ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ &
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ. Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Δημήτριος Ι. Μπουνάκης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Ταχ. Δ/νση : Μονοφατσίου 8
Ταχ. Κώδικας : 712 01 ΗΡΑΚΛΕΙΟ
Τηλ. Κατοικίας : 2810252140
Κινητό :6976465429
e-mail : dimitrmp@sch.gr

Ηράκλειο, 18 Οκτωβρίου 2010

Προς : Τους κ. κ. Καθηγητές Μαθηματικών των Νομών, Χανίων, Ρεθύμνου και Ηρακλείου αρμοδιότητάς μου.

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής & Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Μ. Κ. : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ »

Συνάδελφοι,

Το διδακτικό αυτό υλικό είναι συνέχεια του προηγουμένου-βελτιωμένου- των Μιγαδικών και αποτελεί συνένωση των παλαιών αρχείων «Συναρτήσεις» και «Όρια-Συνέχεια» του 2007.Από την μακρόχρονη εμπειρία μου είχα διαπιστώσει ότι το σχολικό βιβλίο δεν επαρκεί για να βοηθήσει πραγματικά τον καθηγητή που διδάσκει στην Γ΄ Λυκείου και απαιτείται ένα συμπλήρωμα. Αυτό ακριβώς το συμπλήρωμα προσπαθώ με τις σημειώσεις αυτές να υλοποιήσω, έχοντα κατά νου και την σύσταση του G. Polya, ο οποίος στο περίφημο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» (1998, σελ.161) γράφει:

«Ο πρώτος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε αυτό που πρόκειται να διδάξετε. Ο δεύτερος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξετε»

Οι αναγκαίες αυτές συνθήκες δεν είναι όμως και ικανές για ένα αποτελεσματικό Καθηγητή. Γι' αυτό είναι ανάγκη να στρέφομε το ενδιαφέρον μας και προς την Διδακτική των Μαθηματικών (και όχι μόνο).. Στον τομέα αυτόν προσπαθώ να συμβάλλω με άλλα κείμενά μου, το περιεχόμενο των οποίων δεν πρέπει να αγνοείται, ακόμη και στην Γ΄ Λυκείου, εν ονόματι μιας (κακώς ή καλώς εννοούμενης) «φροντιστηριακής προετοιμασίας» των μαθητών ή μιας «αυστηρής» Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Υπενθυμίζω ότι οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται *μόνο* στους διδάσκοντες το μάθημα. Ένα αντίγραφο του αρχείου αυτού να μείνει στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) του σχολείου.

Παρατηρήσεις, Επισημάνσεις, Συμπληρώσεις και Ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο της Ανάλυσης (ενότητες 1.1 - 1.8)

Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ενότητες 1.1-1.3)

1. Επανάληψη της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Στην αρχή του κεφαλαίου, είναι απαραίτητη η γενική επανάληψη της κλασικής Άλγεβρας κυρίως της Α΄ Λυκείου με έμφαση στις ταυτότητες, ανισοταυτότητες, απόλυτες τιμές, τριώνυμο και την βασική Μαθηματική λογική, περισσότερο αναλυτική από ότι την έχει το σχ. βιβλίο. Η επανάληψη αυτή μπορεί να συνδυαστεί και με την εύρεση του πεδίου ορισμού συναρτήσεων. Ας έχουμε υπόψη ότι η αλγεβρική υστέρηση των μαθητών δυσκολεύει τη παραπέρα εκμάθηση της Ανάλυσης.

2. Συμβολισμός μεταβλητών και συναρτήσεων.

α) Χρήσιμο είναι να χρησιμοποιούμε και άλλους συμβολισμούς για τον τύπο μιας συνάρτησης, εκτός από τον συνηθισμένο $y = f(x)$: η ανεξάρτητη μεταβλητή καλό είναι να μην είναι πάντα x και η εξαρτημένη y, *ιδίως στις παραγώγους* π.χ. $x(t)$, $\varphi(\lambda)$, $g(y)$, $Q(P)$ κλπ.
Αυτό αποτρέπει την μονοτονία και την μηχανική μάθηση, βοηθά στην κατανόηση των διαφόρων εννοιών που αναφέρονται στις συναρτήσεις και συνδέει τις συναρτήσεις με πραγματικά αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη από άλλες επιστήμες.
β) Στην αντίστροφη της $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν υπάρχει πάντα λόγος να γίνεται x (και η εξαρτημένη y) καλύτερα να μένει όπως προκύπτει. Αν πρόκειται π.χ. για φυσικά μεγέθη δεν επιτρέπεται, αλλά και δεν έχει νόημα, η αλλαγή μεταβλητής. Όταν όμως εξετάζουμε και τις δυο συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (από Μαθηματικής - τυπικής πλευράς, δηλ. χωρίς να μας ενδιαφέρουν τα μεγέθη που παριστάνουν οι μεταβλητές τους), τότε επιβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να παρίσταται με το ίδιο γράμμα.

3. Στην ισότητα των συναρτήσεων: ο ορισμός της ισότητας είναι ένας τυπικός αριθμητικός ορισμός, δηλαδή δεν εξετάζει το μέγεθος (και τη μονάδα) που παριστάνει η μεταβλητή της συνάρτησης. Να αναφέρουμε και ότι, δυο συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες (σύμφωνα με τον ορισμό του σχ. βιβλίου) αν έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού ή όταν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού Α και υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\xi \in A$ με $f(\xi) \neq g(\xi)$.

4. Στη σύνθεση των συναρτήσεων

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης, όπως διατυπώνεται στο βιβλίο δεν χρειάζεται να απομνημονευτεί και να χρησιμοποιείται μηχανικά. Μπορεί εύκολα να βρίσκεται κάθε φορά ως εξής: αν έχουμε την σύνθεση, π.χ. των συναρτήσεων $\lambda(x)$ και $\varphi(x)$, φολ, με πεδία ορισμού D_λ, D_φ, αντίστοιχα, *τότε γράφουμε καταρχήν*

$$(\varphi o \lambda)(x) = \varphi(\lambda(x))$$

και *παρατηρώντας προσεκτικά το δεύτερο μέλος της ισότητας* αυτής διαπιστώνουμε ότι: το πεδίο ορισμού της σύνθεσης πρέπει να είναι, το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους καταρχήν μπορεί να λειτουργήσει η λ (εσωτερική), (δηλ. που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της λ) για τους οποίους ο αριθμός λ(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της φ (για να μπορεί να λειτουργήσει η φ!), ή

$$D_{\varphi o \lambda} = \{x \in D_\lambda \text{ με } \lambda(x) \in D_\varphi\}$$

Αν διαπιστώσουμε ότι δεν είναι κενό, προχωρούμε να βρούμε τον τύπο της φολ : $(\varphi o \lambda)(x) = \varphi(\lambda(x)) = \ldots$, ενώ αν είναι κενό δεν ορίζεται η σύνθεση φολ.
Αυτός είναι ο λόγος που πρέπει να *προηγείται* της εύρεσης του τύπου της σύνθεσης η εύρεση του πεδίου ορισμού της. Τέλος καλό είναι να επαληθεύουμε αν το πεδίο ορισμού της τελικής συνάρτησης (φολ)(x) που βρήκαμε συμπίπτει με το $D_{\varphi o \lambda}$.

5. Βασικές μέθοδοι για την (αλγεβρική) εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

α) Κατασκευαστική μέθοδος (ευθεία απόδειξη). Χρήσιμες είναι εδώ οι ιδιότητες των ανισοτήτων καθώς και η μονοτονία των συναρτήσεων e^x, lnx .
β) Μέθοδος της διαφοράς (όμοια με την παλιά μέθοδο του λόγου μεταβολής).

6. Α. Το «όταν» στο ορισμό της γν. αύξουσας , αλλά και στους άλλους ορισμούς, έχει την έννοια του «αν και μόνο αν».
Β. Μετά τον ορισμό της γν. αύξουσας (γν. φθίνουσας) συνάρτησης απαραίτητο και χρήσιμο είναι να αποδειχθεί (στην τάξη, με άτοπο απαγωγή) ότι

- Αν φ γνησίως αύξουσα τότε, $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha < \beta$
- Αν φ γνησίως φθίνουσα τότε, $\varphi(\alpha) < \varphi(\alpha) \Rightarrow \alpha > \beta$
- Αν φ γνησίως μονότονη τότε $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ (1-1).

Από τον ορισμό της μονοτονίας (στο τελευταίο, της συνάρτησης) ισχύουν και τα αντίστροφα. Έτσι οι προκύπτουσες ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν *στη λύση ανισώσεων και εξισώσεων.* (Αυτή τη συμπλήρωση, όπως και πολλές άλλες, οι μαθητές πρέπει, με δική μας προτροπή, να τις γράφουν πάνω στο βιβλίο τους). Επίσης όταν την εφαρμόζουν οι μαθητές, να λένε τουλάχιστον ότι προκύπτει από τον ορισμό της μονοτονίας και διά της εις άτοπον απαγωγής.

7. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται πάντοτε *σε συγκεκριμένα διαστήματα* του πεδίου ορισμού της και δεν κληρονομείται (πάντα) στην ένωσή τους**.**
Έτσι, αν φ γνησίως φθίνουσα (γνησίως αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ), τότε δεν είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους $(\alpha, \beta] \cup (\beta, \gamma)$, π.χ. η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$ και $\varphi(x) = -x$ για $x \le 0$

- Ισχύει όμως ότι :

Αν φ γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ) και συνεχής στο β, τότε η φ είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους $(\alpha, \beta] \cup (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$ (απόδειξη στη σελ. 11, IV.1) .

8. Η (αλγεβρική) εύρεση των (ολικών) ακροτάτων μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει:

α) Με τις γνωστές βασικές (Αλγεβρικές) ανισοταυτότητες:

- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ ή $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ (ισότητα για $\alpha = \beta$)
- Αν $\theta > 0$ τότε $\theta + \frac{1}{\theta} \geq 2$ (ισότητα για $\theta = 1$).

π.χ. για την συνάρτηση $f(x) = \frac{12x}{9 + x^2}$, έχουμε $9 + x^2 \geq 6|x|$ ή $|f(x)| \leq 2$ με ισότητα για $x = 3, -3$ κλπ

.

β) με την βοήθεια της μονοτονίας σε κλειστό διάστημα.

π.χ. η $f(t) = \sqrt{2 - \sqrt{t-1}}$ με $A = [1, 5]$, αποδεικνύεται γν. φθίνουσα, οπότε για κάθε $1 \leq t \leq 5$ ισχύει $f(5) \leq f(t) \leq f(1)$, άρα η f έχει μέγιστο, ελάχιστο κλπ.
Ενώ στο διάστημα (1, 5) ισχύει $f(5) < f(t) < f(1)$ και δεν έχει ακρότατα.

- Γενικά: μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε *ανοικτό* διάστημα, δεν έχει ακρότατα. (Απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής)

γ) Με την βοήθεια του συνόλου τιμών,

π.χ. αν $\varphi(A) = [2, +\infty)$, η φ έχει ελάχιστο το 2 (για την τιμή του $x \in A$ με $\varphi(x) = 2$) αλλά όχι μέγιστο.

9. Να διασαφηνιστούν περισσότερο και να τονιστεί η σημασία των σημαντικών σχολίων-προτάσεων της σελίδας 152 οι οποίες είναι ισοδύναμες του ορισμού μιας 1-1 συνάρτησης. Επίσης στο σχόλιο της σελίδας 153 το «προφανώς» να αποδειχθεί (στη τάξη, με άτοπο απαγωγή) και να τονιστεί το αντίστροφο με το αντιπαράδειγμα.

10. Πολλές φορές για την απόδειξη του 1-1 μιας συνάρτησης είναι ευκολότερο να δείξουμε πρώτα ότι είναι γνησίως μονότονη, π.χ. $\lambda(x) = e^x + 5x$.

11. Σύνολο τιμών Συνάρτησης

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης παίζει σπουδαίο ρόλο σε πολλά θέματα της Ανάλυσης. Είναι χρήσιμο :

- ✓ Για την εύρεση των (ολικών) ακροτάτων.
- ✓ Ως πεδίο ορισμού της αντίστροφης
- ✓ Για την ύπαρξη ρίζας εξίσωσης.

Τρόποι εύρεσης συνόλου τιμών: Αλγεβρικός - Αναλυτικός.

Η (αλγεβρική) εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης μπορεί να μας δώσει συγχρόνως και την πληροφορία αν η συνάρτηση είναι 1-1 και στην περίπτωση αυτή έχουμε άμεσα και την αντίστροφή της.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = 2+\sqrt{x-1}$. Πεδίο ορισμού $A = [1, +\infty)$.

Αναζητούμε τα $y\in R$ για τα οποία υπάρχει $x\in A$ με $y = \varphi(x)$, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $y = \varphi(x)$ ως προς x (με παράμετρο y).

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &\Leftrightarrow y = 2+\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow x - 1 = (y-2)^2 \text{ και } y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 + (y-2)^2,\ y \geq 2. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $y \geq 2$ υπάρχει $x = 1 + (y-2)^2 \geq 1$ ($x\in A$) με $y = \varphi(x)$.

Άρα $\varphi([1, +\infty)) = [2, +\infty)$ (αφού $[2, +\infty) \subseteq \varphi([1, +\infty))$ αλλά λόγω των ισοδυναμιών και $\varphi([1, +\infty)) \subseteq [2, +\infty)$).

Επί πλέον, επειδή για κάθε $y \geq 2$ υπάρχει μοναδικό $x = 1 + (y-2)^2\in A$ με $y = \varphi(x)$, η φ είναι 1-1, με αντίστροφη την $\varphi^{-1}(y) =1 + (y-2)^2$, $y \geq 2$.

Η τήρηση των παραπάνω ισοδυναμιών πρέπει να τηρείται αυστηρά. Μην ξεχνούμε ότι (αυστηρή) διαδικασία λύσης εξίσωσης αγνώστου έστω χ, σημαίνει τον *ισοδύναμο* μετασχηματισμό της σε εξίσωση ή εξισώσεις -λυμένης -μορφής (χ=..)…

Σημείωση: Δεν υπάρχει πάντα λόγος να εναλλάζουμε τις μεταβλητές x, y, όπως αναφέρεται στο σχ. βιβλίο. Είναι πιο φυσικό και λογικό να διατηρούνται με τα σύμβολά τους οι μεταβλητές, προπάντων αν εκφράζουν φυσικά μεγέθη (π.χ. $S = 2t + 3$, t χρόνος, S διάστημα (σε κατάλληλες μονάδες τα t, S, 2, 3). Όταν όμως θέλουμε να ασχοληθούμε με θέματα που αφορούν την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της *στο ίδιο σύστημα αξόνων*, συνήθως τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα την ανεξάρτητη μεταβλητή και στον κατακόρυφο την εξηρτημένη, και των δυο συναρτήσεων, οπότε για διευκόλυνση μπορούμε να παριστάνουμε με το ίδιο γράμμα τις ανεξάρτητες μεταβλητές και με ένα άλλο τις εξηρτημένες. Αυτό π.χ. κάνουμε όταν θέλουμε να βρούμε τα κοινά σημεία της γ. π. μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της

Παρατήρηση

Η αλγεβρικός τρόπος εύρεσης του συνόλου τιμών μπορεί να μην εφαρμόζεται γενικώς (π.χ. όταν δεν μπορεί να λυθεί ως προς x η εξίσωση $y = f(x)$, π.χ. $f(x) = xe^x$), αλλά πολλές φορές είναι απλούστερος, αφού δεν απαιτεί την συνέχεια, την μονοτονία και την εύρεση ορίων του αναλυτικού τρόπου.

12. Η αντίστροφη μιας γν. μονότονης συνάρτησης είναι της αυτής μονοτονίας.

Πράγματι, έστω $\varphi(x)$, $x\in A$, π.χ. γν. φθίνουσα και $\kappa, \lambda\in\varphi(A)$, $\kappa < \lambda$.

Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta\in A$ με $\kappa = \varphi(\alpha)$, $\lambda = \varphi(\beta)$.

Έτσι έχουμε $\kappa < \lambda \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha > \beta \Rightarrow \varphi^{-1}(\kappa) > \varphi^{-1}(\lambda)$.

13. Σχέση φ , $φ^{-1}$ και διχοτόμου y = x.

Εκτός από την γνωστή και αξιοσημείωτη συμμετρία των γ. π. των φ , $φ^{-1}$, έχουμε τα εξής:

α) Αν φ(x) = x τότε $φ(x) = φ^{-1}(x)$ $(x \in A \cap φ(A) \neq \varnothing)$.
Δηλαδή, τα κοινά σημεία της γ. π. της φ(x) με την y = x είναι και κοινά σημεία των φ, $φ^{-1}$, y = x.

β) Αν φ γνησίως αύξουσα τότε, $φ(x) = φ^{-1}(x) \Leftrightarrow φ(x) = x$ $(x \in A \cap φ(A))$.
(Το ορθό αποδεικνύεται με άτοπο απαγωγή, ενώ το αντίστροφο προκύπτει εύκολα)
Άρα τα κοινά σημεία της (γν. αύξουσας) φ με την αντίστροφή της είναι πάνω στην διχοτόμο y = x. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο ιδίως όταν δεν μπορεί να βρεθεί η αντίστροφη π.χ. $φ(x) = xe^{x-1}$, $x \geq 0$,

γ) Αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα, δεν ισχύει η προηγούμενη ισοδυναμία.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, x > 0, έχει άπειρα κοινά σημεία (ταυτίζεται) με την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$.

