ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄και Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ για τις παν.εξετ. των ΕΠΑ.Λ.

Δ . Ε . ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Μια συνοπτική παρουσίαση της Άλγεβρας , για όσους θέλουν να προετοιμαστούν για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις των ΕΠΑ.Λ.

Για απορίες στο www.commonmaths.weebly.com

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση ονομάζεται μία αντιστοίχιση δύο μεταβλητών χ , y , όπου **για κάθε τιμή** του χ αντιστοιχεί **μόνο μία τιμή** του y .

Μία συνάρτηση μπορούμε να τη συμβολίζουμε με όποιο γράμμα θέλουμε είτε Αγγλικό είτε Ελληνικό , π.χ. **f , g , h , F , G , H , φ** κτλ.

χ: ανεξάρτητη μεταβλητή

y: εξαρτημένη μεταβλητή

με $\boldsymbol{\chi \mapsto y = f(\chi)}$

π.χ. Έστω η συνάρτηση: **f(χ)=3χ-1**

για **χ=1** έχουμε f(1)=3.1-1=3-1=2 άρα **y=2** άρα προκύπτει το ζεύγος **(1,2)**

για **χ=2** έχουμε f(2)=3.2-1=6-1=5 άρα **y=5** άρα προκύπτει το ζεύγος **(2,5)**

κ.ο.κ.

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ–ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. Οι τιμές των χ, που βάζουμε μέσα σε κάθε συνάρτηση ανήκουν σε ένα σύνολο που θα το λέμε **Πεδίο Ορισμού (Π.Ο.)**

- Αν η συνάρτηση είναι **πολυωνυμική το Π.Ο.** της είναι όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών **το** $\mathbb{R}$**.**

Π.χ. Αν $\boldsymbol{f(\chi) = 3\chi^3 - \frac{5}{2}\chi^2 + \sqrt{3}\chi + 3}$ τότε το $\boldsymbol{\Pi.O.} = \mathbb{R}$

- Αν η συνάρτηση είναι **ρητή (κλασματική) το Π.Ο.** της είναι το σύνολο που προκύπτει από τον περιορισμό : **παρανομαστής**$\neq \boldsymbol{0}$.

Π.χ. Αν $\boldsymbol{f(\chi) = \frac{\chi^3 - 2013\chi^2 + \chi^{2014}}{3\chi - 6}}$ τότε πρέπει:

$\boldsymbol{\text{παρανομαστής} \neq 0} \Rightarrow 3\chi - 6 \neq 0 \Rightarrow 3\chi \neq 6 \Rightarrow \frac{3\chi}{3} \neq \frac{6}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\chi \neq 2}$

άρα $\boldsymbol{\Pi.O.} = \mathbb{R} - \{2\}$

Θυμήσου ότι το $\frac{5}{0}$ δεν ορίζεται αφού έχει μηδέν στον παρονομαστή.

- Αν η συνάρτηση είναι **άρρητη (έχουμε ρίζα με υπόριζο κάποια έκφραση του χ) το Π.Ο.** της είναι το σύνολο που προκύπτει από τον περιορισμό : **υπόριζο** $\geq \mathbf{0}$.

Π.χ. Αν $\mathbf{f(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 1}}$ τότε πρέπει:

Θυμήσου ότι το $\sqrt{-1}$ δεν ορίζεται αφού έχει αρνητικό υπόριζο.

$\mathbf{υπόριζο \geq 0} \Rightarrow \chi^2 - 1 \geq 0$

$\chi^2 - 1 = 0 \Rightarrow \chi^2 = 1 \Rightarrow \chi = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \chi = \pm 1$

χ	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\chi^2 - 1$	+	0	-	0	+

Άρα το $\chi \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

άρα το $\mathbf{\Pi.O.} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

- Αν η συνάρτηση είναι **λογαριθμική (lng(χ)) το Π.Ο.** της είναι το σύνολο που προκύπτει από τον περιορισμό : **g(x)**$> \mathbf{0}$.

