ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ &
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ. Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Δημήτριος Ι. Μπουνάκης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ταχ. Δ/νση : Ρολέν 4
Ταχ. Κώδικας : 71 305 - ΗΡΑΚΛΕΙΟ
Πληροφορίες : Κ. Καραγιωργάκη, Κ. Βαρβεράκης
Τηλ. : 2810246860
e-mail : dimitrmp@sch.gr
Κινητό : 6976465429
Ιστοσελίδα : www.math-her.gr

Ηράκλειο, 3 Μαρτίου 2011

Αρ. πρ. 66

Προς : Τους κ. κ. Καθηγητές Μαθηματικών των Λυκείων των Νομών Χανίων, Ρεθύμνου και Ηρακλείου αρμοδιότητάς μου.

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής & Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Μ. Κ.: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ»

Συνάδελφοι,

Σας στέλνω το πέμπτο και τελευταίο αρχείο με το βελτιωμένο διδακτικό υλικό για τα Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, το οποίο αναφέρεται στο 3$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο (Ολοκληρωτικός λογισμός).
Ελπίζω και στις σημειώσεις αυτές να βρείτε ιδέες, προτάσεις, αφορμές, ασκήσεις και θέματα που θα εμπλουτίσουν το μαθηματικό και το διδακτικό σας έργο.
Υπενθυμίζω ότι οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται μόνο σε σας και προπάντων σε όσους διδάσκουν το μάθημα. Ευπρόσδεκτες είναι και δικές σας σχετικές παρατηρήσεις και σχόλια που θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν τις σημειώσεις αυτές.
Ένα αντίγραφο του αρχείου αυτού να μείνει όπως πάντα στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) του σχολείου. Με την ευκαιρία της ολοκλήρωσης των σημειώσεων αυτών, θέλω να ευχαριστήσω όσους ένιωσαν το χρέος να πουν ένα καλό ή κριτικό λόγο και βοήθησαν έτσι να ολοκληρωθεί το έργο αυτό.

Καλή δύναμη

Συμπληρώσεις, Παρατηρήσεις, Επισημάνσεις και Ασκήσεις στο 3^{o} κεφάλαιο της Ανάλυσης (§ 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.7)

Ι. ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (§ 3.1)

1. Κατ' αρχήν πρέπει να έχουμε υπόψη ότι φέτος **προστέθηκε** στην εξεταστέα ύλη η απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 261 (κριτήριο ακρότατων), ενώ **αφαιρέθηκαν** η εντός της ενότητας 3.1, παράγραφος Αόριστο ολοκλήρωμα, καθώς και η ενότητα 3.2 (Μέθοδοι αόριστης ολοκλήρωσης)

2. Για την διδασκαλία της παραγράφου 3.1 (και βέβαια όχι μόνο …) πρέπει να έχουμε υπόψη, ειδικά φέτος, τις σχετικές φετινές οδηγίες του Π. Ι. Σύμφωνα με αυτές, εξαιρείται η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος, αλλά όχι ακριβώς όλη η ύλη της σελίδας 305, η οποία υφίσταται τις εξής αλλαγές:
Α. Αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 305) θα πρέπει να δοθεί ο πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων που αναφέρονται στις οδηγίες.
Β. Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της σελίδας 305 να αναδιατυπωθούν ως εξής:
Αν οι συναρτήσεις F και G είναι αρχικές των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, σ' ένα διάστημα Δ και ο α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:
i) Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια αρχική της συνάρτησης $f + g$ στο Δ και
ii) Η συνάρτηση $αF$ είναι μια αρχική της συνάρτησης $αf$ στο Δ

Πόρισμα (αξιοσημείωτο): *Αν οι συναρτήσεις* f , g *έχουν αρχική στο Δ, τότε και οι συναρτήσεις* $f + g$, $αf$, $f - g$ *έχουν αρχική στο Δ.*

3. Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

4. Παρόλο που έχουμε «συνηθίσει» στον όρο αόριστο ολοκλήρωμα, προτείνω να μην τον αναφέρουμε καθόλου, αφού δεν είναι στην εξεταστέα ύλη και υπάρχει ο κίνδυνος να χρησιμοποιηθεί λανθασμένα ή να υπάρξει και σύγχυση από τους μαθητές. Επίσης για την αποφυγή σύγχυσης με την παράγωγο προτείνω να χρησιμοποιείται ο όρος *αρχική* παρά παράγουσα.

5. Στον ορισμό της αρχικής συνάρτησης πρέπει να επισημάνουμε ότι ορίζουμε αρχική μιας συνάρτησης f (μιας ορισμένης μεταβλητής) **σε ένα διάστημα Δ** (οποιασδήποτε μορφής) και όχι άλλης μορφής σύνολο (π.χ. ένωση διαστημάτων). Επίσης, επειδή ορισμένοι μαθητές από συνήθεια χρησιμοποιούν συχνά τον συμβολισμό $F(x)$ για μια συνάρτηση, αντί του «συνήθους» $f(x)$, ίσως μπερδευτούν στο σημείο αυτό, αφού το βιβλίο χρησιμοποιεί το συμβολισμό $F(x)$ για μια αρχική της $f(x)$. Απαιτείται ειδική επισήμανση ή και αποφυγή αυτού του συμβολισμού. Ένας πιο παραστατικός ίσως ορισμός της αρχικής είναι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε **αρχική** (ή παράγουσα συνάρτηση ή αντιπαράγωγο ή ... «μάννα») μιας συνάρτησης f (... «κόρης») ορισμένης σ' ένα **διάστημα** Δ, με ανεξάρτητη μεταβλητή x, κάθε συνάρτηση Σ(x), παραγωγίσιμη στο Δ, για την οποία ισχύει

$$\mathbf{\Sigma'(x) = f(x)\ \ για\ κάθε\ x\in\Delta}$$

6. Το θεώρημα της σελίδας 304 μπορεί να διατυπωθεί και διαφορετικά :
Έστω F(x) μια αρχική της συνάρτησης f (x) σ' ένα διάστημα Δ. Μια συνάρτηση G ορισμένη στο Δ, ίδιας μεταβλητής, είναι αρχική της f στο Δ , αν και μόνο αν υπάρχει $c\in R$ τέτοιος ώστε

$$G(x) = F(x) + c \ \text{ για κάθε } \ x\in\Delta.$$

Ας σημειωθεί ότι η σταθερά c εξαρτάται και από το διάστημα Δ.

7. Το θεώρημα της σελίδας 304 ισχύει μόνο για συνάρτηση f ορισμένη σε **διάστημα** Δ και όχι άλλης μορφής σύνολο (είναι κληρονομιά από την αντίστοιχη πρόταση –συνέπεια του Θ.Μ.Τ.- στις παραγώγους : $f' = g' \Leftrightarrow f = g + c$, που ισχύει σε διάστημα).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2},\ \ x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty) = A$

Έχει ως μια αρχική την συνάρτηση $F(x) = x + \dfrac{1}{x},\ x\in A$, αφού $F'(x) = f(x),\ \ x\in A$.

Όμως και η συνάρτηση $G(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} & ,x>0 \\ 2009 + x + \dfrac{1}{x} & ,x<0 \end{cases}$

όπως εύκολα προκύπτει είναι μια αρχική της f στο A, αλλά η διαφορά των αρχικών F, G :

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 0,\ x>0 \\ 2009,\ x<0 \end{cases}$$ δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

8. Παρακάτω θα δούμε (θεμελιώδες θεώρημα του Ο. Λ.) ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα έχει μια αρχική. Όμως και μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, μπορεί ίσως νά 'χει αρχική συνάρτηση (η οποία βέβαια είναι πάντοτε παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής). Άλλωστε η παράγωγος μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση.