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$, είναι γνησίως φθίνουσα και έχει με την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, κοινά σημεία (στο σύνολο [0, 1]) τα σημεία

$$(0,1),\ (1,0),\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

(προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in [0, 1]$ ή του συστήματος (y = f(x), x = f(y)).

Σημείωση 1

Πριν λίγα χρόνια ένας συνάδελφος «απέδειξε» ότι σε κάθε περίπτωση τα κοινά σημεία των f, f^{-1} είναι πάνω στην διχοτόμο y = x. Όμως, θεωρεί ότι η αντίστροφης μιας συνάρτησης είναι άμεσα, σε κάθε σημείο, «δεμένη» με τη συνάρτηση από την οποία προήλθε, με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της αντίστροφης να δημιουργείται με ορισμένη φορά διαγραφής, θεώρηση που ξεφεύγει τελείως από την ανεξαρτησία της αντίστροφης, όπως την θεωρούμε παραδοσιακά. Όποιος ενδιαφέρεται σχετικά μπορεί να ανατρέξει σε διάφορα ελληνικά μαθηματικά site ή να με ρωτήσει

Σημείωση 2

Σε ορισμένα βιβλία και περιοδικά υπάρχουν θεωρητικές ασκήσεις όπου με δεδομένη μια συναρτησιακή σχέση για την f (π.χ. $f^3(x) + f(x) = 3x$) αποδεικνύεται κατ' αρχήν ότι η f είναι 1-1. Στην συνέχεια η αντίστροφη βρίσκεται θέτοντας y = f(x) και καταλήγοντας άμεσα σε μια σχέση της μορφής x = g(y), οπότε συνάγεται ότι $f^{-1}(y) = g(y)$. Για να είναι αυτό σωστό πρέπει να δειχθεί και το αντίστροφο: $x = g(y) \Rightarrow y = f(x)$ και να προσεχθεί στη πορεία και το σύνολο τιμών της f.

Δίνουμε ένα παράδειγμα:

Έστω συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού το Α=R τέτοια ώστε $\varphi^3(x) + \varphi(x) = x$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δειχθεί ότι η φ είναι 1-1,
β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της φ και η αντίστροφή της.

Λύση
α) Απλό.
β) Για την εύρεση του συνόλου τιμών της φ, *αναζητούμε τα $y \in R$ για τα οποία υπάρχει $x \in R = A$ με $y = \varphi(x)$* , δηλαδή λύνουμε ως προς $x \in R$ την εξίσωση $y = \varphi(x)$. Από την δοθείσα σχέση με $y = \varphi(x)$ έχομε

$$y^3 + y = x \text{ και με } y \in R \text{ έχουμε } x \in R = A$$

Από αυτό δεν μπορούμε να πούμε ότι λύσαμε την εξίσωση $y = \varphi(x)$ ως προς x (και άρα $\varphi^{-1}(y) = y^3 + y,\ y \in R$)

(Λύση εξίσωσης ως προς x, σημαίνει, ουσιαστικά, τον ισοδύναμο μετασχηματισμό της στη μορφή x = ή x =..). Για να το πούμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε και το αντίστροφο:

Αν $x, y \in R$ και $x = y^3 + y$ τότε $y = \varphi(x)$

Έστω $x, y \in R$ με $y^3 + y = x$, οπότε λόγω της υπόθεσης έχουμε $y^3 + y = \varphi^3(x) + \varphi(x)$.

Για να προκύψει η $y = \varphi(x)$, αρκεί η συνάρτηση $g(t) = t^3 + t$ να είναι 1-1 στο R
Πράγματι, αυτό αποδεικνύεται κατά τα γνωστά, οπότε $y = \varphi(x)$,

Άρα $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = y^3 + y$ με $x, y \in R$

Επομένως για κάθε $y \in R$ υπάρχει (μοναδικό) $x = y^3 + y \in R$ με $y = \varphi(x)$.Άρα η φ έχει σύνολο τιμών το R, (είναι 1-1) και αντίστροφη την

$$\varphi^{-1}(y) = y^3 + y,\ y \in R$$

Βέβαια θα μπορούσε ως βοηθητικό ερώτημα να είχε δοθεί, το να δειχθεί ότι η $g(t) = t^3 + t$ είναι 1-1 (Βλ. σχετικά και τις ασκήσεις 17,18).

Σημείωση

Μια άλλη πορεία λύσης μπορούσε να στηριχθεί στην Πρόταση:
Έστω φ, g συναρτήσεις ορισμένες στο R με $g(\varphi(x)) = x$ για κάθε $x \in R$.Αν η φ έχει σύνολο τιμών το R τότε
α) οι συναρτήσεις g, φ είναι 1 -1,
β) Η g είναι η αντίστροφη της φ (και αντίστροφα)

(αφήνεται ως άσκηση)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $x(t) = \ln\frac{1+t}{1-t}$ και να δειχθεί ότι είναι περιττή. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης (γ. π.) της x(t) με τους άξονες.

2. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γ. π. των συναρτήσεων
$g(x) = x^3 - x + 1$, $h(x) = 2x + 3$.

3. Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(y) = \frac{1}{y} - \ln y$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση $y\ln y + y = 1$ έχει μοναδική προφανή λύση, η οποία και να βρεθεί.

4. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(\alpha) = \left(\frac{3}{7}\right)^{\alpha} + \left(\frac{4}{7}\right)^{\alpha} - 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα (στο πεδίο ορισμού της),
β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3^x + 2^{2x} = 7^x$ έχει μόνο την λύση x = 1.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\varphi(x^3 + x) = \varphi(3 - x)$.

5. α) Αν για μια συνάρτηση φ ισχύει $2000 \le \varphi(\lambda) \le 2007$ για κάθε $\lambda \in R$, τότε η φ:
Α. έχει ελάχιστο Β. έχει μέγιστο Γ. έχει ελάχιστο και μέγιστο Δ. ίσως έχει ακρότατα.
β) Μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1) και είναι 1-1.
Η αντίστροφή της:
Α. έχει μέγιστο Β. έχει ελάχιστο Γ. δεν έχει ακρότατα.
γ) Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το A και είναι 1-1, τότε η ισότητα
$(g\circ g^{-1})(\lambda) = \lambda$
Α. Δεν ισχύει ποτέ Β. ισχύει για κάθε $\lambda \in A$ Γ. ισχύει για κάθε $\lambda \in g(A)$
δ) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το Α και είναι 1-1, τότε για τις συναρτήσεις $f\circ f^{-1}$, $f^{-1}\circ f$ ισχύει
Α. είναι ίσες Β. δεν είναι ίσες Γ. μερικές φορές είναι ίσες.

6. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο Α. Να αποδειχθεί ότι:
Α. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σημείο Σ(α, β) να είναι κέντρο συμμετρίας της γ. π. της φ είναι να ισχύει $\varphi(2\alpha - \chi) = 2\beta - \varphi(\chi)$ για κάθε χ , $(2\alpha - \chi) \in A$
Β. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $\chi = \xi$ να είναι άξονας συμμετρίας της γ. π. της φ είναι να ισχύει $\varphi(2\xi - \chi) = \varphi(\chi)$ για κάθε χ , $(2\xi - \chi) \in A$.
Γ. Ποια συμμετρία παρουσιάζει η γ. π. μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης;

7. Με την βοήθεια των ανισοταυτοτήτων $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$, $\theta + 1/\theta \ge 2$, $(\theta>0)$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $x(t) = \frac{4t}{1+t^2}$. Επίσης η ελάχιστη τιμή της $f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$. Έχει μέγιστη τιμή η f(x); (Απ.2, 2, -2, όχι)

8 Με την βοήθεια της ανισότητας $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$(ισότητα αν και μόνο $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ παράλληλα) να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $h(x) = |x|+\sqrt{8-x^2}$. (Απ. 4)

9. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t + 6$, $t \ge 2$ είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί η αντίστροφή της. Στην συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της γ. π. της x(t) με την αντίστροφή της.

10. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x(y) = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$, και η αντίστροφή της αν υπάρχει.

11. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(y) = \ln(-y + \sqrt{1+y^2}\,)$. Να αποδειχθεί ότι

α) έχει πεδίο ορισμού το R και είναι περιττή,

β) είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της,

γ) να βρεθούν τα ακρότατα της φ και της αντίστροφής της.