Π.χ. Αν $\mathbf{f(\chi) = ln\,(\chi^2 - 3x + 2)}$ τότε πρέπει:

Θα δούμε παρακάτω ότι το ln(-1) δεν ορίζεται αφού έχει μη θετικό αριθμό μέσα του .

$\mathbf{''το\ μέσα\ '' > 0} \Rightarrow \mathbf{\chi^2 - 3x + 2} > 0$

$\mathbf{\chi^2 - 3x + 2} = 0$, Δ=1>0 , $\chi_{1,2} = 1$ ή 2

χ	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$\mathbf{\chi^2 - 3x + 2}$	+	0	-	0	+

Άρα το $\chi \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

άρα το $\mathbf{\Pi.O.} = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

Β. Τα αποτελέσματα y μιας συνάρτησης που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του χ ανήκουν σε ένα σύνολο που θα το ονομάζουμε **Σύνολο Τιμών (Σ.Τ.)**

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

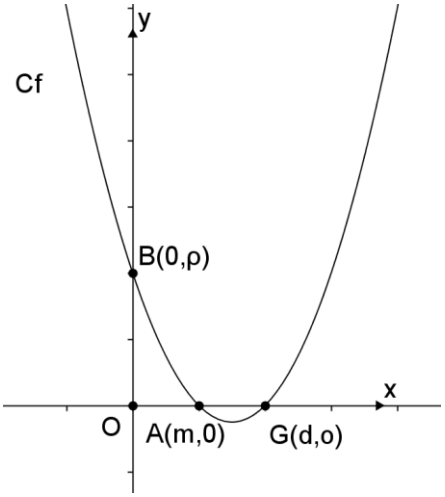
Όπως είπαμε πιο πάνω μία συνάρτηση π.χ. f συσχετίζει δύο αριθμούς χ, y=f(x) , οπότε παράγεται ένα ζεύγος αριθμών (χ,y) ή (χ,f(x)) που αντιστοιχεί σε ένα σημείο Α(χ,y) ή Α(χ,f(x)) του επιπέδου . Το σύνολο όλων αυτών των σημείων, που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές των χ, ονομάζεται **Γραφική Παράσταση της f** $(\mathbf{C_f})$**.**

Προφανώς ένα σημείο Α(κ,λ) θα ανήκει στη C_f αν και μόνο αν f(κ)=λ

Αλλιώς μπορούμε να γράψουμε : **Α(κ,λ)** $\in \mathbf{C_f} \Leftrightarrow$ **f(κ)=λ**

Για να βρούμε που η C_f τέμνει τους άξονες κάνουμε τα εξής:

- Για **τον χ'χ** θέτω **όπου y=0** δηλ . λύνω την εξίσωση **f(χ)=0** οπότε προκύπτει π.χ. το χ=m και το χ=d άρα η C_f τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία **Α(m,0) , G(d,0).**
- Για **τον y'y** θέτω **όπου x=0** δηλ . βρίσκω το y=ρ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο **Β(0,ρ).**



Βλέποντας την παραπάνω γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι:

- Η ανίσωση **f(x)>0** αντιστοιχεί στα κομμάτια της $\mathbf{C_f}$, που είναι πάνω από τον χ'χ άρα $\chi \in (-\infty, \mathbf{m}) \cup (\mathbf{d}, +\infty)$**.**
- Η ανίσωση **f(x)<0** αντιστοιχεί στα κομμάτια της $\mathbf{C_f}$, που είναι κάτω από τον χ'χ άρα $\chi \in (\mathbf{m}, \mathbf{d})$ **.**
- Η εξίσωση **f(x)=0** αντιστοιχεί στα σημεία της $\mathbf{C_f}$, που τέμνει τον χ'χ άρα $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{m}$ ή $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{d}$**.**

Πριν προχωρήσω στις ασκήσεις θα ήθελα να αναφέρω τα βασικά σημεία της **Εκθετικής και Λογαριθμικής Συνάρτησης**.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αρχικά θα θυμηθούμε τις ιδιότητες των δυνάμεων