Παράδειγμα **:** Η παράγωγος της συνάρτησης Σ(x) είναι η συνάρτηση f (x) :

$$\Sigma(x) = \begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x},x\neq 0 \\ 0\ ,x=0 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 2x\cdot ημ\dfrac{1}{x} - συν\dfrac{1}{x},x\neq 0 \\ 0\ \ ,\ x=0 \end{cases}$$

(όπως εύκολα επαληθεύουμε)

η οποία f δεν είναι συνεχής στο x=0 (το όριο του $συν\dfrac{1}{x}$ στο 0 δεν υπάρχει). Έτσι η Σ είναι μια αρχική συνάρτηση στο διάστημα $R = (-\infty,+\infty)$ της μη συνεχούς συνάρτησης f (ας παρατηρηθεί εδώ ότι η ασυνέχεια της $\Sigma' = f$ δεν είναι απλή: «αιρομένη» ή με «πήδημα» και αυτό δεν είναι τυχαίο…).

9. Α. Η ύπαρξη αρχικής για μια συνάρτηση φ, προσδίδει στην συνάρτηση φ ιδιότητες παραγώγου συνάρτησης, όπως είναι η ιδιότητα Darboux αλλά και μια άλλη ιδιότητα: αν δεν είναι συνεχής η φ, τότε οι ασυνέχειες της δεν είναι απλές (είναι μόνο δευτέρου είδους: ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει ή απειρίζεται). Αυτές οι ιδιότητες αποτελούν αναγκαίες –μόνο- συνθήκες για να έχει αρχική η φ. Επόμενο είναι λοιπόν αν μια συνάρτηση φ δεν έχει κάποια από τις ιδιότητες αυτές, να μην έχει αρχική. Έτσι υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική. Ειδικότερα: σύμφωνα με το Θεώρημα του Darboux (βλ. ασκ.44(γ) σελ. 20, Διαφορικός λογισμός Α΄) η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα, *παίρνει ως τιμή της, κάθε αριθμό μεταξύ δυο τιμών της* (ακόμη και αν δεν είναι συνεχής, δηλαδή ισχύει κάτι ανάλογο με το Θ. Ενδιαμέσων τιμών για την παράγωγο). Επομένως, αν μια συνάρτηση φ δεν έχει αυτή την ιδιότητα, δεν μπορεί να έχει αρχική, έστω F, αφού $F'= \varphi$. Έτσι π.χ. οι συναρτήσεις

$$\varphi(t) = \begin{cases} t+1, t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}, \quad x(\lambda) = \begin{cases} \lambda \ , \lambda \in R - N \\ \lambda + 1, \ \lambda \in N \end{cases}$$

με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δεν έχουν αρχική (η πρώτη και δεύτερη δεν έχουν τιμή το 1/2, ενώ η τρίτη το 0 (που βρίσκεται μεταξύ δυο τιμών τους). Μάλιστα υπάρχει και άλλος λόγος : δεν είναι συνεχείς και έχουν απλή ασυνέχεια (τα πλευρικά όρια στα σημεία ασυνέχειας είναι πραγματικοί αριθμοί που είτε είναι διάφοροι μεταξύ τους, είτε διαφέρουν από την τιμή της συνάρτησης).
Πάντως η απόδειξη ότι δεν έχουν αρχική, μπορεί να δοθεί και απ' ευθείας χωρίς τις ιδιότητες της παραγώγου που αναφέραμε παραπάνω. Ας δούμε π.χ. την f(x).

- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση (παραγωγίσιμη) Φ(x) ώστε $\Phi'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$.Τότε πρέπει $\Phi'(0) = f(0) = 1$ (επικεντρώσαμε την προσοχή μας στο 0, επειδή για $x < 0$ και $x > 0$ υπάρχει προφανώς αρχική).

Επειδή η Φ είναι παραγωγίσιμη (και συνεχής στο 0) έχουμε

$$\Phi'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\Phi'(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = 1, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα δεν έχει αρχική η f(x).

- Μια άλλη συνάρτηση που έχει αρχική ενώ δεν είναι συνεχής, είναι η

$f(x) = \text{ημ}\frac{1}{x}$ για $0 < x \leq 1$ (ή $x \neq 0$) και $f(0) = 1$ (αν $f(0) = 0$ τότε έχει αρχική!)
(Η απόδειξη στηρίζεται σε μια σχετική μεθοδολογία, βλ. τέλος, άσκηση 16, σελ.28)

Β. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν αρχική αλλά αυτή δεν μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Αυτό σημαίνει ότι με τα γνωστά στοιχειώδη μέσα, μεθόδους και συναρτήσεις δεν μπορούμε να βρούμε μια αρχική τους, όπως

π.χ. $\frac{e^x}{x}, \frac{\text{ημ}x}{x}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\text{συν}x}{x}, e^{x^2}$, χεφx, $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, x^x, \sqrt{1+x^3}, \sqrt{\text{ημ}x}$, ….

Στοιχειώδεις συναρτήσεις (μιας μεταβλητής) : είναι αυτές που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τις 4 πράξεις του R καθώς και δυνάμεις και ρίζες μεταξύ πολυωνυμικών, ρητών, τριγωνομετρικών και υπερβατικών (e^x, lnx κλπ) συναρτήσεων.

10. Συνέπεια του θεωρήματος της σελίδας 304 και της παραπάνω παρατήρησης 7, είναι ότι οι αρχικές συναρτήσεων αναφέρονται πάντοτε σε διαστήματα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης. Έτσι αν η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, τότε μια αρχική της f δεν πρέπει να την θεωρούμε ορισμένη στην ένωση αυτή, αλλά σε κάθε ένα διάστημα χωριστά. Για την συνάρτηση π.χ.

$f(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, το σωστό είναι να πούμε :

- Οι αρχικές της f στο διάστημα (-∞, 0) είναι οι συναρτήσεις

  $x+\frac{1}{x}+\kappa$, $x\in(-\infty, 0)$, $\kappa\in R$,

- Οι αρχικές της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι οι συναρτήσεις, $x+\frac{1}{x}+c$ (ή ακόμη και οι συναρτήσεις $x+\frac{1}{x}+2011+c$, γιατί;) $x\in(0,+\infty)$, $c\in R$.

11. Στο πίνακα των αρχικών σχ. βιβλίου (σελ. 305) πρέπει να επισημάνουμε αυτό που αναφέραμε και προηγουμένως και αναφέρεται και στις οδηγίες: ότι οι τύποι των αρχικών των συναρτήσεων ισχύουν σε κάποιο διάστημα στο οποίο έχουν έννοια οι συναρτήσεις, *με την συμπλήρωση ότι η σταθερά c εξαρτάται από το διάστημα αυτό.*

12. Αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων (σελ. 305), όπως αναφέραμε, να δοθεί ο πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων όπως αναφέρεται στις οδηγίες. Ο πίνακας αυτός κρίνω σκόπιμο, ιδιαίτερα φέτος, να συμπληρωθεί με τις παρακάτω αντίστοιχες περιπτώσεις σύνθετων συναρτήσεων:

Α/Α	**Συνάρτηση**	**Αρχικές**
1	$f'(x)\,(f(x))^{\alpha}$	$\frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, $\alpha\neq -1$, $c\in R$
2	$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}+c$, $c\in R$
3	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert+c$, $c\in R$
4	$\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{1}{f(x)}$, $c\in R$
5	$f'(x)$συν $f(x)$	ημ$f(x)+c$, $c\in R$
6	$f'(x)$ημ $f(x)$	-συν$f(x)+c$, $c\in R$
7	$\frac{f'(x)}{συν^2 f(x)}$	εφ$f(x)+c$, $c\in R$

(Οι παραπάνω συναρτήσεις και τύποι θεωρούμε ότι ορίζονται σε κατάλληλα **διαστήματα.** Με f(x) = x έχουμε τις απλές γνωστές περιπτώσεις αρχικών)

13. Φέτος επίσης αξίζει να προσεχτούν ασκήσεις που αφορούν αρχικές, όπως π.χ. τις ασκήσεις σελ. 23, 1(α, β, δ), 2, σελ.24, 3, σελ.26, 23, σελ.27, 6, σελ.28, 16, σελ.29, 20, 23 (βλ. τέλος σημειώσεων).
Οι εφαρμογές των σελίδων 306 και 307 να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων. Να λυθούν, σύμφωνα με τις οδηγίες του Π.Ι., μόνο οι ασκήσεις 2, 4, 5 και 7 της Α΄ Ομάδας. Ας δούμε π.χ. την λύση του προβλήματος 5.