12. Έστω f, g συναρτήσεις 1-1 με κοινό πεδίο ορισμού A και κοινό σύνολο τιμών A. Να αποδειχθεί ότι, α) οι συναρτήσεις fog, gof είναι 1-1,

β) Ισχύει $(fog)^{-1} = g^{-1}o\, f^{-1}$, $(gof)^{-1} = f^{-1}o\, g^{-1}$.

13*. Έστω η συνάρτηση με τύπο $x(t) = \dfrac{e^t}{e^t + \sqrt{e}}$, $t\in R$.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in (0, 1)$ υπάρχει μοναδικό $t\in R$ με $x = \dfrac{e^t}{e^t + \sqrt{e}}$.

β) Η συνάρτηση $f(\alpha) = x(\alpha) + x(1-\alpha)$, $\alpha\in R$ είναι σταθερή,

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma = x\left(\dfrac{1}{10}\right) + x\left(\dfrac{2}{10}\right) + \ldots + x\left(\dfrac{9}{10}\right)$. (Απ.9/2)

14. Αν οι κορυφές ενός τριγώνου βρίσκονται στην υπερβολή y = 1/x να δειχθεί ότι και το ορθόκεντρό του βρίσκεται πάνω σ' αυτήν

.

15*. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R και g(R) = R ώστε (fog)(x) = x για κάθε $x \in R$.Να αποδειχθεί ότι, α) οι f, g είναι 1-1, β) $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$.

16.** Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες ισχύει $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t\in R$ και για κάθε θετικό αριθμό ε. Να δειχθεί ότι είναι ίσες. Όμοια με την ιδιότητα $f^2(t) + g^2(t) \le \varepsilon + 2f(t)g(t)$.

17*. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και f(x) > 0 για κάθε $x\in R$, που ικανοποιεί την σχέση $\dfrac{1}{f(x)} - \ln f(x) = x$ για κάθε $x\in R$, καθώς και η συνάρτηση

$\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \ln t$. α) Να δειχθεί ότι οι f, φ είναι γνησίως μονότονες,

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f αν υπάρχει, γ) Να βρεθεί η τιμή f(1). (Απ. 1)

18.** α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(t) = e^t/t$, $t \ge 1$ είναι γν. αύξουσα (με παράγωγο).

β) Έστω συνάρτηση f(x), $x \ge e$, για την οποία ισχύουν $e^{f(x)} = x\, f(x)$ και $f(x) \ge 1$ για κάθε $x \ge e$. Να δειχθεί ότι η f είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Β. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ενότητες 1. 4 - 1. 7)

1. Α. Χρήσιμο είναι να γίνει διάκριση των εννοιών:

- «*δεν έχει έννοια* το όριο της f στο $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$»: όταν η συνάρτηση f δεν ορίζεται «κοντά στο ξ», π.χ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-|x|}$, $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\varepsilon\varphi\omega$.

- «*δεν υπάρχει* το όριο της f στο $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$»: όταν το όριο έχει έννοια και τα πλευρικά όρια (όταν η f ορίζεται εκατέρωθεν του ξ) είναι διαφορετικά (πεπερασμένα ή άπειρα), π.χ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$. Αυτή είναι η πλέον συνηθισμένη, για το σχ. βιβλίο, περίπτωση, αλλά είναι δυνατόν να μην υπάρχει (σύμφωνα πλέον με τον ορισμό του ορίου) ούτε ένα από τα πλευρικά όρια.

Β. Σύμφωνα με το σχ. βιβλίο η έκφραση «υπάρχει το όριο…» σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός ή άπειρο. Σε ορισμένα πανεπιστημιακά βιβλία αυτό σημαίνει ότι είναι μόνο πραγματικός αριθμός .

Γ. Συνηθίζεται όταν ζητείται να βρεθεί ένα όριο αυτό να έχει έννοια, ανεξάρτητα αν υπάρχει ή όχι. Έτσι, αν τυχόν ο ερωτών θέλει να εξετάσει ο ερωτώμενος αν έχει ή όχι έννοια ένα όριο, πρέπει να το ζητήσει συγκεκριμένα (και μετά ίσως αν υπάρχει να ζητήσει και να βρεθεί).

Δ. Όταν ζητείται να εξεταστεί αν έχει έννοια το όριο μιας συνάρτησης στο σημείο $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$, δεν χρειάζεται να βρεθεί το πεδίο ορισμού της (όπως βέβαια και όταν ζητείται να βρεθεί ένα όριο). Αρκεί να είναι ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου αυτού (άλλο βέβαια ότι πολλές φορές είναι πιο εύκολο να βρούμε πρώτα το πεδίο ορισμού της και μετά να διαπιστώσουμε αυτό).

Άλλωστε υπάρχει περίπτωση να μην είναι εύκολο να βρεθεί το πεδίο ορισμού (και να τεθεί σε μορφή διαστημάτων), οπότε μας αρκεί να εξασφαλίσουμε περιοχή του σημείου (εκτός ίσως του σημείου) στην οποία ορίζεται η συνάρτηση. Π.χ.

Να εξεταστεί αν έχει έννοια τα όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\lambda+2}{\lambda^6-\lambda+1}$.

Η εύρεση του πεδίου ορισμού δεν είναι εύκολη (είναι το R, αλλά και δεν μας ενδιαφέρει). Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\lambda^6-\lambda+1)=1>0$, οπότε $\lambda^{2010}-\lambda+1\neq (>)\ 0$ κοντά στο 0 κλπ.

2. Στο 1^o θεώρημα της διάταξης (σελ.165).
Να σημειωθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο: π.χ. $x^2>0$ κοντά στο 0 (π.χ. στο $(-1, 0)\cup(0, 1)$), αλλά (όπως θα δούμε παρακάτω) $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,

3. Στο 2^{o} θεώρημα της διάταξης (σελ.166).
Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ, δεν συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$,
(το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα)
Ισχύει όμως πάντα ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) \le \lim_{x\to\xi} g(x)$ (εφόσον τότε είναι και $f(x) \le g(x)$).
π.χ. $x^2 < 2x^2$, $x \ne 0$, αλλά $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$.

4. Το Θεώρημα (όρια και πράξεις) της σελίδας 166, μετά το «τότε» να προστεθεί « υπάρχουν τα παρακάτω όρια και ισχύουν»…
Το ίδιο και στο κριτήριο παρεμβολής (σελ.169) «υπάρχει το όριο της f στο x_0 και…». Αυτή είναι η σωστή διατύπωση των θεωρημάτων και αποτρέπει λάθη.
Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, π.χ.
Για την ιδιότητα $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$, έχουμε
$\lim_{x\to\xi}\left(\frac{|x|}{x}\cdot\left(-\frac{|x|}{x}\right)\right) = -1$, αλλά δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$, $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{|x|}{x}\right)$.

- Ισχύει όμως ότι, αν υπάρχουν τα όρια των π.χ. των f + g και f στο ξ, τότε υπάρχει και όριο της g και της f - g στο ξ. (Να δοθεί ως άσκηση) .

5. (Ιδιότητα 5, θεωρήματος σελ.166).
Αν $\lim_{t\to\xi}|f(t)| = |\alpha|$ δεν συνεπάγεται ότι $\lim_{t\to\xi} f(t) = \alpha$ (το αντίστροφο ισχύει πάντα).
π.χ. $\lim_{x\to 1}|x^2| = |-1|$ αλλά $\lim_{x\to 1} x^2 \ne -1$, ή $\lim_{x\to 0}\left|\frac{|x|}{x}\right| = |1|$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.
Ισχύει όμως ότι, $\lim_{t\to\xi}|f(t)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\xi} f(t) = 0$ ($-|f(t)| \le f(t) \le |f(t)|$ κλπ) .

6. Ως γνωστό, αν $x\in R$ σε ακτίνια τότε $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$.
Αν όμως $\theta\in R$ σε μοίρες τότε $\lim_{\theta\to 0}\frac{\eta\mu\theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$ (χρήση του $\frac{\theta}{180} = \frac{x}{\pi}$)

7. Στο όριο σύνθεσης συναρτήσεων fog στο x_0 (σελ.173) .
Η συνθήκη $g(x) \ne u_o$ κοντά στο x_0, δεν μπορεί να αγνοηθεί (Βλ. σχετικά το αντιπαράδειγμα στη σελίδα 128 των οδηγιών του Π. Ι. 2007-2008). Αν έχουμε «καλούς» μαθητές ή μαθητές με μαθηματικές ανησυχίες, ας αναφερθεί αυτό: κάπου οι μαθητές πρέπει να δουν και κάτι βαθύτερο στα Μαθηματικά και να μην νομίζουν ότι είναι πάντα ξερά θεωρήματα χωρίς απόδειξη, αχρεωστήτως δοσμένα, και ασκήσεις για τις εξετάσεις…

8. Τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$, *δεν υπάρχουν* (μια πρώτη-και αρκετή για τα σχ. πλαίσια- δικαιολόγηση μπορεί να γίνει μέσω της γνωστής γραφικής παράστασης των συναρτήσεων).
Η πληροφόρηση αυτή θα αποτρέψει πολλούς μαθητές να «δίνουν διάφορες τιμές» στα όρια αυτά, ιδίως σε… αγχώδεις καταστάσεις.