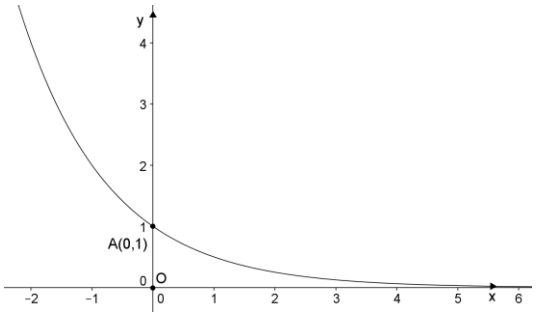
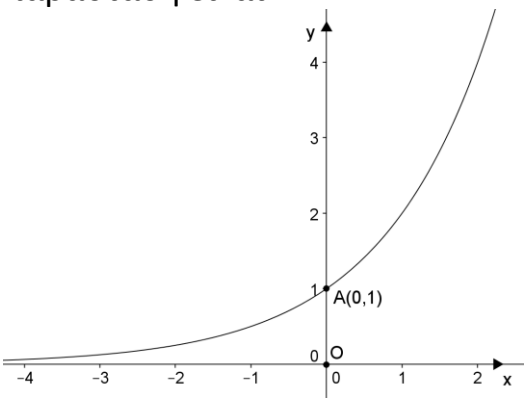
ΟΡΙΣΜΟΙ	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
• $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ • $\alpha^0 = 1$, $\alpha \neq 0$ • $\alpha^1 = \alpha$ • $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$, $\alpha \neq 0$ • $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$	• $\alpha^{\nu}.\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$ • $\alpha^{\nu}:\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$, $\alpha \neq 0$ • $(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu.\mu}$ • $\alpha^{\nu}.\beta^{\nu} = (\alpha.\beta)^{\nu}$ • $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = (\frac{\alpha}{\beta})^{\nu}$, $\beta \neq 0$ • $(\frac{\alpha}{\beta})^{-\nu} = (\frac{\beta}{\alpha})^{\nu}$, $\alpha, \beta \neq 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ **με** $\alpha > 0$ ονομάζεται εκθετική συνάρτηση **.**

- **Το Π.Ο. είναι όλο το** $\mathbb{R}$ **.**
- **Το Σ.Τ. είναι το** $(0, +\infty)$ **.**

Για τη γραφική της παράσταση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε η γραφική παράσταση είναι :	Αν $\alpha > 1$ τότε η γραφική παράσταση είναι :
	
• Η C_f είναι ↘ στο $\mathbb{R}$ • Έχει **ασύμπτωτο** (τον πλησιάζει αλλά δεν τον τέμνει) **άξονα τον θετικό ημιάξονα των χ .**	• Η C_f είναι ↗ στο $\mathbb{R}$ • Έχει **ασύμπτωτο** (τον πλησιάζει αλλά δεν τον τέμνει) **άξονα τον αρνητικό ημιάξονα των χ .**

Π.χ. **f(χ)=2^{χ}** $\Rightarrow \begin{cases} \text{αν } \chi = 0 \text{ τότε } f(0) = 2^0 = 1 \\ \text{αν } \chi = 1 \text{ τότε } f(1) = 2^1 = 2 \\ \text{αν } \chi = -2 \text{ τότε } f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

f(χ)=$(\frac{1}{2})^{\chi}$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{αν } \chi = 0 \text{ τότε } f(0) = (\frac{1}{2})^0 = 1 \\ \text{αν } \chi = 1 \text{ τότε } f(1) = (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2} \\ \text{αν } \chi = -2 \text{ τότε } f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4 \end{cases}$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η εκθετική συνάρτηση **f(χ)=e^{χ} , όπου e=2,718 .**

f(χ)=e^{χ} $\Rightarrow \begin{cases} \text{αν } \chi = 0 \text{ τότε } f(0) = \mathbf{e^0 = 1} \\ \text{αν } \chi = 1 \text{ τότε } f(1) = \mathbf{e^1 = e} \\ \text{αν } \chi = -2 \text{ τότε } f(-1) = \mathbf{e^{-1} = \frac{1}{e}} \end{cases}$