Α΄ τρόπος

Ρυθμός μεταβολής, $N'(t) = \frac{1}{20}e^{t/20}$ εκ. ανά λεπτό. Ζητούμε τον N(60) - N(0).

Μια αρχική της συνάρτησης $\frac{1}{20}e^{t/20}$ είναι η $e^{t/20}$, αλλά και η N(t) λόγω υπόθεσης. Έτσι από το θεώρημα της σελίδας 304, έχουμε ότι, υπάρχει μια σταθερά $c \in R$ ώστε
$N(t) = e^{t/20} + c$ για κάθε $t \geq 0$.
Άρα $N(60) - N(0) = e^{60/20} + c - (1+c) = e^3$ ($\cong 20$) εκατομμύρια βακτηρίδια.

Β΄ τρόπος
Έχουμε $N'(t) = (e^{t/20})'$ για $t \in [0, +\infty)$, άρα από γνωστό θεώρημα υπάρχει $c \in R$ με
$N(t) = e^{t/20} + c$ για κάθε $t \geq 0$ κ.τ.λ.

14. Για την αποσαφήνιση σχετικών εννοιών, η άσκηση 7 (σελ.308) καλό είναι να συμπληρωθεί με το ερώτημα: Να βρείτε πόσα βαρέλια θα αντληθούν *τον 8^{o} μήνα*.

....

ΙΙ. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (§ 3.4)

1. Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Α. Ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος όπως δίνεται στο σχ. βιβλίο, είναι το κατά Riemann ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [α, β].
Έστω συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και μια διαμέριση του [α, β] σε ν = 2, 3,… ισομήκη διαστήματα

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{\nu-1} < x_\nu = \beta, \text{ με } \quad x_\kappa - x_{\kappa-1} = \frac{\beta-\alpha}{\nu}, \ \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$$

Υπάρχει και ο άλλος, ισοδύναμος, ορισμός μέσω του κατώτερου και ανώτερου αθροίσματος, όμως το ορισμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ευκολότερα ως ολοκλήρωμα Riemann.
Αυτό συμβαίνει γιατί ως ενδιάμεσα σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\kappa$ στην παραπάνω διαμέριση, μπορούμε να πάρουμε τα αριστερά ή τα δεξιά άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης:

$$[x_{\kappa-1}, x_\kappa] = [\alpha + (\kappa-1)\frac{\beta-\alpha}{\nu},\ \alpha + \kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}], \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu$$

ενώ με το ανώτερο ή κατώτερο άθροισμα χρειαζόμαστε τα σημεία των παραπάνω διαστημάτων που η f παίρνει την μέγιστη (αντίστοιχα ελάχιστη) τιμή της σε κάθε ένα από αυτά . (Πάντως αν η f είναι και μονότονη, τότε οι θέσεις μέγιστων ή ελαχίστων της f συμπίπτουν με άκρα των παραπάνω διαστημάτων, οπότε ουσιαστικά το ανώτερο ή κατώτερο άθροισμα είναι και άθροισμα Riemann της f).

Αν επιλέξουμε ως $\xi_\kappa = \alpha + \kappa\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, $\kappa = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ (δεξιά άκρα)

έχουμε $$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)}$$

ενώ αν επιλέξουμε ως $\xi_\kappa = \alpha + (\kappa-1)\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, $\kappa=1, 2, 3,\ldots,\nu$ (αριστερά άκρα)

έχουμε $$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\beta-\alpha}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\alpha+(\kappa-1)\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (Riemann) της συνάρτησης f(x) = x, στο διάστημα [1, 3].

Θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος [1, 3]:

$$P_i : 1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = 3 \quad \text{με} \quad \Delta x = \frac{3-1}{\nu} = \frac{2}{\nu}$$

Και επιλέγουμε ως ενδιάμεσα σημεία ξ_κ τα δεξιά άκρα των διαστημάτων

$$[x_{\kappa-1}, x_\kappa] = \left[\alpha+(\kappa-1)\frac{\beta-\alpha}{\nu},\ \alpha+\kappa\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right] = \left[1+\frac{2(\kappa-1)}{\nu},\ \ 1+\frac{2\kappa}{\nu}\right], \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu$$

δηλαδή $\xi_\kappa = 1+\dfrac{2\kappa}{\nu}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$.

Έτσι το άθροισμα Riemann της f στο [1, 3] για την παραπάνω διαμέριση είναι

$$S_\nu = \frac{2}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(1+\frac{2\kappa}{\nu}\right), \ \nu = 1, 2, \ldots$$

οπότε

$$\int_1^3 xdx = \lim_{\nu\to+\infty} S\nu = \lim\frac{2}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(1+\frac{2\kappa}{\nu}\right) = \lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{2}{\nu}\left(\nu+\frac{2}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa\right)\right] =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left[2+\frac{4}{\nu^2}\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right] \qquad \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa = \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left[2+2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right] = 4, \quad \text{άρα} \quad \int_1^3 xdx = 4.$$

- Προσοχή: ανεξάρτητα αν θα τεθεί στις εξετάσεις άσκηση σχετική με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, ένα τουλάχιστον παράδειγμα σαν το παραπάνω είναι καλό να γίνει. Ακόμη και αν δεν μπει άσκηση, μπορεί να τεθεί σχετική ερώτηση θεωρίας κλειστού ή μη τύπου.

Β. Σύμφωνα με την πρόταση που αναφέρεται στο σχ. βιβλίο (σελ.329-330), για κάθε συνεχή συνάρτηση f σ' ένα διάστημα [α, β], υπάρχει το ολοκλήρωμά της στο διάστημα [α, β], είναι δηλαδή όπως λέμε η f **ολοκληρώσιμη στο διάστημα [α, β].** Το σχολικό βιβλίο αναφέρεται πάντα σε συνεχείς συναρτήσεις.
Αποδεικνύεται πάντως στην Ανάλυση ότι υπάρχουν και μη συνεχείς συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες (πχ. μονότονες).

Γ. Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f στο [α, β] δεν εξαρτάται από τα ενδιάμεσα σημεία ξ_κ που επιλέγουμε, ούτε από το γράμμα - μεταβλητή x (που επιλέγουμε για παραστήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή). Το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και το διάστημα [α. β]. Μπορούμε λοιπόν να γράφομε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du = ...$$

Γι' αυτό και η μεταβλητή x λέγεται *πλασματική ή βουβή* μεταβλητή. Αντίστοιχα δεν ισχύουν στο αόριστο ολοκλήρωμα (βλ. παραπάνω Ι.7.Ε)

2. Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Α. Θεώρημα 1^{o} (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)
Η συνέχεια των συναρτήσεων f, g στο **διάστημα** [α, β] έχει ως συνέπεια (από γνωστές προτάσεις στην συνέχεια των συναρτήσεων) και την συνέχεια των συναρτήσεων λf(x), μg(x), λf(x) + μg(x) στο [α, β], οπότε οι συναρτήσεις αυτές είναι και ολοκληρώσιμες.

