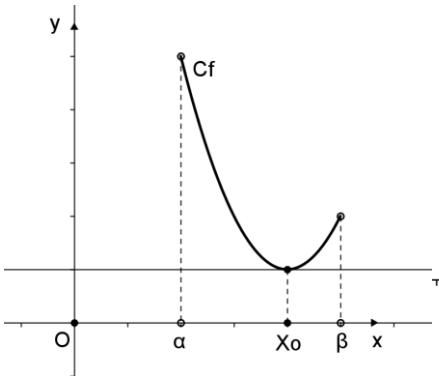
x	α	χ_0	β
$f'(x)$	+		-
f	↗		↘
f(x)	$y_{max} = f(\chi_0)$		

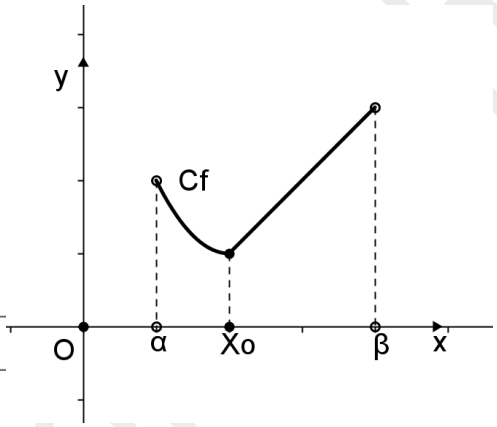




β) Αν η $f'(x) < 0$ στο (α, χ_0) και $f'(x) > 0$ στο (χ_0, β) τότε το $y_0 = f(\chi_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

x	α	χ_0	β
$f'(x)$	-		+
f	↘		↗
f(x)	$y_{min} = f(\chi_0)$		





γ) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ τότε το $f(\chi_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) .

2014(επαν): θέμα 1ο Α1(7Μ)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι έχουμε $\mathbf{f'(x) > 0}$ **για κάθε** $\chi \in (\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο χ_0 τότε θα είναι και γν. αύξουσα σε καθένα από τα $(\alpha, \chi_0], [\chi_0, \beta)$

δηλ. αν $\chi_1 < \chi_0 < \chi_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\chi_1) < f(\chi_0) < f(\chi_2)$

οπότε **το $f(\chi_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f**.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γν. αύξουσα στο (α,β).

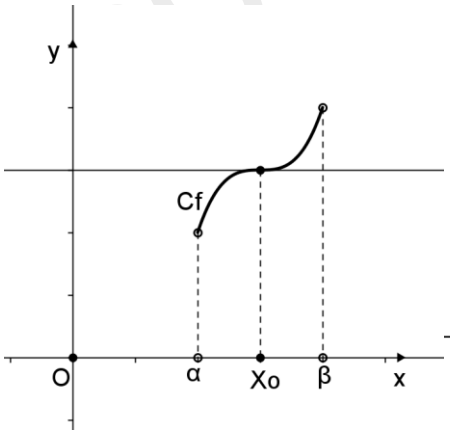
- Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in (\alpha, \chi_0]$ με $\chi_1 < \chi_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\chi_1) < f(\chi_2)$
- Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in [\chi_0, \beta)$ με $\chi_1 < \chi_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\chi_1) < f(\chi_2)$
- Για κάθε $\chi_1 \in (\alpha, \chi_0]$ και $\chi_2 \in [\chi_0, \beta)$ με

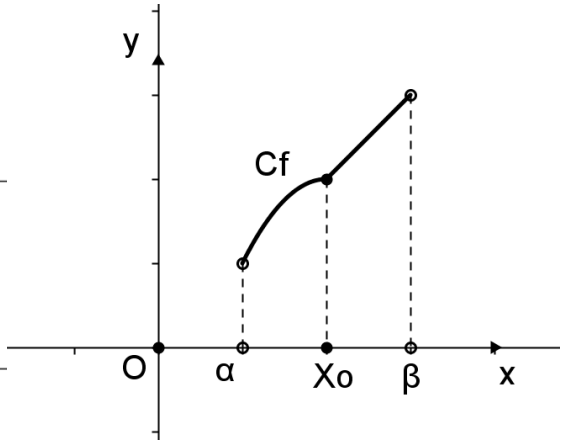
$\chi_1 < \chi_0 < \chi_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\chi_1) < f(\chi_0) < f(\chi_2)$

Οπότε και στις 3 περιπτώσεις έχουμε $f(\chi_1) < f(\chi_2)$ με $\chi_1 < \chi_2$

Δηλ. **η f γν. αύξουσα στο (α,β)**

x	α	χ_0	β
$f'(x)$	+		+
f	↗		↗
f(x)	Δεν υπάρχουν ακρότατα.		