Απόδειξη*: Έστω ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu x = \rho \in R\cup\{+\infty, -\infty\}$. Επειδή $-1\le \eta\mu x\le 1$ δεν μπορεί το ρ να είναι $+\infty$ ή $-\infty$, άρα $\rho\in R$. Έχουμε τότε και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\alpha) = \lim\limits_{u\to+\infty} \eta\mu u = \rho$ για κάθε $\alpha\in R$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu(x+\alpha) = \rho$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty} (\eta\mu x \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu x \eta\mu\alpha) = \rho$ για κάθε $\alpha\in R$

Για $\alpha = -\pi$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu x = -\rho$, οπότε $\rho = 0$.

Για $\alpha = \pi/2$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x = \rho = 0$ και από την γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα των ημx, συνx καταλήγουμε σε άτοπο. Το $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχει λόγω

$\sigma\upsilon\nu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \eta\mu x$. Όμοια εργαζόμαστε και στο $-\infty$.

9. Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο $\xi\in R\cup\{+\infty, -\infty\}$, και

- ❖ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
- ❖ $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.

Η δικαιολόγηση μπορεί να γίνει διαισθητικά αλλά και με το κριτήριο παρεμβολής.

10. *Απροσδιόριστη μορφή*: λέμε την περίπτωση του ορίου, το οποίο *έχει έννοια* και για τον υπολογισμό του δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάποιος γνωστός κανόνας των ορίων. Μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει το όριο αυτό.
Για παράδειγμα τα όρια

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}\ ,\ \lim_{u\to0} \frac{u}{|u|}$$

είναι απροσδιόριστες μορφές και ενώ το πρώτο υπάρχει (και είναι ίσο με 2) , το δεύτερο δεν υπάρχει.

11. Έχοντας υπόψη τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων, συντομογραφικά μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς που βοηθούν στον λογισμό των ορίων (αλλά να μην τις αναφέρουμε ως πράξεις στο $R\cup\{+\infty, -\infty\}$) :

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty,\ \frac{1}{0^+} = +\infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty\ ,\ \frac{1}{+\infty} = 0,\ \frac{1}{-\infty} = 0 \text{ κλπ.}$$

12. Για την σωστή κωδικοποίηση και ανάκληση από την μνήμη των ορίων και γενικά των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης α^x, με $\alpha > 1$ και $0 < \alpha < 1$, καθώς και της λογαριθμικής συνάρτησης lnx, να γίνει σύσταση στους μαθητές να *απομνημονεύσουν κυριολεκτικά τις γραφικές τους παραστάσεις* μέσω των οποίων θα ανακαλούν στη μνήμη τις πολλές χρήσιμες ιδιότητές τους και όχι να τις απομνημονεύσουν!.

13. **Επιμερισμός Ορίου:** συχνό λάθος, που πρέπει να επισημανθεί:
χρησιμοποιείται ουσιαστικά η «φαινομενική ιδιότητα»:

Αν $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \alpha \in R$, τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to\xi} \alpha g(x)$ η οποία δεν ισχύει (πάντα), π.χ.

$$1 = \lim_{x\to 0} x\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0} 0\frac{x+1}{x} = 0,\ \text{άτοπο.}$$

Προσοχή : αν $\alpha \neq 0$ και υπάρχει το όριο της $g(x)$ στο ξ, τότε ισχύει. (άσκηση)

14. Ιστορικά στοιχεία.
Σχετικά με το συμβολισμό του απείρου, αναφέρουμε ότι το σύμβολο ∞ χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον John Wallis το 1655. Το υιοθέτησε από το αντίστοιχο λατινικό σύμβολο ∞ το οποίο παρίστανε το 1.000. O Wallis χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον συμβολισμό του απείρου στο βιβλίο του «Arithmetica infitorum»

15. Χρήσιμες υποδείξεις για τις ασκήσεις:

Α. Αν $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{x-\xi} = \alpha \in R$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 0$.

Πολύ χρήσιμη σε ασκήσεις και εύκολα αποδείξιμη: $f(x) = \frac{f(x)}{x-\xi}(x-\xi)$ κλπ.

Ακόμη μπορούμε να θέσουμε $g(x) = \frac{f(x)}{x-\xi}$ κλπ, που είναι μια γενική μέθοδος «ξεφωλιάσματος» μιας συνάρτησης f(x).

Β. Το κριτήριο παρεμβολής χρησιμοποιείται συνήθως σε θεωρητικά θέματα (συναρτησιακές σχέσεις κλπ) και σε απροσδιόριστες μορφές ή «δύσκολα» και «περίεργα» όρια, ιδίως όταν περιέχουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο και συνημίτονο.

Γ. Σε ασκήσεις που εμφανίζονται όρια εκθετικής, χρήσιμο είναι να ανάγονται στη περίπτωση του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ με $0 < \alpha < 1$.

Γ. Σ Υ Ν Ε Χ Ε Ι Α ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ενότητα 1. 8)

1. *Μονοτονία και Συνέχεια.*
Αν φ γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ) και συνεχής στο β, τότε η φ είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους $(α, β] \cup (β, γ) = (α, γ)$ (όπως είδαμε στη σελ.3, ΙΙ.7, αν δεν είναι συνεχής στο β δεν ισχύει).

Απόδειξη*
Έστω φ γν. φθίνουσα στα διαστήματα (α, β], (β, γ). Για να δειχθεί ότι είναι γν. φθίνουσα στο (α, γ), αρκεί να δειχθεί ότι, αν $β < λ < γ$ τότε $φ(β) > φ(λ)$ (για τις άλλες περιπτώσεις είναι προφανής ότι ικανοποιείται ο ορισμός). Έστω ένας σταθερός αριθμός ρ με $β < ρ < λ$.
Για κάθε κ με $β < κ < ρ < λ$ έχομε $φ(κ) > φ(ρ) > φ(λ)$ και λόγω συνέχειας στο β, $\lim_{κ \to β^+} φ(κ) \geq φ(ρ)$ ή $φ(β) \geq φ(ρ) > φ(λ)$. Άρα $φ(β) > φ(λ)$ (Μάλιστα αρκεί μόνο η από δεξιά συνέχεια στο β).

2*. *Μονοτονία και 1-1.* Αν φ 1-1 και συνεχής σε διάστημα, τότε η φ (αποδεικνύεται ότι) είναι γνησίως μονότονη (χρήσιμο στην αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα).

3. *Ιστορικά στοιχεία στο θεώρημα Bolzano.*
Ο Bernard Bolzano (1781 – 1848) ήταν Τσέχος μαθηματικός ιερωμένος και φιλόσοφος, από τους πιο βαθυστόχαστους μαθηματικούς της εποχής του. Το θεώρημα που φέρνει το όνομά του απαντά σε κάποιο βαθμό στο ερώτημα, τι κάνουμε στις περιπτώσεις που είναι αδύνατον να προσδιορίσουμε τις ρίζες μιας εξίσωσης; Αυτό το ερώτημα έγινε επιτακτικό από το 1824, όταν ο Νορβηγός μαθηματικός *Niels Abel* (1802-1829) απέδειξε ότι, δεν είναι δυνατόν να βρεθούν τύποι (που περιέχουν τις 4 πράξεις του R και ν-οστές ρίζες) που να δίνουν τις ρίζες μιας πλήρους πολυωνυμικής εξίσωσης 5ου ή μεγαλύτερου βαθμού.

Έτσι το πρόβλημα εστιάστηκε πια στην αναζήτηση πληροφοριών, που θα φωτίζουν όσο γίνεται περισσότερο το θέμα των ριζών, οπότε τέθηκαν τα ερωτήματα:

- *Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση;*
- *Που περίπου βρίσκονται αυτές οι ρίζες πάνω στον x- άξονα των πραγματικών αριθμών;*
- *Πόσες είναι θετικές και πόσες αρνητικές;*

Σε ερωτήματα τέτοιου τύπου δίνονται απαντήσεις από ορισμένα θεωρήματα της βασικής Μαθηματικής Ανάλυσης, που έχει επικρατήσει να τ' αποκαλούμε «υπαρξιακά θεωρήματα». Μεταξύ αυτών, το πρώτο μάλιστα, είναι και το γνωστό ως θεώρημα του Bolzano. Στην πορεία, και με αφετηρία τον προσεγγιστικό υπολογισμό των ριζών πολύπλοκων εξισώσεων (μέθοδος διχοτόμησης κλπ), δημιουργείται ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών, η Αριθμητική Ανάλυση.