Πριν αναφέρω την λογαριθμική συνάρτηση , θα πω δυο λόγια για τον ορισμό του λογαρίθμου.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λογάριθμος του θ>0 με βάση το α$\in (\mathbf{0},\mathbf{1}) \cup (\mathbf{1},+\infty)$, ονομάζεται ένας αριθμός , που θα τον συμβολίζουμε με $\mathbf{\log_{\alpha}(\theta)}$ και ισχύει :

$$\boxed{\mathbf{\log_{\alpha}(\theta) = \chi \overset{\text{Ορισμός}}{\Longleftrightarrow} \theta = \alpha^{\chi}}}$$

Π.χ. $\log_2(8) = \chi \overset{\text{Ορισμός}}{\Longleftrightarrow} 8 = 2^{\chi} \Leftrightarrow 2^3 = 2^{\chi} \Leftrightarrow \chi = 3$

Άρα $\mathbf{\log_2(8) = 3}$

$\log_3(\frac{1}{9}) = \chi \overset{\text{Ορισμός}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{9} = 3^{\chi} \Leftrightarrow 3^{-2} = 3^{\chi} \Leftrightarrow \chi = -2$

Άρα $\mathbf{\log_3(\frac{1}{9}) = -2}$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει ο λογάριθμος με βάση το **e=2,718** , τον οποίο θα τον συμβολίζουμε με $\mathbf{\ln\theta}$, δηλ. $\mathbf{\log_e(\theta) = \ln\theta.}$

Πάμε , όμως, τώρα να δούμε μερικές ιδιότητες των λογαρίθμων . Θα τις παρουσιάσω με τους λογάριθμους που έχουν βάση το e=2,718 , δηλ. με το lnθ. Βέβαια ισχύουν και για τους λογαρίθμους με άλλες βάσεις.

- $\mathbf{ln\theta_1 + ln\theta_2 = ln(\theta_1 . \theta_2)}$
- $\mathbf{ln\theta_1 - ln\theta_2 = ln(\frac{\theta_1}{\theta_2})}$
- $\mathbf{ln(\theta_1{}^{\kappa}) = \kappa . ln\theta_1}$

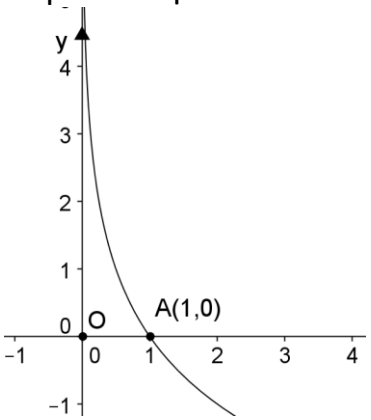
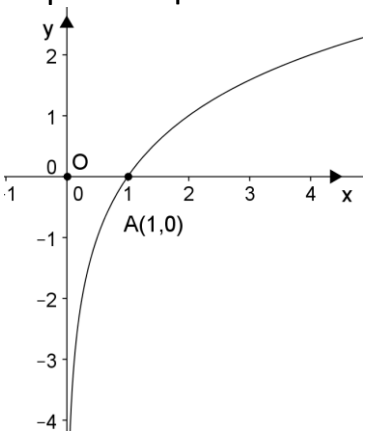
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \log_a(x)}$ $\mathbf{με\ \alpha > 0}$ ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση **.**

- **Το Π.Ο. είναι το** $\mathbf{(0, +\infty)}$ **.**
- **Το Σ.Τ. είναι όλο το** $\mathbb{R}$**.**

Για τη γραφική της παράσταση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

<table>
<tr>
<td>Αν $\mathbf{0 < \alpha < 1}$ τότε η γραφική παράσταση είναι :
 