ΕΡΩΤΗΣΗ 24η
Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο [α,β]. Πως εργαζόμαστε για την εύρεση του ολικού μεγίστου και ελαχίστου.

Απάντηση

Είναι γνωστό ότι οι πιθανές θέσεις ακρότατων είναι τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα του διαστήματος άρα:

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f. (δηλ. τα χ_0 για τα οποία $f'(\chi_0) = 0$ ή $f'(\chi_0) =$δεν ορίζεται.) Προσοχή ελέγχω αν το πρόσημο της f' αλλάζει γύρω από το χ_0 .
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων .
- Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο.

Εφαρμογή

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$ για $\chi \in [0,5]$.

Λύση

commonmaths

ΕΡΩΤΗΣΗ 25η

Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f :

α) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή);

β) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη);

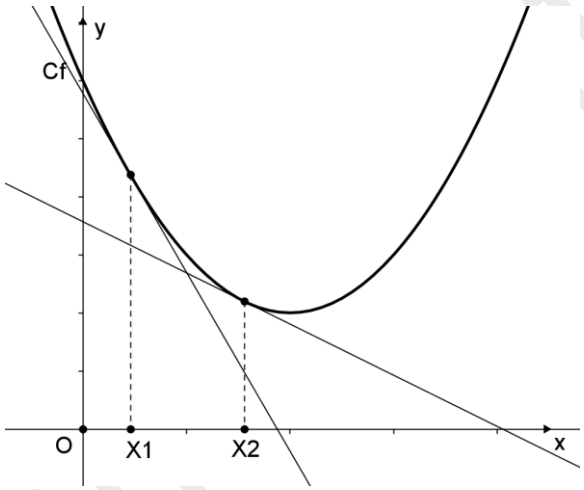
Να ερμηνευτεί ο ορισμός γεωμετρικά.

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι :

α) Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Γεωμετρική Ερμηνεία



2006: θέμα 1ο Α2 (5Μ)

Παρατηρούμε ότι για:

$$\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \widehat{\varphi}_1 < \widehat{\varphi}_2 \xLeftrightarrow{90^0<\widehat{\varphi}_i<180^0} \varepsilon\varphi\widehat{\varphi}_1 < \varepsilon\varphi\widehat{\varphi}_2$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi_1) < f'(\chi_2) \Leftrightarrow f' \nearrow \text{στο } \Delta .$$

Σημείωση

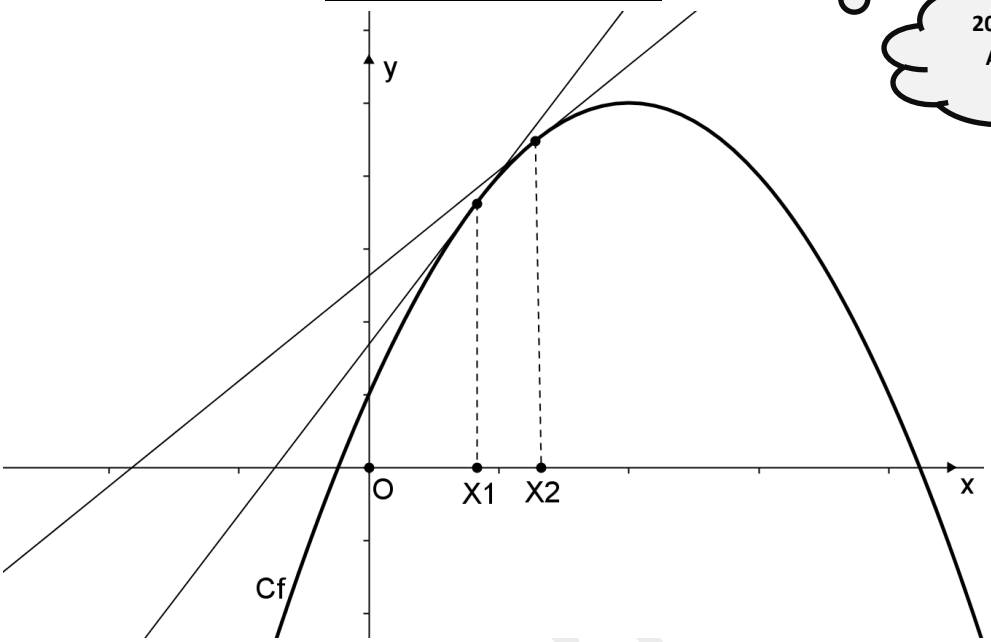
Αν η f είναι κυρτή τότε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται πάνω από όλες τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