4. Ας έχουμε υπόψη ότι η (αυστηρή) απόδειξη του Θ. Bolzano (όπως και του Rolle) στηρίζεται στο 2ο αξίωμα της γραμμικής διάταξης των πραγματικών αριθμών (supremum) και ξεφεύγει από τους σκοπούς του βιβλίου. Εδώ θα γίνει μόνο μια εποπτικογεωμετρική δικαιολόγηση (που δεν αποτελεί απόδειξη για την Ανάλυση).

- *Το αντίστροφο του Θ. Bolzano δεν ισχύει:* είναι δυνατόν να υπάρχει ρίζα μιας συνεχούς συνάρτησης στο διάστημα (α, β), αλλά να μην ισχύει f(α)f(β) < 0, π.χ. η συνάρτηση $f(\lambda) = \lambda^2 - 1, \lambda\in[-2, 2]$.

Επισήμανση: η συνθήκη f(α)f(β) < 0 είναι απλά *ικανή* (και *όχι αναγκαία*) για να υπάρχει ρίζα.

- Το σημαντικό σχόλιο-πόρισμα «διατήρησης προσήμου», αμέσως μετά το θ. Bolzano: αυτό ισχύει *μόνο για συνεχή σε διάστημα* και όχι σε ένωση διαστημάτων (όπως βέβαια και το θ. Bolzano) και με περασμένο πλήθος ριζών στο εσωτερικό του (αντιπαράδειγμα εύκολο) .

Γενίκευση Θ. Bolzano.
Έστω *f* συνεχής στο διάστημα (α, β) της οποίας υπάρχουν, στο $R\cup\{-\infty. +\infty\}$, τα όρια στο α και β και είναι ετερόσημα (ακόμη και άπειρα).
Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ με f (ξ) = 0.
(Υπ. Απόδειξη με χρήση του θεωρήματος διάταξης στα όρια και Θ. Bolzano)

5. Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ.) προκύπτει, ως μερική περίπτωση-πόρισμα, το Θ. Bolzano (Να δοθεί ως άσκηση).

6. Το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ. μπορεί να ισχύει και για μη συνεχή συνάρτηση.

Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημα του Darboux (Γάλλος, 1842-1917) η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ δυο τιμών της, δηλαδή ισχύει γι' αυτήν το Θ.Ε.Τ., ενώ βέβαια δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση. Άρα το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ, είναι (μόνο) αναγκαία συνέπεια της συνέχειας. Έτσι, αν δεν ισχύει το Θ. Ε. Τ η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Ένα απλούστερο παράδειγμα που μπορούμε να φτιάξουμε είναι το εξής: Έστω φ συνεχής στο [α, β]. Ορίζουμε την συνάρτηση (επέκταση της φ) Σ(χ) με Σ(χ) = φ(χ), για $\chi\in[\alpha, \beta]$ και Σ(x) = φ(κ) για $x\in(\beta, \gamma]$, όπου $\kappa\in(\alpha, \beta)$ σταθερός με $\varphi(\kappa) \neq \varphi(\beta)$. Τότε η Σ δεν είναι συνεχής στο [α, γ] αλλά επειδή έχει το ίδιο σύνολο τιμών με την φ, ισχύει το Θ.Ε.Τ. για την Σ ακριβώς λόγω της συνέχειας της φ στο [α, β].

7. Καταφυγή στα όρια: στην περίπτωση που θέλουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano, αλλά αγνοούμε το διάστημα [α, β], καθώς και τα πρόσημα των τιμών f(α), f(β): υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης στο +∞ και -∞.

π.χ. αν $f(t) = \alpha t^{2007} + \beta t^{2000} + 3t + \gamma$ με α > 0, τότε $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, οπότε υπάρχει λ > 0 με f(λ) > 0. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(t) = -\infty$, οπότε υπάρχει κ < 0 με f(κ) < 0.
Άρα στο διάστημα [κ, λ] ισχύει f(κ)f(λ) < 0 κλπ

8. Μετά το θεώρημα για την εικόνα διαστήματος (οποιασδήποτε μορφής) μέσω συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης (τέλος σελ.194) να αναφερθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις μέσω των γρ. παραστάσεων της σελ.195, από τις οποίες μόνο η τελευταία διασφαλίζεται με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής (Θ. Μ. Ε. Τ.) και το Θ.Ε.Τ.

9. Από το Θ.Μ.Ε.Τ προκύπτει ότι η συνέχεια σε κλειστό διάστημα έχει ως αναγκαία (μόνο) συνέπεια την ύπαρξη μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Αυτό γιατί μέγιστη και

ελάχιστη τιμή μπορεί να υπάρχει και όταν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα ή όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ανοικτό. Για παράδειγμα η συνάρτηση
$\varphi(x) = x + 1$ για $0 < x \leq 1$ και $\varphi(x) = x^2$ για $-1 \leq x \leq 0$ δεν είναι συνεχής στο κλειστό $[-1, 1]$ αλλά έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη τιμή 0. Επίσης η συνάρτηση $\Sigma(x) =$ ημx είναι συνεχής στο ανοικτό $(0, 2\pi)$ αλλά έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή .

10. Ως συνέπεια του Θ.Μ.Ε.Τ. σε συνδυασμό και με το σχόλιο, έχομε τις ειδικές περιπτώσεις:
Αν f γν. αύξουσα στο διάστημα [α, β] τότε $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$, ενώ αν f γν. φθίνουσα τότε $f([\alpha, \beta]) = [f(\beta)], f(\alpha)]$ (να γίνουν και οι σχετικές γρ. παραστάσεις). Στις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν άμεσα και τα (ολικά) ακρότατα της συνάρτησης.

11. Στο σχετικό θεώρημα *συνέχειας και μονοτονίας* του βιβλίου (σελ.196) για την αναλυτική (δηλ. με μεθόδους της Ανάλυσης) εύρεση του συνόλου τιμών συνάρτησης, ας έχουμε υπόψη ότι αν f συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα (α, β), με $\alpha, \beta \in R\cup\{-\infty. +\infty\}$, *τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν* τα όρια (στο $R\cup\{-\infty, +\infty\}$) $A= \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $B= \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ κλπ. Στο θεώρημα αυτό άξιο σημείωσης είναι ότι η εικόνα ανοικτού διαστήματος μέσω συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι (πάντα) ανοικτό διάστημα, κάτι που δεν ισχύει όταν η συνάρτηση δεν είναι γν. μονότονη.

12. Ως συνέπεια του θεωρήματος συνέχειας και μονοτονίας έχομε τις περιπτώσεις:
Αν f γν. αύξουσα στο διάστημα [α, β) τότε $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), B)$, ενώ αν f γν. φθίνουσα τότε $f([\alpha, \beta)) = (B, f(\alpha)]$ και ανάλογα για το (α, β].

13. Για την εύρεση του συνόλου τιμών συνάρτησης φ ορισμένης σε ένωση διαστημάτων $(\alpha, \beta)\cup(\gamma, \delta)$, ισχύει

$$\varphi((\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta)) = \varphi((\alpha, \beta)) \cup \varphi((\gamma, \delta)).$$

που μπορεί να εφαρμόζεται χωρίς απόδειξη (ως προφανής)

14. Οι ερωτήσεις κατανόησης (σελ.201-203) είναι πολύ ενδιαφέρουσες και πρέπει να δοθούν όλες, σταδιακά ή με την επανάληψη του κεφαλαίου.

15. Προβλήματα εύρεσης συνεχών συναρτήσεων

Στα προβλήματα αυτά χρησιμοποιούμε συνήθως το γνωστό πόρισμα του Θ. Bolzano: αν μια συνεχής συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα, τότε διατηρεί πρόσημο σ' αυτό (αυτό το πόρισμα είναι χρήσιμο παρακάτω και για την εύρεση του προσήμου της παραγώγου συνάρτησης). Επίσης μερικές φορές μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το Θ.Ε.Τ. Δίνουμε δυο παραδείγματα.

Α. Βιβλίου 7(ii) σελ.200 : Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις με την ιδιότητα
$f^2(x) = x^2$ για κάθε $x\in R$.
(το πρόβλημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί βοηθητικά και σε πιο σύνθετα προβλήματα)

Λύση
Είναι $f(x) = \pm x$, $x\in R$ (απλή αλγεβρική έκφραση της f).