Β. Στο θεώρημα 2 επισημαίνουμε ότι το Δ είναι διάστημα (οποιασδήποτε μορφής) και ότι τα α, β, γ είναι οποιαδήποτε σημεία του Δ ανεξαρτήτου διάταξης. Επίσης ότι η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για οποιαδήποτε σημεία του Δ, π.χ.

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\kappa f(x)dx + \int_\kappa^\gamma f(x)dx \text{ κτλ.}$$

Γ. Θεώρημα 3^{o} (Μονοτονία ολοκληρώματος)

i. Κατ' αρχή μπορεί να αποδειχθεί ως άσκηση ότι: αν f, g συνεχείς στο [α, β] και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

ii. Το θεώρημα 3 είναι ιδιαίτερα σημαντικό και χρήσιμο σε πολλές ασκήσεις..
Το «…δεν είναι παντού μηδέν» ας δοθεί ισοδύναμα : **υπάρχει $\xi\in[\alpha, \beta]$ με $f(\xi) > 0$.**

- Άμεση και χρήσιμη γενίκευση, που καλό είναι να δοθεί ως άσκηση, με την σημείωση να την έχουν υπόψη στις ασκήσεις(αλλά που πρέπει να την αποδείξουν ή τουλάχιστον να κάνουν μια σχετική αναφορά στο θεώρημα 3, αν την χρησιμοποιήσουν) :
  Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα διάστημα [α, β] τότε ισχύει:

Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $\xi\in[\alpha, \beta]$, με $f(\xi) > g(\xi)$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

iii. Όλες οι παραπάνω ιδιότητες της μονοτονίας ολοκληρώματος ισχύουν μόνο αν το κάτω άκρο είναι μικρότερο ή ίσο του άνω άκρου.
π.χ. είναι ημx≤1 στο διάστημα [0, π] και ημx<1 στο [0, π] εκτός του π/2, αλλά είναι

$$\int_\pi^0 \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_\pi^0 = -1-1=-2 \ , \ \int_\pi^0 1dx = \left[x\right]_\pi^0 = -\pi \leq -2 = \int_\pi^0 \eta\mu x dx$$

iv. Παραγωγή ανισοτήτων με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.

Παράδειγμα

1. Να δειχτεί ότι συνx > 1- x για x > 0.

Έστω x > 0. Επειδή ημt - 1≤ 0 για κάθε $t\in[0, x]$ και υπάρχουν με ημt – 1< 0 , λόγω και του ότι οι συναρτήσεις f(x) = ημt, g(x)=1 είναι συνεχείς στο [0, x], έχομε σύμφωνα με το θεώρημα 3:

$$\int_0^x (\eta\mu t - 1)dt < 0 \ \text{ή} \ \int_0^x \sigma\upsilon\nu t dt < \int_0^x 1dt \quad \text{ή} \quad \left[-\sigma\upsilon\nu t\right]_0^x \leq \left[t\right]_0^x \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x \geq 1-x, \ x>0.$$

Άσκηση

Ισχύει $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ όπου f συνεχής στο [α, β] ή στο [β, α].

(Υπ: ισχύει -|f(x)| ≤ f(x) ≤ |f(x)|)

....

ΙII. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt$ (§ 3.5)

1. Θεώρημα σελ. 334 (ολοκλήρωμα με μεταβλητό άνω άκρο).

Α. Εισαγωγικά : Πριν την διατύπωση του θεωρήματος καλό είναι να γίνει μια «ακτινογραφία»-αποσαφήνιση της «περίεργης» συνάρτησης- ολοκληρώματος

$$\varphi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \ , \ x\in\Delta.$$

Έστω μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και α τυχόν σημείο του Δ, αλλά μόλις επιλεγεί θεωρείται σταθερό στη συνέχεια. Αν $x\in\Delta$, τότε έχουμε τις περιπτώσεις

α) x = α, οπότε $\varphi(\alpha) = \int_\alpha^\alpha f(t)dt = 0$

β) x > α, οπότε η συνάρτηση f, μεταβλητής t, είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, x] \subseteq \Delta$, άρα ορίζεται το (ορισμένο) ολοκλήρωμα $\int_\alpha^x f(t)dt$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, γ) Αν $x < α$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x, α] \subseteq Δ$, άρα ορίζεται το (ορισμένο) ολοκλήρωμα $\int_α^x f(t)dt = -\int_x^α f(t)dt$ και είναι ένα πραγματικός αριθμός.

Επομένως, καθώς το x μεταβάλλεται στο διάστημα Δ και με δεδομένη την συνεχή συνάρτηση f και σταθερό το α, ορίζεται πάντοτε ο αριθμός $\int_α^x f(t)dt$ εξαρτώμενος από το x, δηλαδή είναι συνάρτηση του x, έστω λοιπόν $φ(x) = \int_α^x f(t)dt$, $x \in Δ$.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης φ είναι η $x \in Δ$, ενώ η μεταβλητή t είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης η οποία «ζει» κάθε φορά μέσα στο διάστημα [x, α] ή [α, x]. Οι δυο αυτές μεταβλητές δεν πρέπει να συγχέονται, άρα πρέπει τουλάχιστον να παριστάνονται με διαφορετικά γράμματα. Πρώτα επιλέγεται το x, και σταθεροποιείται προσωρινά. Στη συνέχεια λειτουργεί η μεταβλητή t μέσα στο διάστημα [x, α] ή [α, x] για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα, δηλαδή ο αριθμός φ(x). Μετά επιλέγεται άλλο x κ.ο.κ.

Γενικότερα, μπορούμε να έχουμε και μεταβολή του α, δηλαδή η φ να είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών, αλλά πάντα τα **α, x θα τα παίρνουμε στο ίδιο διάστημα στο οποίο η f είναι συνεχής.**

Β. Η πλήρης διατύπωση του Θεωρήματος της σελ.334 (έπρεπε να) είναι :
Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ (κλειστό ή όχι, φραγμένο ή όχι) τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_α^x f(t)dt,\ x \in Δ, \quad \text{όπου} \quad α \in Δ \quad (\text{τυχόν αλλά σταθερό})$$

είναι **παραγωγίσιμη** στο Δ και ισχύει **$F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in Δ$.**

Γ. Η μεγάλη σημασία του θεωρήματος, είναι ότι συνδέει τις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος που έχουν οριστεί ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Έτσι αυτό δεν είναι ένα απλό θεώρημα: είναι ένα «θεϊκό θεώρημα» και αποτελεί ένα από τους θριάμβους της ανθρώπινης διανόησης!.

Αυτό είναι κανονικά το **Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα** του Ολοκληρωτικού λογισμού (Ο. Λ.) και αυτό που αναφέρεται στο σχ. βιβλίο ως θεμελιώδες, είναι το **Δεύτερο** (βλ. π.χ. Δ. Κάππου, Απειροστικός Λογισμός σελ.296, 302). Όμως για να μην υπάρξει σύγχυση ας μην αναφερθεί αυτό στους μαθητές.

Δ. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα εξασφαλίζεται *πάντα η ύπαρξη μιας αρχικής συνάρτησης για μια οποιαδήποτε συνάρτηση f συνεχή σ' ένα διάστημα Δ* (η οποία μάλιστα είναι και συνεχής, ως παραγωγίσιμη), η οποία διέρχεται από **το σημείο (α, F(α) = 0).** Η αρχική αυτή συνάρτηση δεν είναι πάντα εύκολο να βρεθεί.