2003: θέμα 1ο Σ-Λ (2Μ)

β) Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Γεωμετρική Ερμηνεία

2014-2010: θέμα 1ο
Α2 (4Μ)-Α3 (5Μ)



Παρατηρούμε ότι για:

$$\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \widehat{\varphi}_1 > \widehat{\varphi}_2 \xLeftrightarrow{0^0 \le \widehat{\varphi}_i < 90^0} \varepsilon\varphi\widehat{\varphi}_1 > \varepsilon\varphi\widehat{\varphi}_2$$
$$\Leftrightarrow f'(\chi_1) > f'(\chi_2) \Leftrightarrow f' \searrow \text{ στο } \Delta .$$

Σημείωση

Αν η f είναι κοίλη τότε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται κάτω από όλες τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

2008(επαν): θέμα 1ο
Σ-Λ (2Μ)

ΕΡΩΤΗΣΗ 26η
Να γραφτεί το θεώρημα που συνδέει τη 2η παράγωγο της συνάρτησης με την κυρτότητά της.

Απάντηση

2003: θέμα 1ο Σ-Λ
(2Μ)

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ:

- Αν $f''(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ (δηλ. $f' \nearrow$ στο Δ) τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(\chi) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ (δηλ. $f' \searrow$ στο Δ) τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 27η

Ισχύει το αντίστροφο του θεώρημα που συνδέει τη 2η παράγωγο της συνάρτησης με την κυρτότητά της; Να δοθεί παράδειγμα.

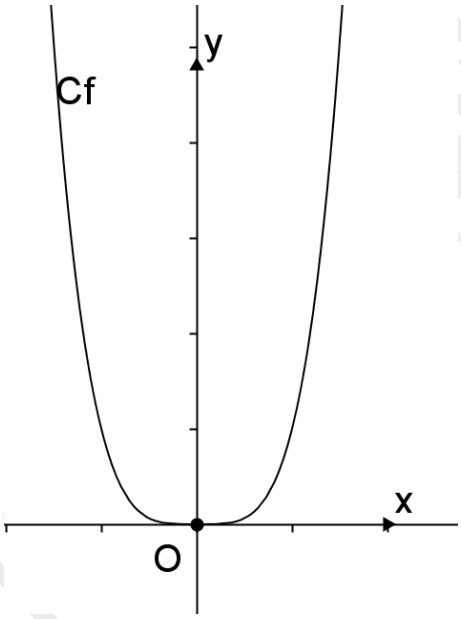
Απάντηση

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει . Δηλ. αν π.χ. η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω τότε δεν συνεπάγεται ότι και $f''(\chi) > 0$.