- Έστω $x > 0$. Επειδή $f(x) \neq 0$ για $x \in (0, +\infty)$ θα έχουμε (Πόρισμα Θ. Bolzano) $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$ είτε $f(x) = - x$ για κάθε $x > 0$.
- Έστω $x < 0$. Επειδή $f(x) \neq 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ (Πόρισμα Θ. Bolzano) θα έχουμε $f(x) = x$ για κάθε $x < 0$ είτε $f(x) = - x$ για κάθε $x < 0$.
- Για $x = 0$ έχουμε $f(x) = 0$.

Τελικά έχουμε 4 συνεχείς συναρτήσεις:

• $f(x) = x, x \in R$ • $f(x) = -x, x \in R$ • $f(x) = |x|, x \in R$ • $f(x) = -|x|, x \in R$

B. Να βρεθούν οι συναρτήσεις φ που είναι συνεχείς στο R και έχουν την ιδιότητα $\varphi^2(x) = e^x\varphi(x)$ για κάθε $x \in R$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$, ισοδύναμα έχομε, $\varphi(x)(\varphi(x) - e^x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$ ή $\varphi(x) = e^x$ (1)

- Αν $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η φ είναι συνεχής και είναι μια από τις ζητούμενες.
- Έστω ότι υπάρχει $\xi \in R$ με $\varphi(\xi) \neq 0$, οπότε από (1) προκύπτει $\varphi(\xi) = e^\xi$. Θα δείξουμε ότι $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in R$. Έστω ότι υπάρχει $\kappa \neq \xi$ με $\varphi(\kappa) \neq e^\kappa$, οπότε $\varphi(\kappa) = 0$. Χωρίς βλάβη έστω $\kappa < \xi$.
  Είναι $\varphi(\kappa) = 0 < e^\kappa < e^\xi = \varphi(\xi)$, οπότε από Θ.Ε.Τ για τον αριθμό $\eta = e^\kappa$ υπάρχει $\lambda \in (\kappa, \xi)$ με $e^\kappa = \varphi(\lambda)$. Αλλά τότε από (1) πρέπει $\varphi(\lambda) = e^\lambda$, οπότε $\kappa = \lambda$ άτοπο. Όμοια αν $\kappa > \xi$. Άρα $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in R$.

Επομένως υπάρχουν δυο ακριβώς συνεχείς συναρτήσεις, η $\varphi = 0$ και $\varphi(x) = e^x$, $x \in R$. (Άλλος τρόπος : η δοθείσα γράφεται $(\varphi(x) - e^x/2)^2 = (e^x/2)^2$, $\lambda(x)=(\varphi(x) - e^x/2) \neq 0$,κλπ)

Γενίκευση: η παραπάνω περίπτωση εύρεσης συνάρτησης γενικεύεται ως εξής: Έστω φ, θ συνεχείς συναρτήσεις στο R (ή σ' ένα διάστημα Δ) ώστε $\varphi(x)(\varphi(x) - \theta(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.Αν $\theta(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε ισχύει $\varphi = 0$ ή $\varphi = \theta$.
(Υπόδειξη : $\varphi(x)(\varphi(x) - \theta(x) = 0 \Leftrightarrow (\varphi(x)- \theta(x)/2)^2= (\theta(x)/2)^2$, οπότε η $\varphi(x)- \theta(x)/2$ διατηρεί πρόσημο, όπως και η θ κλπ)

Χρήσιμες Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

1. Αν στα άκρα ενός διαστήματος διαπιστώσουμε ομόσημες τιμές, τότε θεωρούμε και το μέσο του διαστήματος αυτού και αν πάλι συμβεί το ίδιο χωρίζουμε το διάστημα σε 3 ίσα διαστήματα κλπ.
2. Συχνά μπορεί να συμβεί ένα άθροισμα μερικών τιμών μιας συνάρτησης να είναι ίσο με μηδέν, οπότε υπάρχουν δυο ετερόσημες τιμές κλπ (βλ. άσκηση 28).
3. Καταφυγή στα όρια (βλ. παραπάνω σημείωση Β.7).
4. Η μοναδικότητα της ρίζας μιας συνάρτησης εξασφαλίζεται συνήθως με την μονοτονία ή το 1-1 της συνάρτησης.

Αναφέρουμε στην συνέχεια μερικές ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου καθώς και ασκήσεις και θέματα για την επανάληψη του 1ου κεφαλαίου της Ανάλυσης και των μιγαδικών. Δεν σημαίνει ότι πρέπει να γίνουν όλες. Ο διδάσκων θα κρίνει ποιες θα προτείνει στους μαθητές του ή θα διδάξει ανάλογα με τον διαθέσιμο χρόνο, το επίπεδο των μαθητών του και τους στόχους που έχει βάλει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ : ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Α. Αν $\lim\limits_{t\to 0} t^2 f(t) = 2005$, τότε $\lim\limits_{t\to 0} f(2t) =$

Α. 0 Β. 2005 Γ. $+\infty$ Δ. $-\infty$ Ε. δεν υπάρχει

Β. Αν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f^2(x)} = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e}{3}\right)^{\ln|f(x)|} =$

Α. 0 Β. $+\infty$ Γ. $-\infty$ Δ. Άλλο

Γ. Αν $\lim\limits_{t\to \xi} f(t) < \lim\limits_{t\to \xi} g(t)$ τότε f(x) < g(x) «κοντά στο x» : Σ - Λ .

2. Αν f συνεχής στο διάστημα [α, β] και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της αντίστοιχα, τότε

i) Η σχέση [μ, Μ] $\subseteq$ f(([α, β] προκύπτει από το θεώρημα

Α.Ενδ. τιμών Β. Bolzano Γ.Μέγ. και Ελαχ. τιμής Δ. Δεν ισχύει

ii) Η σχέση f(([α, β]) $\subseteq$ [μ, Μ] προκύπτει από το θεώρημα

Α.Ενδ. τιμών Β.Bolzano Γ.Μέγ. και Ελαχ. τιμής Δ. Άλλο

3. Η συνάρτηση $Σ(λ) =5λ^{2008} -6λ^{1453} + 1$, $0 \le λ \le 1$, δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1/2008

Α. Σωστό Β. Λάθος Γ. Εξαρτάται από το λ

4. Αν f συνεχής στο (α, β) και Α < Β όπου Α= $\lim\limits_{x\to α^+} f(x)$, Β= $\lim\limits_{x\to β^-} f(x)$ τότε η f είναι

Α. γν. αύξουσα Β. Γν. φθίνουσα Γ. όχι μονότονη Δ. Άγνωστο

5. Αν φ συνεχής στο (α, β) και έχει σύνολο τιμών το [γ, δ], τότε η φ είναι:

Α. Συνεχής Β. Ασυνεχής Γ. Γν. Μονότονη Δ. ‘Όχι γν. μονότονη

6. Αν φ ορισμένη στο (α, β) και έχει σύνολο τιμών το (γ, δ) $\cup$(κ, λ) τότε η φ είναι

Α. Συνεχής Β. Ασυνεχής Γ. Γν. Μονότονη Δ. ‘Όχι μονότονη

7. Αν Σ(x) ορισμένη στο [0, 1] και ισχύει $Σ(0) \le Σ(x) \le Σ(1)$ για κάθε $x\in[0, 1]$ τότε

Α. Σ([0, 1]) $\subseteq$ [Σ(0), Σ(1)] Β. Σ([0, 1]) = [Σ(0), Σ(1)] Γ.[Σ(0), Σ(1)] $\subseteq$ Σ([0, 1])

8. Αν $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^5 + αx^2 - βx + γ}{2x^n - γx + 2007} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7\cdot e^x - 3\cdot 2^x}{2\cdot 5^x + 1}$, $n \in$N, τότε

Α. n < 5 Β. n > 5 Γ. n = 5 Δ. n = 3

9. Να βρεθεί ο αριθμός με τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράσταση $Α=\dfrac{εφ(t-2)}{\sqrt{t+2}-2}$ για t = 2,00001010. (Απ.4)

10. Έστω η συνάρτηση $H(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$.
α) Να δειχθεί ότι είναι 1-1, β) Να βρεθεί τη αντίστροφή της,
γ) Να βρεθεί το όριο της H(x) και της αντίστροφή της στο $+\infty$.

11. Έστω η συνάρτηση $\varphi(y)=\sqrt{y^2-8y+12}$, $y \geq 6$.
α) να βρεθούν το σύνολο τιμών και τα ακρότατά της (αν υπάρχουν)
β) να δειχθεί ότι είναι 1-1 και να λυθεί η εξίσωση $\varphi^{-1}(x) = x$,
γ) να βρεθούν τα όρια της συνάρτησης $f(y) = \varphi(y)/\varphi^{-1}(y)$ στο 0 και στο $+\infty$.
(Απ.(γ) δ.ο., 1)

12. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(t) = 2\sqrt{t}\left(\sqrt{t+5}-\sqrt{t}\right)$.
α) Να την μετασχηματίσετε στην μορφή $\dfrac{10}{1+\sqrt{\alpha}}$,
β) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την αντίστροφή της,
γ) Να βρείτε το όριό της στο $+\infty$.