Ε. Στον τύπο της αρχικής F(x) του θεωρήματος, η F είναι συνάρτηση της μεταβλητής x, που ; ίναι το άνω άκρο ολοκλήρωσης (συνάρτηση με μεταβλητό άνω άκρο). Το θεώρημα **δεν ισχύει αν στον τύπο της f(t) υπάρχει και η μεταβλητή x**.
Παράδειγμα: αν εφαρμοστεί, επιπόλαια, το θεώρημα για την συνάρτηση

$g(x) = \int_0^x (x-t)dt$, $x \in (-\infty, +\infty)$, θα δώσει $g'(x) = x - x = 0$, δηλαδή g σταθερή.

Όμως είναι $g(x) = x^2/2$. Αν μέσα στην συνάρτηση f(t) υπάρχει το x, ή άλλο γράμμα εκτός του t, θεωρείται σταθερά, δεν εφαρμόζεται τότε το παραπάνω θεώρημα για την f(t), αλλά ίσως κάποια ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος.

ΣΤ. Αν f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, $\alpha\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $G(x)=\int_x^{\alpha} f(t)dt$ ορίζεται για κάθε $x\in\Delta$ και είναι $-G(x)=-\int_x^{\alpha} f(t)dt=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$
οπότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η –G(x) είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$-G'(x=f(x) \quad \text{ή} \quad \mathbf{G'(x)=-f(x),\quad x\in\Delta,\quad G(\alpha)=0.}$$

Ζ. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα ισχύει $\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right]=f(x)$, $x\in\Delta$,
δηλαδή η παράγωγος του ολοκληρώματος συνάρτησης δίνει την ίδια συνάρτηση, δηλαδή κατά κάποιο τρόπο η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι πράξεις **αντίθετες,** η μια αναιρεί την άλλη (όπως π.χ. πρόσθεση - αφαίρεση, τετράγωνο - ρίζα κτλ.)

Η. Αν ως κάτω άκρο ολοκλήρωσης, στον τύπο της F, πάρουμε ένα άλλο αριθμό $\alpha'\in\Delta$, τότε θα βρούμε μια άλλη αρχική της f (η οποία βέβαια θα διαφέρει από την προηγούμενη κατά ένα (σταθερό) αριθμό - συνάρτηση. Υπάρχουν όμως και αρχικές μιας συνάρτησης που δεν προκύπτουν με τον τρόπο αυτό: π.χ. $\int_{\alpha}^{x} 2tdt=x^2-\alpha^2$.
Μεταβάλλοντας το $\alpha\in R$ παίρνουμε μόνο τις αρχικές x^2+c, της 2x με $c\le 0$.

Θ. Αν η f είναι και παραγωγίσιμη, τότε η F είναι διπλά παραγωγίσιμη. Γενικά αν η f έχει ν-ιοστή παράγωγο τότε η F έχει (ν+1) τάξης παράγωγο.

Ι. Μια χρήσιμη εφαρμογή του (Θεμελιώδους) Θεωρήματος του Ο. Λ.

Αν γνωρίζουμε την αρχική τιμή του $Q_0=Q(t_0)$ ενός μεγέθους Q(t), τον ρυθμό μεταβολής $Q'(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$ του μεγέθους αυτού, καθώς και ότι η συνάρτηση $Q'(t)$ είναι συνεχής, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το άγνωστο μέγεθος Q(t) και φυσικά τις τιμές του, αφού ισχύει

$$Q(t)=Q_0+\int_{t_0}^{t} Q'(u)du \qquad (1)$$

Παράδειγμα
Να βρεθεί η ταχύτητα κινητού που κινείται ευθύγραμμα με ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση αν την χρονική στιγμή $t=t_0$ το κινητό είχε ταχύτητα $\upsilon(t_0)=\upsilon_0$.
Επειδή η επιτάχυνση $\alpha=\alpha(t)=\upsilon'(t)$ είναι σταθερή, από τον παραπάνω τύπο (1) με $Q(t)=\upsilon(t)$, έχουμε,

$$\upsilon(t)=\upsilon_0+\int_0^{t}\upsilon'(u)du=\upsilon_0+\alpha\cdot[u]_{t_0}^{t}=\upsilon_0+\alpha(t-t_0)$$

Αν $t_0=0$ τότε παίρνουμε τον γνωστό τύπο $\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$ της ομαλής επιταχυνόμενης κίνησης.

Άσκηση κατανόησης : Αν f συνεχής στο [α, β] τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\beta}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt+\lim_{x\to\alpha}\int_{\beta}^{x} f(t)dt=0 .$$

2. Σχετικά με το τύπο: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))g'(x))$ **(1)**

Α. Η συνάρτηση $\Sigma(x) = \int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων u = g(x) και $F(u)=\int_{\alpha}^{u} f(t)\,dt$, Σ = Fog . Έτσι, υποθέτοντας ότι η f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ με $\alpha\in\Delta$ και ότι η u = g(x) είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Α, η Σ(x) έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

D_Σ = **{x∈A: g(x) ∈Δ}⊆A στο οποίο είναι και παραγωγίσιμη και ισχύει η (1).**

Το σύνολο αυτό δεν είναι πάντα διάστημα. Για παράδειγμα η συνάρτηση $\Sigma(x) = \int_{1}^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A=R*.

- Με την ευκαιρία να σημειώσουμε ότι, στην άσκηση 5, σελ. 339, η συνάρτηση

$$T(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{1}^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$$

έχει πεδίο ορισμού το R* , αλλά ζητείται να δειχθεί ότι είναι σταθερή στο διάστημα (0, +∞). Πράγματι, εύκολα προκύπτει ότι $T'(x) = 0$ για x > 0, αλλά και για x < 0. Όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η Τ είναι σταθερή στο σύνολο $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, αφού το σχετικό θεώρημα ισχύει μόνο σε διάστημα. Απλά μπορούμε να πούμε ότι:
T(x) = c = 0 για x > 0 και T(x) = κ για x < 0 (αποδεικνύεται ότι κ = T(-1) = -π).

Β. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ ανάγονται στην προηγούμενη μορφή :

$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_{h(x)}^{\alpha} f(t)\,dt + \int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt$ με α, g(x), h(x) στο διάστημα ορισμού της f.

3. Θεμελιώδες Θεώρημα του Ο. Λ.

Α. Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που το κάτω άκρο ολοκλήρωσης είναι μεγαλύτερο από το πάνω άκρο, όπως εύκολα αποδεικνύεται. Δηλαδή, για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] και F μια (οποιαδήποτε) αρχική της στο [α, β] ισχύει

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta).$$

Γενικότερα (ως άσκηση) : Αν φ(x) συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και Σ(x) μια –οποιαδήποτε- αρχική της φ στο Δ, τότε **για κάθε κ, λ∈Δ ισχύει**

$$\int_{\kappa}^{\lambda} \varphi(x)\,dx = \Sigma(\lambda) - \Sigma(\kappa)$$

Β. Επισημαίνουμε (και αποδεικνύουμε) ότι το θεώρημα ισχύει και για μια άλλη αρχική της f, άρα για οποιαδήποτε αρχική της f

Γ. Συχνό λάθος των μαθητών είναι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$. Μπορούμε να δείξουμε με ένα απλό παράδειγμα ότι δεν ισχύει αυτό.

Δ. Το θεώρημα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ $(\alpha<\beta)$ αν πρώτα βρούμε μια αρχική της f στο διάστημα αυτό.