Πράγματι:

Έστω $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \geq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.
Ενώ η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

2014(επαν)-2008: θέμα 1ο Σ-Λ (2Μ)



ΕΡΩΤΗΣΗ 28η
Τι ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

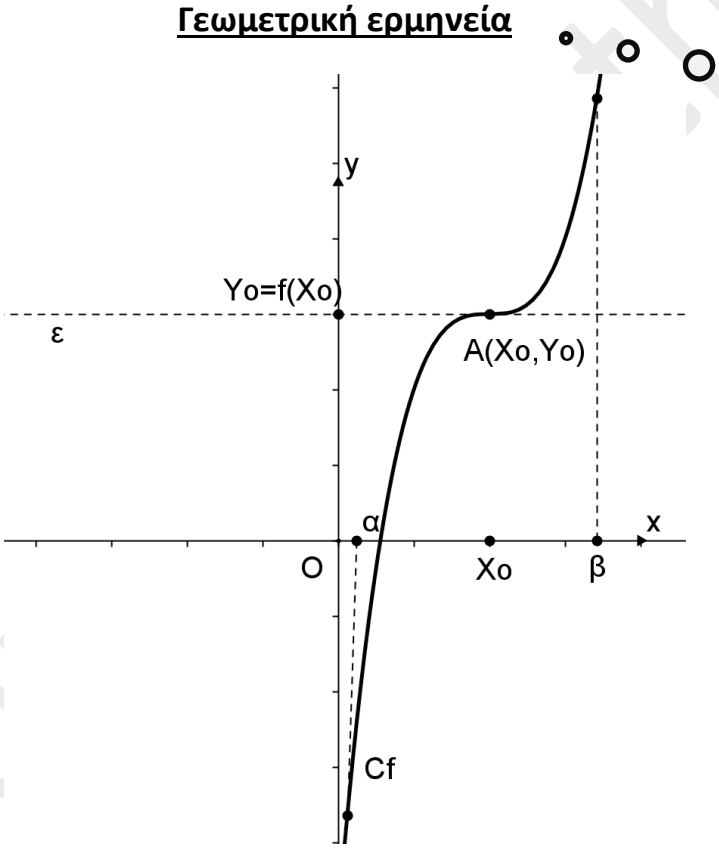
Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 . Αν :

- η f είναι κυρτή στο (α, χ_0) και κοίλη στο (χ_0, β) ή αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$

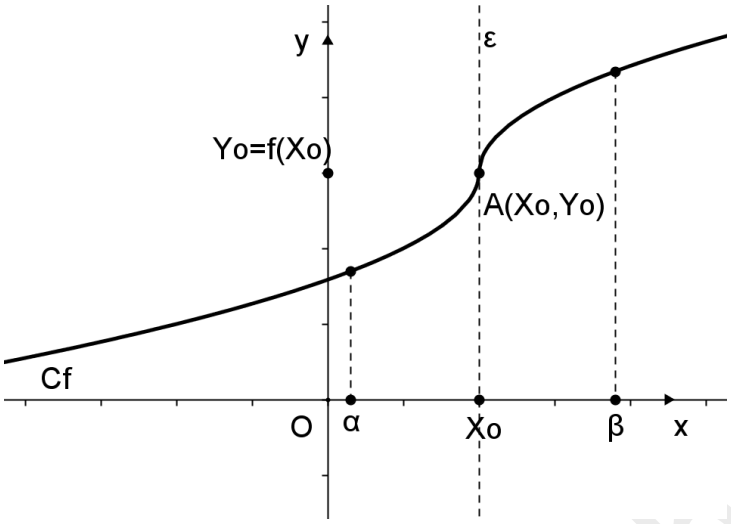
τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της C_f.

Γεωμετρική ερμηνεία



2005(επαν): θέμα 1ο
Σ-Λ (2Μ)

Παρατηρούμε ότι η f **στο (α, χ_0) στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** , ενώ **στο (χ_0, β) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω** και **στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη** (θα μπορούσε και πλάγια , οπότε είναι παραγωγίσιμη στο χ_0) . **Τότε λέμε ότι το σημείο Α είναι Σημείο Καμπής της f.**



Παρατηρούμε ότι η f **στο** (α, χ_0) **στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω** , ενώ **στο** (χ_0, β) **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** και **στο σημείο Α**$(\chi_0, f(\chi_0))$ **η** C_f **δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη** (οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0) . **Τότε λέμε ότι το σημείο Α είναι Σημείο Καμπής της f.**

commonmaths

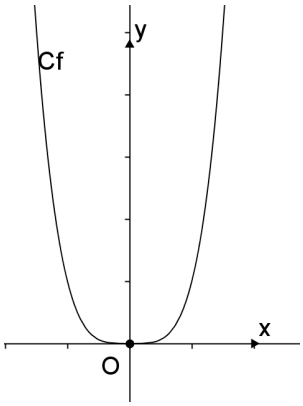
ΕΡΩΤΗΣΗ 29η
Να γραφτεί το θεώρημα που συνδέει το σημείο καμπής με την 2η παράγωγο.