13. Αν $z \in C$ και η συνάρτηση t με $t(x) = \dfrac{\eta\mu\,|zx|}{x}$ για $x > 0$ και
$t(x) = \left|(\bar{z}-2i)(x^3-|z|\cdot x^2+1)\right|$ για $x \leq 0$, είναι συνεχής, να δειχθεί ότι ο z ανήκει σε ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.

14. Α. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-\alpha x-3}{x-3} = 2$. (Απ. Δεν υπάρχει)

Β. Ποια τιμή πρέπει να έχει η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x-6}{2-\sqrt{2x}}$ στο 2 ώστε να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$; (Απ. -6)

15. Α. Αν $\lim\limits_{x\to 1}(f^3(x)+2f^2(x)+f(x)+2) = 0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. (Απ.-2)

Β.Να βρεθεί μια συνάρτηση f συνεχής στο R τέτοια ώστε
$t^3 + 2 + tf(t) = 2f(t) + 5t$ για κάθε $t \in R$.

16. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = x - e^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα,
β) να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $xe^x = 1+\lambda e^x$ έχει λύση,
γ) να βρεθούν τα σημεία τομής της γ. π. της συνάρτησης $\varphi^{-1}(x)$ με τον x- άξονα.

17. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z(x) = 1+ (1 - x)i$, $x \geq 1$ και την συνάρτηση
$\Sigma(x) = |z(x)|^2$, $x \geq 1$.
α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της Σ(x).
β) Να δειχθεί ότι η Σ είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της .
γ) Από τους μιγαδικούς z(x), $x \geq 1$, να βρεθεί αυτός που απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων.
δ) Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι έχουν εικόνες τα κοινά σημεία των Σ , Σ^{-1}.

18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha e^x + \beta x^{1897} + 1 = 0$, όπου α, β θετικοί αριθμοί έχει μοναδική λύση.

19. Ένας τουρίστας θέλει να περάσει το φαράγγι της Σαμαριάς (ένα από τα θαύματα της φύσης, μην τυχόν και δεν πάτε!...). Ξεκινά μια μέρα στις 8 το πρωί από τον Ομαλό και φτάνει στις 5 το απόγευμα. (της ίδιας μέρας) στην Αγία Ρουμέλη.
Την επαύριον επιστρέφει, ξεκινώντας στις 8 το πρωί από την Αγία Ρουμέλη και φτάνοντας στις 5 το απόγευμα στον Ομαλό. Να δείξετε ότι, υπάρχει κάποιο σημείο της διαδρομής αυτής από το οποίο πέρασε την ίδια χρονική στιγμή και στις δυο πορείες του.

20. Να αποδείξετε ότι: Α. Η εξίσωση $x^3 = 2008$ έχει μοναδική θετική λύση,
Β*. Η εξίσωση $x^\nu = \theta$, $\theta > 0$, $\nu \in N^*$, έχει μοναδική θετική λύση (θεώρημα ύπαρξης ν-οστής ρίζας θετικού αριθμού).

21. Να βρεθούν (όλες) οι συνεχείς συναρτήσεις $y = f(x)$ που ικανοποιούν την σχέση
$4x^2 - y^2 = 4$ για κάθε x σε κατάλληλα επιλεγμένο διάστημα.
Τι παριστάνουν γραφικά οι συναρτήσεις αυτές;

22. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t) = 8\ln(t + 1) - 2t + c$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$, $c \in R$ σταθερά.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).
β) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$).
(Πανελλήνιες εξ. 2000)

23*.α) Να αποδειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα. β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(t) = t^{2007} - 1707t + 1913$ έχει σύνολο τιμών το R

24.Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση g με

$$g(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{x^{2\nu+1} + x^2}{x^{2\nu} + 1},\ x \geq 0.$$

25.α) Να δείξετε ότι η παράσταση $\Pi = \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2}$, α, $\beta \in R^*$ έχει μέγιστη τιμή 2. Πότε συμβαίνει αυτό;
β) Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R με $\lim\limits_{x\to\xi}((f(x)+g(x)) = +\infty$, $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$. Να αποδείξετε ότι α) $\lim\limits_{x\to\xi}((f^2(x)+g^2(x)) = +\infty$, β) $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)+g(x)}{f^2(x)+g^2(x)} = 0$.

26. Έστω Σ(x) συνάρτηση συνεχής στο R με την ιδιότητα

$$\Sigma(0) + \Sigma(1) + \Sigma(2) + \Sigma(3) = 2010.$$

α) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν όλοι οι αριθμοί Σ(0), Σ(1), Σ(2), Σ(3) να είναι μικρότεροι του 502,5 .
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 502,5 είναι τιμή της συνάρτησης Σ.
γ) Να φτιάξετε μια παρόμοια δική σας άσκηση!.

27. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και κ, $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $(7f(\kappa) + 3f(\lambda))/10$ είναι τιμή της συνάρτησης f. Με ποια επιπλέον (ελάχιστη) υπόθεση η f θα παίρνει την τιμή αυτή μόνο μια φορά;

28*. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη στο R. Αν ισχύει $|\varphi(\alpha + 1)| \le \alpha^2$ για κάθε $\alpha \in R$, να βρείτε την τιμή φ(1) και να δείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο 1.

Να βρείτε ακόμη το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\varphi(x)}{x-1}$.

29*. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [0, 1] με Σ(0) = Σ(1).
Να αποδειχθεί ότι

α) η εξίσωση $\Sigma(x) = \Sigma(x + \frac{1}{3})$ έχει λύση στο διάστημα $[0, \frac{2}{3}]$,

β) η εξίσωση $\Sigma(x) = \Sigma(x + \frac{1}{4})$ έχει λύση στο διάστημα $[0, \frac{3}{4}]$.

30*. Να βρεθούν οι συνεχείς στο R συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(t) = 2tf(t)$ για κάθε $t \in R$. (Υπόδειξη:σελ.13, 15.Α/ Απ. 0, 2t, t+|t|, t-|t|)

31. Έστω α >1 και φ συνεχής R στο ώστε $\varphi(\chi) \neq \alpha\chi$ για κάθε $\chi \in R$ και $\varphi(1) = \alpha^2$.
α) Να δειχθεί ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης φ(χ)/χ , χ > 0, είναι υποσύνολο του (α, ∞), β) Να βρεθεί το όριο της φ στο +∞.

32*.α) Αν φ συνεχής συνάρτηση στο ξ και φ(ξ)≠0 να δειχθεί ότι φ(x)≠0 κοντά στο ξ.
β) Έστω h συνεχής συνάρτηση στο R τέτοια ώστε h(x)συνx = 0 για κάθε $x \in R$. Να δειχθεί ότι η h είναι η μηδενική συνάρτηση.

33*. Έστω Σ(x) συνάρτηση συνεχής στο R με την ιδιότητα Σ(x)Σ(-x) < 0 για κάθε x ≠ 0. Τότε Σ(0) = 0. (Υπόδειξη: άτοπος απαγωγή)

34*.Έστω φ συνεχής στο R ώστε $(\varphi(\chi) - e^{\chi})(\varphi(\chi) - 1 - e^{\chi}) = 0$ για κάθε $\chi \in R$.
Να αποδειχθεί ότι $\varphi(\chi) = e^{\chi}$ για κάθε $\chi \in R$ ή $\varphi(\chi) = 1 + e^{\chi}$ για κάθε $\chi \in R$.
(Υπ. σελ. 14, γενίκευση)

35*. Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] και 1-1 με φ(α) < φ(β). Να αποδειχθεί ότι για κάθε α < x < β ισχύει φ(α) < φ(x) < φ(β). Ποιο είναι το σύνολο τιμών της φ; (Υπόδειξη: άτοπος απαγωγή, Θ.Ε.Τ.)

36*. Έστω T συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] με T(α) = T(β). Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο αριθμοί κ, $\lambda \in$ [α, β] σε απόσταση ίση με (β - α)/2 τέτοιοι ώστε T(κ) = T(λ). (Υπ. θεωρούμε το μέσο του [α, β] και μια «καλή» συνάρτηση)

37*.Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο R ώστε $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{1913}} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{1913}} = 0$.
Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\varphi(x) + x^{1913} = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

38*.Έστω f συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο R και η ευθεία y = αx + β με α > 0. Να αποδείξετε ότι α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = -\infty$,

β) η C_f έχει μοναδικό σημείο τομής με την ευθεία αυτή. -

* * * *