Δ.Ε. ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Τελευταία ενημέρωση: 21 Φεβρουαρίου 2015

www.commonmaths.weebly.com

Α. Αρχικά θα ασχοληθούμε με τα τριώνυμα 2ου βαθμού.

Η γενική μορφή τους είναι : $\boxed{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0 \text{ με } \alpha\neq 0}$ προφανώς το (**α**) πρέπει να είναι διάφορο του μηδέν , για να υπάρχει ο όρος με το χ^2, ώστε η εξίσωση που θα λύσουμε να είναι 2ου βαθμού.

Πάμε όμως να λύσουμε την πιο πάνω εξίσωση και να δούμε πως προκύπτει η περιβόητη Διακρίνουσα .

Θα πάρω την γενική μορφή και θα εφαρμόσω

τη μέθοδο συμπλήρωμα τετραγώνου:

Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα :

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0 \overset{\alpha\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{\alpha\chi^2}{\alpha}+\frac{\beta\chi}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{0}{\alpha}\Rightarrow$$

$$\chi^2+\chi\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow \chi^2+2\chi\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow$$

$$\chi^2+2\chi\frac{\beta}{2\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow$$

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow$$

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\Rightarrow$$

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\xRightarrow{\boxed{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \ (1)$$

Αρχικά διαιρούμε με το α για να μείνει μόνο του το χ^2

Στη συνέχεια πολ/ζω και διαιρώ τον όρο $\chi\frac{\beta}{\alpha}$ με το 2 για να φτιαχτεί ο όρος $2AB$ της πιο πάνω ταυτότητας.

Τέλος προσθαφαιρούμε τον όρο $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$,για να φτιαχτεί ο όρος B^2.

Και εδώ ξεδιαλύνεται το θέμα με το πρόσημο της Διακρίνουσας και τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις της:

- Αν $\boxed{\Delta>0}$ τότε η (1) γίνεται : $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\Rightarrow$

$$\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\Rightarrow\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\Rightarrow\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4\alpha^2}}\Rightarrow$$

$\chi = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \chi = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \boxed{\chi_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$ πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις (ρίζες).

- Αν $\boxed{\Delta = 0}$ τότε η (1) γίνεται : $\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \overset{\Delta=0}{\Longrightarrow}$

$$\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Rightarrow (\chi + \frac{\beta}{2\alpha})(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \\ \chi + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \chi = -\frac{\beta}{2\alpha} \\ \chi = -\frac{\beta}{2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\chi_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}}$ πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει μία πραγματική λύση (ρίζα) δύο φορές, γι' αυτό λέμε ότι έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

- Αν $\boxed{\Delta < 0}$ τότε η (1) γίνεται : $\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \overset{\Delta<0}{\Longrightarrow}$ **ΑΔΥΝΑΤΗ** αφού το 1ο μέλος είναι **μη αρνητικός αριθμός** (είναι υψωμένο στο τετράγωνο) ενώ το 2ο μέλος είναι **αρνητικός**.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0, \qquad \alpha \neq 0$$

$$\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$$

- Αν $\boxed{\Delta > 0}$ τότε η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις (ρίζες) τις : $\boxed{\chi_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$
- Αν $\boxed{\Delta = 0}$ τότε η εξίσωση έχει 1 διπλή πραγματική λύση (ρίζα) την : $\boxed{\chi_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}}$
- Αν $\boxed{\Delta < 0}$ τότε η εξίσωση είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**

Ουσιαστικά είναι ο ίδιος τύπος με την 1η περίπτωση μόνο που έχουμε Δ=0.

Πάμε όμως να λύσουμε μερικές ασκήσεις:

ΑΣΚΗΣΗ 1η Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $-\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}-3=0$

ii. $9\chi^2-6\chi-1=0$

iii. $\chi^2+\chi=-1$

iv. $(\chi-1)^2+(\chi+1)^2=3(\chi-2)+7$

v. $\frac{2-\chi^2}{\chi^2-2\chi}+\frac{2}{\chi}+\frac{2\chi-3}{\chi-2}=0$

ΛΥΣΗ

i. $-\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}-3=0$

α=-1 , β=4 , γ=-3

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=16-12=4>0$$

αφού η διακρίνουσα είναι θετική η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες τις :

$$\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2(-1)}=\frac{-4\pm2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=\frac{-4+2}{-2}=\frac{-2}{-2}=1\\ \chi_2=\frac{-4-2}{-2}=\frac{-6}{-2}=3\end{cases}$$

ii. $9\chi^2-6\chi+1=0$

α=9 , β=-6 , γ=1

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot9\cdot1=36-36=0$

αφού η διακρίνουσα είναι 0 η εξίσωση έχει 1 διπλή πραγματική ρίζα την :