Απάντηση

<< **Αν το A($\mathbf{x_0}, \mathbf{f(x_0)}$) είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, τότε $\mathbf{f''(x_0) = 0}$.**>>

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού αν

$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \;\Rightarrow\; f''(x) = 12x^2$ με $f''(0) = 0$ ενώ η γραφική παράσταση της f είναι:



παρατηρώντας την C_f βλέπουμε ότι στο $\chi_0 = 0$ δεν έχουμε σημείο καμπής.

Προφανώς ισχύει η αντιθετοαντιστροφή του πιο πάνω θεωρήματος:

<<Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα χ_0 με $\mathbf{f''(x_0) \neq 0}$ **,** τότε στο χ_0 δεν έχουμε σημείο καμπής.

ΕΡΩΤΗΣΗ 30η
Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;

Απάντηση

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι :

i. τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται ή
ii. τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

ΕΡΩΤΗΣΗ 31η
Πότε λέμε ότι ένα σημείο είναι σημείο καμπής.

Απάντηση

Από τον ορισμό του σημείου καμπής και το θεώρημα κυρτότητας προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα :

<<Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) και $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$.Αν:

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του χ_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$,

τότε το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής.

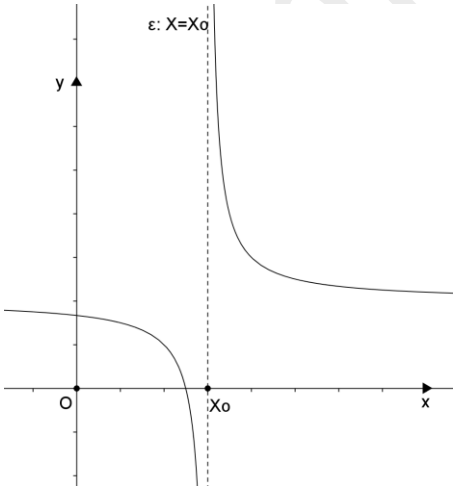
ΕΡΩΤΗΣΗ 32η
Τι ονομάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . Να γραφτεί η γεωμετρική ερμηνεία .

Απάντηση

<<Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{\chi \to \chi_0^{\pm}} f(x)$ είναι $\pm\infty$ τότε η ευθεία ε: $\chi=\chi_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. >>

2015(επαν)-2010 και 2003(επαν): θέμα 1ο Α3- Α2 (4Μ) και (7Μ)

Γεωμετρική Ερμηνεία



Παρατηρούμε ότι $\lim_{\chi \to \chi_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{\chi \to \chi_0^+} f(x) = +\infty$ οπότε η ευθεία ε: $\chi=\chi_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

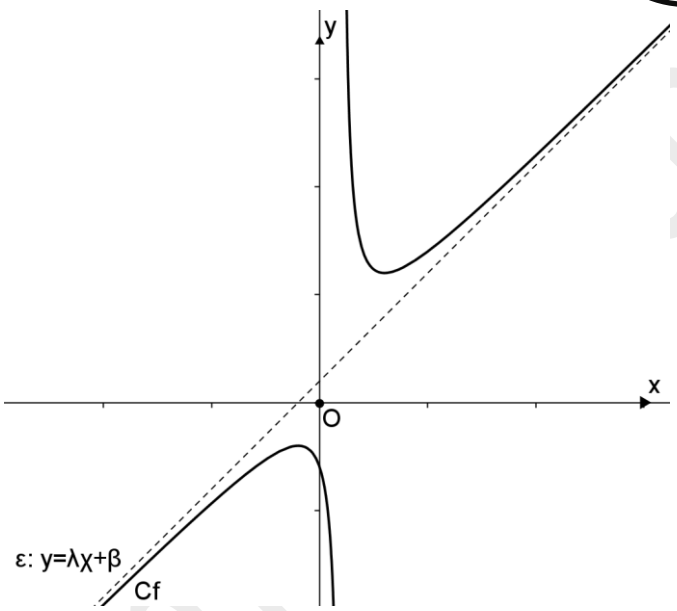
ΕΡΩΤΗΣΗ 33η
Πότε λέμε ότι η ευθεία ε: y=λ.χ+β είναι ασύμπτωτη ;
Πως προσδιορίζουμε την ευθεία αυτή;