Ε. Η γεωμετρική σημασία του θεωρήματος αυτού είναι ότι, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γ. π. της f, ($f(x) \geq 0$) τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ είναι ίσο με την διαφορά $F(\beta) - F(\alpha)$ τιμών μιας αρχικής της f.
Αν $f(x) \geq 0$, $x\in[\alpha, \beta]$, τότε $F'(x) = f(x) \geq 0$, οπότε η F είναι (απλά) αύξουσα άρα
$F(\beta) - F(\alpha) \geq 0$, δηλ. εξασφαλίζεται η μη αρνητικότητα του εμβαδού).

ΣΤ. Αν f συνεχής στο διάστημα $(\alpha, \beta]$ και για την τιμή $f(\alpha) = \kappa$ (που δεν προκύπτει από τον τύπο της f στο $(\alpha, \beta]$-άλλος κλάδος), η f γίνεται συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_\alpha^\beta f(t)dt$ μπορούμε να εργαστούμε ως εξής: Η συνάρτηση $F(x) = \int_x^\beta f(t)dt = -\int_\beta^x f(t)dt$, $x\in[\alpha, \beta]$, ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, είναι και συνεχής στο α, οπότε
$\lim\limits_{x\to\alpha^+} F(x) = F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$. Έτσι αρκεί να υπολογίσουμε την αρχική $F(x) = \int_x^\beta f(t)dt$, $x\in(\alpha, \beta]$, της f στο διάστημα $(\alpha, \beta]$.
Ένας άλλος τρόπος είναι να βρούμε μια αρχική της f στο διάστημα $(\alpha, \beta]$, έστω F και να την επεκτείνουμε στο α με $F(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} F(x)$ (βλ. άσκηση 17, σελ. 27)

4. Μέθοδοι Ολοκλήρωσης Ορισμένων Ολοκληρωμάτων.

Α. Υπάρχουν τρεις μέθοδοι, (αντίστοιχες των μεθόδων ολοκλήρωσης των αορίστων ολοκληρωμάτων, οι οποίες φέτος δεν είναι στην εξεταστέα ύλη!).
Η μέθοδος της *άμεσης ολοκλήρωσης* χρησιμοποιεί το θεμελιώδες θεώρημα του Ο. Λ. και ενδείκνυται πολλές φορές σε (λογιστικούς) υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.
Οι μέθοδοι της *παραγοντικής ολοκλήρωσης* και *της αντικατάστασης* στα ορισμένα ολοκληρώματα είναι συνήθως χρήσιμοι κυρίως σε θεωρητικά θέματα, όπου ένα ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε άλλο. Ο λογιστικός υπολογισμός ενός ορισμένου ολοκληρώματος με τις μεθόδους αυτές, και κυρίως με την παραγοντική ολοκλήρωση, είναι συχνά επίπονος και αυξάνει τις πιθανότητες για αριθμητικά λάθη.

Γι' αυτό, στις περιπτώσεις αυτές, είναι προτιμότερο να βρίσκουμε πρώτα μια αρχική της συνάρτησης χρησιμοποιώντας κυρίως τον πίνακα των αρχικών και μετά να χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα του Ο. Λ..
Όμως, επειδή φέτος δεν είναι στην ύλη οι μέθοδοι αόριστης ολοκλήρωσης και δυσκολεύεται η εύρεση αρχικών, συνιστάται να γίνουν περισσότερα υπολογιστικά παραδείγματα εφαρμογής των μεθόδων παραγοντικής και αντικατάστασης με ορισμένα ολοκληρώματα. Μέθοδοι και παραδείγματα μπορούν να αντληθούν από *τις σελίδες 311, 313, 314, 315* (των αορίστων). Πιο συγκεκριμένα, μπορούν να δοθούν ως ασκήσεις, στην κατά παράγοντες ολοκλήρωση και αντικατάστασης, ολοκληρώματα, όπως :

Α. $\int_{-1}^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \ldots$ Όμοια τα $\int_0^1 (u^2+1)e^u du$, $\int_0^\alpha te^{2t}dt$.

Παρόμοια υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)e^{\lambda x}dx$, όπου P(x) πολυώνυμο
(δηλαδή, κατά παράγοντες ολοκλήρωση ως προς το *εκθετικό μέρος* $e^{\lambda x}$)

Β. $\int_0^{\pi/2} x\eta\mu x dx = \int_0^{\pi/2} x(-\sigma\upsilon\nu x)'dt = ...$ Όμοια τα $\int_0^{\pi} u\sigma\upsilon\nu u du$, $\int_0^{\pi} (t+1)\eta\mu(2t)dt$.

Παρόμοια υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της μορφής

$\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\eta\mu(\lambda x)dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx$, όπου P(x) πολυώνυμο, $\lambda \in R$.

(δηλαδή, κατά παράγοντες ολοκλήρωση ως προς το *τριγωνομετρικό μέρος*)

Γ. $\int_1^e u^2 \ln u du = \int_1^e \left(\frac{u^3}{3}\right)' \ln u du = ...$ Όμοια τα $\int_e^1 x\ln x dx$, $\int_0^{\pi} t\ln(2t)dt$ και παρόμοια υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} P(u)\ln(\lambda u)du$
(δηλαδή, κατά παράγοντες ολοκλήρωση ως προς το *πολυώνυμο P(x)*)

Δ. $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi/2} (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx = ... = -1 + e^{\pi/2} - I$. Άρα $I = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}$

και παρόμοια υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της μορφής

$\int_{\alpha}^{\beta} e^{\kappa x}\eta\mu(\lambda x)dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\kappa u}\sigma\upsilon\nu(\lambda u)du$.

Ε. Απλά ολοκληρώματα ρητών (με παρανομαστή μεγαλύτερου βαθμού, διαφορετικά εκτελούμε την διαίρεση) , π.χ. $I = \int_0^1 \frac{(x^3-5x^2+6x+1)dx}{x^2-5x+6}$.

Η διαίρεση (x^3-5x^2+6x+1): (x^2-5x+6): δίνει πηλίκο x και υπόλοιπο 1, οπότε

$$I = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x^2-5x+6}\right)dx = \int_0^1 xdx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$$

Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή και αναζητούμε αριθμούς α, β ώστε

$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$ για κάθε $x \neq 2,3$…. βρίσκουμε α = -1, β =1 , κ.τ.λ.

- Πάντως, όπως και παλιά, ας έχουμε υπόψη ότι δεν είναι στους στόχους του μαθήματος ο λογιστικός υπολογισμός δύσκολων ή πολύπλοκων ολοκληρωμάτων.

Β. Σχετικά με το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής (σελ. 337),

(1) $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, $u = g(x)$, $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$,

Β1. Το θεώρημα μας δίνει την δυνατότητα να αναχθούμε σε ολοκλήρωμα άλλης μεταβλητής (και άλλων άκρων ολοκλήρωσης) που ίσως είναι ευκολότερο.

Β2. Επισημαίνουμε ότι πρέπει η συνάρτηση αντικατάστασης g να έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η f να είναι συνεχής (τουλάχιστον) στο σύνολο (διάστημα, λόγω συνέχειας σε κλειστό) $g([\alpha, \beta])$, το οποίο δεν έχει πάντα άκρα τα $g(\alpha)$, $g(\beta)$ (και δεν είναι απαραίτητο να είναι 1-1).
Γενικά είναι $[g(\alpha), g(\beta)]$ ή $[g(\beta), g(\alpha)] \subseteq g([\alpha, \beta])$. Οι αριθμοί $g(\alpha)$, $g(\beta)$ μπορεί να είναι και ίσοι ή άνισοι. Μια περίπτωση το διάστημα $g([\alpha, \beta])$ να έχει άκρα τα $g(\alpha)$, $g(\beta)$, είναι όταν η g είναι 1-1, οπότε λόγω της συνέχειάς της είναι γν. μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ (είναι τότε $g([\alpha, \beta]) = [u_1, u_2]$ ή $[u_2, u_1]$). Βέβαια μπορεί να έχει αυτά τα άκρα και να μην είναι μονότονη.