</td>
<td>Αν $\mathbf{\alpha > 1}$ τότε η γραφική παράσταση είναι :
 
</td>
</tr>
<tr>
<td>• Η C_f είναι ↘ στο $\mathbf{(0, +\infty)}$
• Έχει ασύμπτωτο (τον πλησιάζει αλλά δεν τον τέμνει) άξονα τον θετικό ημιάξονα των y.</td>
<td>• Η C_f είναι ↗ στο $\mathbf{(0, +\infty)}$
• Έχει ασύμπτωτο (τον πλησιάζει αλλά δεν τον τέμνει) άξονα τον αρνητικό ημιάξονα των y .</td>
</tr>
</table>

Επειδή η πιο πάνω θεωρία μπορεί να σας φάνηκε λίγο δύσκολή , πάμε να δούμε μερικές εφαρμογές , οι οποίες όμως είναι η ουσία και πρέπει να τις καταλάβετε καλά.

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Στις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τις τιμές : f(-2), f(-1), f(0), f(1).

α. $\mathbf{f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

β. $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+1\,, & x\geq 0 \\ \sqrt{x^2+1}\,, & x<0 \end{cases}}$

ΛΥΣΗ

α. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \overset{x=-2}{\Longrightarrow} f(-2)=\frac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1}=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\mathbf{f(-2)=\frac{3}{5}}}$

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \overset{x=-1}{\Longrightarrow} \ldots$

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \overset{x=0}{\Longrightarrow} \ldots$

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \overset{x=1}{\Longrightarrow} \ldots$

β. Αφού χ=-2<0 τότε θα πάρουμε τον κάτω κλάδο της f που ορίζεται για χ<0, δηλ.

$f(x)=\sqrt{x^2+1} \overset{x=-2}{\Longrightarrow} f(-2)=\sqrt{(-2)^2+1}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mathbf{f(-2)=\sqrt{5}}}$

Αφού χ=-1<0 τότε θα πάρουμε τον κάτω κλάδο της f που ορίζεται για χ<0 , δηλ.

$f(x)=\sqrt{x^2+1} \overset{x=-1}{\Longrightarrow} \ldots$

Αφού χ=0 τότε θα πάρουμε τον πάνω κλάδο της f που ορίζεται για $\chi\geq 0$ άρα και χ=0 , δηλ.

$f(x)=x^3-x^2+1 \overset{x=0}{\Longrightarrow} \ldots$

Αφού χ=1 τότε θα πάρουμε τον πάνω κλάδο της f που ορίζεται για $\chi\geq 0$, δηλ.

$f(x)=x^3-x^2+1 \overset{x=1}{\Longrightarrow} \ldots$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Στις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τα Π.Ο. τους .

Λύνεται με σχήμα Horner

α. $g(x) = x^2 - 3x + 2$

β. $h(x) = \frac{e^x+1}{x^2-5x+6}$

γ. $f(x) = \sqrt{2(x-3)+4}$

δ. $H(x) = ln(x^3 - 4x^2 + x + 6)$

ΛΥΣΗ

(ΔΕΣ ΤΑ ΛΥΜΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΙΟ ΠΑΝΩ)

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί :

α. Η τιμή του λ ώστε το σημείο Α(1,3)$\in C_f$.

β. Η τιμή του κ$\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο Β(κ,15)$\in C_f$.

γ. Που η C_f τέμνει τους άξονες.

δ. Για ποια χ η C_f είναι πάνω από τον χ'χ.

ε. Για ποια χ C_f είναι κάτω από τον χ'χ.

στ. Για ποια χ η C_f είναι πάνω από την C_g με $g(x)=x^2-3x+2$

ζ. Για ποια χ η C_f είναι κάτω από την C_h με $h(x)=-3x+6$.