Απάντηση

<< Η ευθεία y=λχ+β λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$ αν :
$\lim_{\chi\to\pm\infty}[f(x)-(\lambda\chi+\beta)]=0$ >>

2010 και 2005: θέμα 1ο Α2 (5Μ και 4Μ)

Γεωμετρική Ερμηνεία



Παρατηρούμε ότι η C_f πλησιάζει την ευθεία ε: y=λχ+β αλλά δεν την τέμνει όταν $\chi\to\pm\infty$, δηλ. $\lim_{\chi\to\pm\infty}[f(x)-(\lambda\chi+\beta)]=0$.

Για να προσδιορίσουμε την ασύμπτωτη ευθεία ε: y=λχ+β υπολογίζουμε τα όρια :

- $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}[f(x)-\lambda\chi]=\beta\in\mathbb{R}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 34η
Πότε λέμε ότι έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη ;

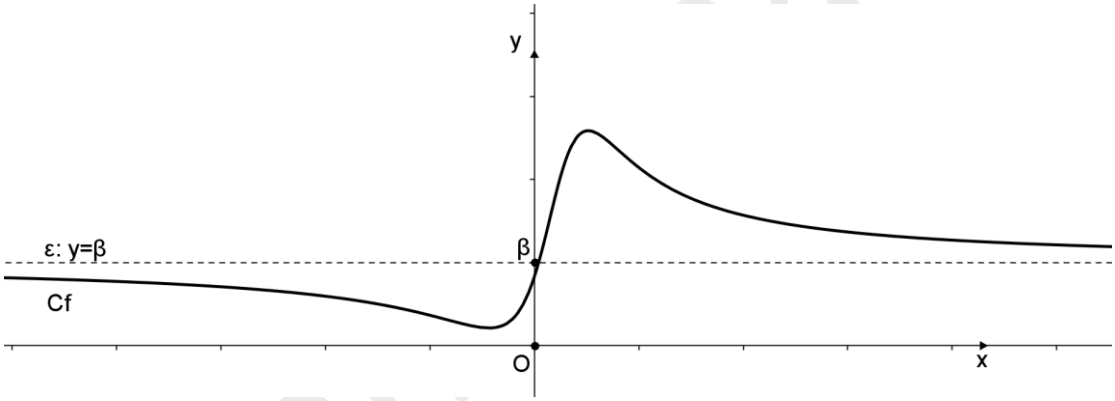
Απάντηση

2016(επαν),2007:
θέμα 1ο Α3 (4Μ,3Μ)

Αν το όριο :

- $\boldsymbol{\lambda = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$ και
- $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} [f(x) - 0.\chi] = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}}$

Τότε προκύπτει η ευθεία ε: y=0.χ+β ⇒ ε: y=β ⇒ ε ∥ χχ′ (οριζόντια ασύμπτωτη).



ΕΡΩΤΗΣΗ 35η
Ποιες συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες;

Απάντηση

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμ.P(x)≥ βαθμ.Q(x)+2 δεν έχουν πλάγιες (άρα και οριζόντιες) ασύμπτωτες.

2016(επαν),2015(επαν)
(Σ-Λ)

ΕΡΩΤΗΣΗ 36η
Σε ποια σημεία του Π.Ο. μιας συνάρτησης αναζητούμε ασύμπτωτες;

Απάντηση

Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f τις αναζητούμε :

- Στα άκρα των διαστημάτων του Π.Ο. της στα οποία η f δεν ορίζεται .
- Στα σημεία του Π.Ο. της , στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
- Στο $\pm\infty$, εφόσον η f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής : $(\alpha, +\infty), (-\infty, \alpha)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 37η
Να γραφτούν οι κανόνες του de L'Hospital.

Απάντηση

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

commonmaths