- Αν $g(\alpha) = g(\beta)$ τότε το ολοκλήρωμα δεν είναι πάντα ίσο με 0: απαιτείται και η προς ολοκλήρωση συνάρτηση *να εκφράζεται μόνο με τη νέα μεταβλητή u* (δηλαδή να μην υπάρχει η παλιά x).

Β3. Αν προσέξουμε τη ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, παραβλέποντας τα άκρα, βλέπουμε ότι είναι «εντελώς αυτονόητη»:

Αφού $u = g(x)$ και (από …συμβολισμό) $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ή $du = g'(x)\,dx$ αλλά και τα άκρα ολοκλήρωσης αλλάζουν «αναλογικά».

Αυτό απλά μας λέει ότι το θεώρημα επαληθεύεται με αυτή την «χονδροειδή» κίνηση, που δεν αποτελεί, προφανώς, απόδειξη, είναι όμως βολική στην πράξη.
Η απόδειξή του θεωρήματος στηρίζεται στη θεώρηση μιας αρχικής της συνεχούς f στο διάστημα $g([\alpha, \beta])$ και χρησιμοποίηση του Θ. Θ. του Ο. Λ.

Β4. Στην πράξη σπάνια η συνάρτηση φ(x), σ' ένα ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$, είναι φανερά της μορφής $f(g(x))g'(x)$ Επιμένουμε όμως και επιλέγουμε $u = g(x)$, όπου $g(x)$ είναι συνήθως ένα «περίεργο», συνήθως «βαρύ» μέρος εντός του τύπου της προς ολοκλήρωσης συνάρτησης φ(x), και προσπαθούμε (γράφοντας τυπικά $du = g'(x)dx$ κ.τ.λ.) να το μετατρέψουμε σε ολοκλήρωμα (μόνο) της νέας (πλασματικής) μεταβλητής u με νέα όρια ολοκλήρωσης $g(\alpha)$, $g(\beta)$ κλπ
Υπάρχει όμως περίπτωση η αντικατάσταση $u = g(x)$ και οι συνακόλουθες ενέργειες, να μην οδηγούν άμεσα σε προς ολοκλήρωση συνάρτηση f(u) (χωρίς την μεταβλητή x), αλλά να χρειάζεται η συνάρτηση $u = g(x)$ να λυθεί ως προς $x = \Sigma(u)$ για να γίνει αυτό. Άρα πρέπει η g να είναι και 1-1 στο $[\alpha, \beta]$ για να έχει αντίστροφη. Αν μάλιστα θέλουμε και την συνέχεια της παραγώγου της αντίστροφης Σ, τότε αρκεί να έχουμε $g'(x) \neq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ (τότε λόγω και της συνέχειας της g' , η g είναι γν. μονότονη και η Σ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα με άκρα $g(\alpha)$, $g(\beta)$, το οποίο ταυτίζεται τότε με το $g([\alpha, \beta])$ κλπ (:εκτός σχ. ύλης τα θεωρήματα αυτά!)
Αν η g δεν είναι 1-1 στο διάστημα ολοκλήρωσης, ίσως να είναι σε κάποια υποδιαστήματά του, οπότε σε αυτά μπορούμε να δουλέψουμε με την αντίστροφη, αν βέβαια οι πράξεις μετά στα ολοκληρώματα είναι... υποφερτές. Διαφορετικά αναζητούμε άλλη, καλύτερη αντικατάσταση.

Β5. Ένα άλλος δρόμος για τον υπολογισμό (ή την μετατροπή) ενός ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$, είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα παραπλήσιο με το παραπάνω θεώρημα («εσωτερικής μεταβλητής» θα λέγαμε: από το δεύτερο προς το πρώτο μέλος του παραπάνω θεωρήματος):

❖ Αν f συνεχής στο διάστημα [α, β] και u = g(x) συνάρτηση με συνεχή παράγωγο σ' ένα διάστημα Δ = [κ, λ] ή [λ, κ] ώστε α = g(κ), β = g(λ), [α, β] = g(Δ), τότε ισχύει

(2) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)du = \int_{\kappa}^{\lambda} f(g(x))g'(x)dx$$

(3) (ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\kappa}^{\lambda} f(g(u))g'(u)du$ με x = g(u), α = g(κ), β = g(λ) κ.τ.λ.)

Σχόλιο : Επειδή α<β είναι και κ ≠ λ (ανεξάρτητα αν g είναι 1-1).

Γ. Οι παραπάνω μέθοδοι ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εφαρμόζοντα σε δυο περιπτώσεις:
1. Η αντικατάσταση u = g(x) (ή x = g(u) για την περίπτωση (3)) κ.τ.λ., οδηγεί «φυσιολογικά» σε μετάβαση από το ένα μέλος στο άλλο (στους τύπους των θεωρημάτων), δηλαδή καθ' ολοκληρία στη νέα μεταβλητή (u ή x). Σε αυτή δηλαδή την περίπτωση τα θεωρήματα εφαρμόζονται ομαλά, άμεσα, χωρίς να χρειάζεται να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης αντικατάστασης. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το 1-1 δεν μας ενδιαφέρει αφού δεν το απαιτούν τα θεωρήματα. Στην περίπτωση αυτή αν είναι ίσα τα νέα άκρα ολολήρωσης το ολοκλήρωμα είναι ίσο μηδέν.

Παράδειγμα 1

Για το ολοκλήρωμα $\Lambda = \int_{-1}^{1} (2x - 1)(x^2 - x + 2011)dx$.
Θέτουμε $u = x^2 - x + 2011$ (όχι 1-1 στο [-1, 1]), με νέα όρια ολοκλήρωσης 1,1, du = (2x-1)dx, οπότε $\Lambda = \int_{1}^{1} u\,du = 0$ (γενικά $\int_{-1}^{1} (2x - 1)f(x^2 - x + \alpha)dx = 0$, με f συνεχή, $\alpha \in R$)

Παράδειγμα 2

Για το ολοκλήρωμα $K = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, θέτουμε $u = g(x) = 1 + x^2$, με όρια ολοκλήρωσης 1,1. Αυτό δεν σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα είναι 0. Για να συμβεί αυτό *πρέπει το Κ να οδηγείται με την αντικατάσταση αυτή σε νέα μεταβλητή u,* όπως έγινε στο προηγούμενο παράδειγμα. Αυτό όπως παρατηρούμε δεν συμβαίνει εδώ, αφού απαιτείται να λυθεί ως προς x, η $u = 1 + x^2$, πράγμα που δεν δίνει μοναδικότητα στη λύση, **αφού η** g(x) **δεν έχει αντίστροφη στο [-1, 1].** Αν και εδώ μπορούμε να διασπάσουμε το ολοκλήρωμα στα διαστήματα [-1, 0], [0, 1] και να λάβουμε αντίστοιχα $x = -\sqrt{u-1}$, $x = \sqrt{u-1}$, γενικά όταν βρεθούμε σε αυτή την κατάσταση, αναζητούμε μήπως υπάρχει μια καλή αντικατάσταση, π.χ. για το ολοκλήρωμα αυτό μια καλή αντικατάσταση είναι η x = εφt, t∈[-π/4, π/4], αφού οδηγεί άμεσα σε νέα μεταβλητή κ.τ.λ.