ΛΥΣΗ

α. **Α(1,3)$\in C_f \Rightarrow f(1)=3 \Rightarrow 1^2-6.1+\lambda=3$**

$$\Rightarrow 1-6+\lambda=3 \Rightarrow -5+\lambda=3 \Rightarrow \lambda=3+5 \Rightarrow \boxed{\lambda=8}$$

β. **Β(κ,15)$\in C_f \Rightarrow f(\kappa)=15 \Rightarrow \kappa^2-6.\kappa+\lambda=15 \overset{\lambda=8}{\Longrightarrow}$**

$$\kappa^2-6.\kappa+8-15=0 \Rightarrow \kappa^2-6.\kappa-7=0$$

α=1 , β=-6 , γ=7

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4.1.(-7)=36+28=64$$

$$\kappa_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{64}}{2.1}=\frac{6\pm8}{2}\Rightarrow\begin{cases}\kappa_1=\frac{6+8}{2}=\frac{14}{2}=7\Rightarrow\boxed{\kappa_1=7}\\ \kappa_2=\frac{6-8}{2}=\frac{-2}{2}=-1\Rightarrow\boxed{\kappa_2=-1}\end{cases}$$

γ. **Για να βρω που η C_f τέμνει τον χ'χ λύνω την εξίσωση**

f(x)=0$\Rightarrow x^2-6.x+\lambda=0 \overset{\lambda=8}{\Longrightarrow} x^2-6.x+8=0 \Rightarrow$

α=1 , β=-6 , γ=8

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4.1.8=36-32=4$$

$$\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2.1}=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow\begin{cases}\chi_1=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4\Rightarrow\boxed{\chi_1=4}\\ \chi_2=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow\boxed{\chi_2=2}\end{cases}$$

Η C_f τέμνει τον χ'χ στα σημεία Γ(4,0) και Δ(2,0)

Για να βρω που η C_f τέμνει τον y'y θέτω χ=0 , στην f

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 6.\mathrm{x} + \lambda = 0 \overset{x=0}{\overset{\lambda=8}{\Longrightarrow}} f(0) = 0^2 - 6.0 + 8 = 8$$

$$\Rightarrow f(0) = 8$$

Η C_f τέμνει τον y'y στο σημείο Ε(0,8) .

δ. Για να βρω για ποια χ η C_f είναι πάνω από τον χ'χ λύνω την ανίσωση:

$$\mathrm{f(x)} > 0 \Rightarrow \mathrm{x}^2 - 6.\mathrm{x} + \lambda > 0 \overset{\lambda=8}{\Longrightarrow} \mathrm{x}^2 - 6.\mathrm{x} + 8 > 0 \Rightarrow$$

… (**Μία ανάλογη ανίσωση είναι λυμένη στη σελ. 3 , διαβάστε την και προσπαθήστε να τη λύσετε.**)

ε. Για να βρω για ποια χ η C_f είναι κάτω από τον χ'χ λύνω την ανίσωση: $\mathrm{f(x)} < 0 \Rightarrow$ …

στ. Για να βρω για ποια χ η C_f είναι πάνω από την C_g λύνω την ανίσωση: $f(x) > g(x) \Rightarrow \ldots$

ζ. Για να βρω για ποια χ η C_f είναι κάτω από την C_g λύνω την ανίσωση: $f(x) < g(x) \Rightarrow \ldots$

ΑΣΚΗΣΗ 3η (Και τώρα μια δύσκολη …)

Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $f(x)=\alpha\ln x+2\beta$ **με** $x>0$ **όταν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία (1,6) και (e,-3).**

β. $g(x)=\begin{cases}\alpha x-2 & ,x\neq 3\\ \beta^2-2\alpha-1 & ,x=3\end{cases}$ **όταν** $g(3)=2g(-1)=4$

γ. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}-3\alpha & ,-2\le x<8\\ \beta\sqrt{x}+2 & ,x\ge 9\end{cases}$ **όταν η γραφική παράσταση της h(x) διέρχεται από τα σημεία** $(2,\alpha^2+2)$ **και** $(9,11\alpha)$

Λύση