$\chi_{1,2}=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-6)}{2\cdot9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

iii. $\chi^2+\chi=-1\Rightarrow\chi^2+\chi+1=0$

α=1 , β=1 , γ=1

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες .

iv. $(\chi-1)^2+(\chi+1)^2=3(\chi-2)+7\Rightarrow$

$\chi^2-2\chi+1+\chi^2+2\chi+1=3\chi-6+7\Rightarrow$

$2\chi^2+2-3\chi+6-7=0\Rightarrow$

$2\chi^2-3\chi+1=0$

α=2 , β=-3 , γ=1

> **Θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες:**
>
> $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
>
> $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0$$

αφού η διακρίνουσα είναι θετική η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες τις :

$$\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot2}=\frac{3\pm1}{4}\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1\,.\\ \chi_2=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\,.\end{cases}$$

v. $\frac{2-\chi^2}{\chi^2-2\chi}+\frac{2}{\chi}+\frac{2\chi-3}{\chi-2}=0$

Για να λύσουμε την κλασματική εξίσωση ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές :

  $\chi^2-2\chi=\chi(\chi-2)$
- Θα πάρουμε τον περιορισμό:

  παρονομαστές$\neq 0\ \Rightarrow\begin{cases}\chi\neq0\ \text{και}\\ \chi-2\neq0\Rightarrow\chi\neq2\end{cases}$
- Θα βρούμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών:

  Ε.Κ.Π. ($\chi(\chi-2)$, χ , $\chi-2$) = $\chi(\chi-2)$
- Πολλαπλασιάζουμε τα κλάσματα με το Ε.Κ.Π. ώστε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών .

$$\cancel{\chi(\chi-2)}.\frac{2-\chi^2}{\cancel{\chi(\chi-2)}}+\cancel{\chi}(\chi-2).\frac{2}{\cancel{\chi}}+\chi\cancel{(\chi-2)}.\frac{2\chi-3}{\cancel{\chi-2}}=0\Rightarrow$$

$$2-\chi^2+2(\chi-2)+\chi(2\chi-3)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ... (η συνέχεια όπως η iv)

Β. Πάμε τώρα να δούμε πως λύνονται τα διώνυμα 2^{ου} βαθμού .

- $\boldsymbol{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0 \overset{\beta=0}{\Longrightarrow} \alpha\chi^2 + \gamma = 0}$

Αντί να το δούμε στη γενική μορφή δείτε πως λύνονται τα 2 παρακάτω αντιπροσωπευτικά παραδείγματα .

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2^{η}</u> Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\boldsymbol{-x^2 + 3 = 0}$

ii. $\boldsymbol{9\chi^2 + 1 = 0}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. $\boldsymbol{-x^2 + 3 = 0} \Rightarrow -x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 3 \overset{3>0}{\Longrightarrow} x = \pm\sqrt{3}$.

(Αντίθετες ρίζες)

ii. $\boldsymbol{9\chi^2 + 1 = 0} \Rightarrow 9x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{9} \overset{\frac{-1}{9}<0}{\underset{}{\overset{x^2\geq 0}{\Longrightarrow}}}$ ΑΔΥΝΑΤΗ .

- $\boldsymbol{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0 \overset{\gamma=0}{\Longrightarrow} \alpha\chi^2 + \beta\chi = 0}$

Αντί να το δούμε στη γενική μορφή δείτε πως λύνεται το παρακάτω αντιπροσωπευτικό παράδειγμα .

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3^{η}</u> Να λυθεί η εξίσωση: $\boldsymbol{-x^2 + 2\chi = 0}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\boldsymbol{-\chi^2 + 2\chi = 0} \Rightarrow \chi(-\chi + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi = 0 \text{ ή} \\ -\chi + 2 = 0 \Rightarrow \chi = -2 \end{cases}$$

Παρακάτω υπάρχουν μερικές ασκήσεις για να τις προσπαθήσετε και μόνοι σας .

ΑΣΚΗΣΗ 4^η Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $-2x^2 + x + 1 = 0$
ii. $4\chi^2 + 4\chi + 1 = 0$
iii. $\chi^2 - \chi = -1$
iv. $(2\chi + 1)^2 - (\chi - 1)^2 = 3\chi(\chi - 2) - 7\chi$
v. $\frac{1}{2\chi-3} = \frac{5}{\chi} + \frac{3}{2\chi^2-3\chi}$
vi. $\frac{\chi}{\chi^2-3\chi} = \frac{5}{\chi+3} + \frac{3}{\chi^2-9}$ **(αφού πάρετε τους περιορισμούς , μπορείτε να κάνετε και μία απλοποίηση , ώστε να έχετε πιο απλό Ε.Κ.Π.)**
vii. $\frac{1}{\chi-\frac{1}{\chi}} = \frac{5}{\chi^2-3\chi+2} + \frac{3}{\chi^2-\chi-2}$ **(πριν κάνετε το σύνθετο κλάσμα απλό να πάρετε τους περιορισμούς)**
viii. $2\chi^2 - 3\chi = 0$
ix. $2\chi^2 - 3 = 0$
x. $2\chi^2 + 3 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 5^η Στις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις 2^{ου} βαθμού να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ ώστε οι εξισώσεις να έχουν 1 διπλή πραγματική ρίζα .

i. $-2\lambda x^2 + \lambda x + 1 = 0$
ii. $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 1)x + 2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 6^η Στις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις 2^{ου} βαθμού να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ ώστε οι εξισώσεις να έχουν πραγματικές ρίζες .

i. $-2\lambda x^2 + x + 1 = 0$
ii. $(\lambda - 1)x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda = 0$

Για κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις να βρείτε τις Ακέραιες τιμές της παραμέτρου λ ώστε οι εξισώσεις να είναι Αδύνατες .

ΑΣΚΗΣΗ 7η Στις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ ώστε οι εξισώσεις να έχουν αντίθετες ρίζες .

i. $-2x^2 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + 1 = 0$
ii. $x^2 + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)x - 2 = 0$
iii. $x^2 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - 2 = 0$
iv. $-x^2 + (\lambda^2 - 1)x + 2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 8η Στις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ ώστε οι εξισώσεις να έχουν ρίζα τον αριθμό -1 .

i. $-2x^2 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + 2 = 0$
ii. $x^2 + (\lambda^2 - 2\lambda + 1)x - 1 = 0.$

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις , μόλις βρείτε την τιμή του λ να βρεθεί και η 2η ρίζα των εξισώσεων .

***ΑΣΚΗΣΗ 9η Το 4πλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 1 είναι ίσο με το τετράγωνό του αυξημένο κατά 5 . Ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί ;**

***ΑΣΚΗΣΗ 10η Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο η κάθετη πλευρά είναι κατά 3 μικρότερη από τη βάση . Να υπολογίσετε το εμβαδό του και το ύψος του .**

***ΑΣΚΗΣΗ 11η Σε ένα γλέντι τσούγκρισαν ανά δύο οι καλεσμένοι τα ποτήρια τους και ακούστηκαν 91 τσουγκρίσματα . Πόσοι είναι οι καλεσμένοι ;**

***ΑΣΚΗΣΗ 12η Αν αφαιρέσουμε από έναν αριθμό τον αντίστροφό του βρίσκουμε 2 . Ποιος είναι ο αριθμός αυτός ;**

***ΑΣΚΗΣΗ 13η 2 εκσκαφείς χρειάζονται 12 μέρες για ένα έργο , όταν εργάζονται μαζί . Ο ένας μόνος του χρειάζεται 7 ημέρες περισσότερο από τον άλλο . Πόσες μέρες χρειάζεται μόνος του ο καθένας για να τελειώσει το έργο του ;**

Οι ασκήσεις με * είναι από το Σχολικό Βιβλίο Γ’ Γυμνασίου των :

Α. Αλιμπινίση , Σ. Γρηγοριάδη , Ε. Ευσταθόπουλος , Ν. Κλαουδάτος ,

Σ. Παπασταυρίδης , Α. Σβέρκος .