Παράδειγμα 3 : Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $K=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Θέτουμε x = g(u)= ημu , u∈[0, π/2] (μπορούμε να επιλέξουμε και το διάστημα [0, π]). Το σύνολο τιμών της g και για τα δυο διαστήματα είναι [0, 1] (στο πρώτο είναι 1-1, ενώ δεν είναι στο δεύτερο). Η αντικατάσταση x = g(x)= ημu οδηγεί άμεσα το ολοκλήρωμα στην νέα μεταβλητή u (και στα δυο διαστήματα). Το ολοκλήρωμα K αν επιλέξουμε u∈[0, π/2], γίνεται $K=\int_0^{\pi/2} συν^2u du$, ενώ στο άλλο διάστημα (με 0 = ημπ) $K=-\int_\pi^{\pi/2} συν^2u du$ και τα δυο όμως έχουν τελικά τιμή π/4.

(Σημείωση: Η τιμή π/4 του παραπάνω ολοκληρώματος μπορεί να θεωρηθεί και "προφανής" σε σχολικό επίπεδο, αφού δηλώνει το ένα τέταρτο του εμβαδού κύκλου ακτίνας 1!)

2. Η αντικατάσταση u = g(x) ή x = g(u) κ.τ.λ., δεν οδηγεί άμεσα στη νέα (μοναδική) μεταβλητή, αλλά χρειάζεται να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης αντικατάστασης. Φυσικά η απαίτηση να οδηγηθούμε στη νέα (μοναδική) μεταβλητή απορρέει από τα παραπάνω θεωρήματα, μόνο που δεν είναι άμεσα ορατή η εφαρμογή τους. Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται η συνάρτηση αυτή να είναι 1-1, διαφορετικά θα βρεθούμε σε αδιέξοδο ποια συνάρτηση θα επιλέξουμε ή μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθος (βλ. παράδειγμα 5).

Παράδειγμα 4 : Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $J=\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx$ με την μέθοδο αντικατάστασης.

Θέτουμε: u = g(x) = $\sqrt{1+x}$, x∈[0, 1], du = $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$.Η αντικατάσταση αυτή δεν οδηγεί άμεσα σε ολοκλήρωμα συνάρτησης με την νέα μεταβλητή u. Αυτό θα το πετύχουμε αν λύσουμε ως προς x την εξίσωση u = $\sqrt{1+x}$, δηλαδή να βρούμε την αντίστροφη της συνάρτησης g στο διάστημα ∈[0, 1], **υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι υπάρχει.** Εδώ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$ οπότε η g είναι 1-1 στο [0, 1] με αντίστροφη: $x = u^2 -1$, u∈ [1, $\sqrt{2}$]. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται $J=\int_1^{\sqrt{2}} 2u^2(u^2-1)du$ κλπ.

Παράδειγμα 5

$$K=\int_{1/e}^{e}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$$

Αν θέσουμε $u = 1 + \ln^2x$, η αντικατάσταση αυτή *αποτυγχάνει* να οδηγήσει το ολοκλήρωμα άμεσα στην νέα μεταβλητή u και απαιτείται να βρεθεί η αντίστροφή της, που δεν υπάρχει: $x=e^{\pm\sqrt{u-1}}$) Αν λάβουμε την $x=e^{-\sqrt{u-1}}$ ή την $x=e^{\sqrt{u-1}}$ (υπάρχουν και άλλες!) θα έχουμε νέα όρια ολοκλήρωσης 2, 2, οπότε K = 0. Όμως το ολοκλήρωμα K είναι θετικός αριθμός, αφού η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι θετική στο [1/e, e], άτοπο. Αν και μπορούμε να διασπάσουμε το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα στα διαστήματα [1/e, 1],[1, e] και να παρουμε για το πρώτο διάστημα την $x=e^{-\sqrt{u-1}}$ και για το δεύτερο την $x=e^{\sqrt{u-1}}$ (1-1 στο [1, 2]), επειδή προκύπτουν πολύπλοκα ολοκληρώματα, θα αναζητήσουμε μια καλύτερη αντικατάσταση. Πράγματι, η $u = \ln x$ οδηγεί το ολοκλήρωμα στην νέα μεταβλητή u και στην συνέχεια με την u = εφω, ω∈[-π/4, π.4], προκύπτει Κ = π/2.

Δ. Στην πράξη σε υπολογισμούς ορισμένων (και αόριστων) ολοκληρωμάτων συνήθως **προτιμούμε, για να αποφύγουμε πολλές πράξεις ή και λάθη,** να επιλέξουμε (βλ. Β5, σχέση (2)) την αντικατάσταση u = g(x) και το διάστημα Δ, ώστε η g να είναι **γν. μονότονη** (άρα και 1-1) στο διάστημα Δ (εξασφαλίζουμε έτσι το [α, β] = g(Δ) **αλλά και την αντίστροφη της g αν χρειαστεί**). Αυτό το εξασφαλίζουμε, με δεδομένη την συνέχεια της g′, με το να ελέγξουμε (ή και να απαιτήσουμε) αν g′(u)≠0, u∈Δ (που ελέγχεται εύκολα), οπότε έχουμε και την παραγωγισιμότητα της αντίστροφης αλλά και την συνέχειά της παραγώγου της.

Ε. Υπάρχει περίπτωση με μια αντικατάσταση να βγούμε έξω από το διάστημα ορισμού του ολοκληρώματος. Παράδειγμα :

Για το ολοκλήρωμα $J = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$, θέτουμε u= $\sqrt{x}$, x∈[0, 4].

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ και η παράγωγος της u δεν είναι συνεχής στο [0, 4].

Στην περίπτωση αυτή ένας τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι

$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ και στην συνέχεια να εργαστούμε με την προηγούμενη αντικατάσταση στο [α, 9], 0 < α < 9, (τελικά Ι = $4e^3$+2) .

Ο άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα αντικατάστασης από το δεύτερο προς το πρώτο μέλος (βλ. 4. Β5):

Θέτουμε x = g(u) = u^2, dx = 2udu, οπότε προχωρούμε κανονικά.

5. Προσοχή: Φέτος που δεν είναι στην εξεταστέα ύλη οι μέθοδοι αόριστης ολοκλήρωσης, μπορούμε να βρούμε μια αρχική με βάση το πρώτο θεώρημα της 3.5 (μεταβλητό άνω άκρο) σε συνδυασμό με μια από τις μεθόδους ολοκλήρωσης στα ορισμένα. Για παράδειγμα:

- Μια αρχική της (συνεχούς) συνάρτησης $f(x) = x^2e^x$ στο διάστημα (-∞, +∞). είναι π.χ. η

  $$F(x) = \int_0^x t^2e^tdt = \int_0^x t^2(e^t)'dt = ... = e^x(x^2 - 2x - 2)$$

(Γενικά αν θέλουμε η γ. π. της F(x) να διέρχεται από το σημείο (α, β) τότε έχουμε την αρχική $F(x) = \beta + \int_\alpha^x t^2e^tdt = \beta + \int_\alpha^x t^2(e^t)'dt = ...$)

- Μια αρχική της (συνεχούς) συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ στο διάστημα [0, +∞),

  είναι π.χ η συνάρτηση $\Phi(x)= \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}dt$, x ≥ 0 . Θέτουμε u= $\sqrt{t}$ ….. οπότε

$$\Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{u}{1+u}2udu = 2\int_0^x \frac{u^2-1+1}{1+u}du = ... = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}).$$

6. Το θεώρημα μέσης τιμής του Ο. Λ. αν και δεν είναι στη εξεταστέα ύλη, συνιστάται *να δοθεί ως άσκηση*: είναι μια καλή επαναληπτική θεωρητική εφαρμογή του Θ.Μ.Τ του Δ. Λ. και του πρώτου θεωρήματος της σελ.334 (μεταβλητό άνω άκρο).

Άσκηση κατανόησης :

Έστω $\alpha > 0$ και f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [-α, α].Τότε ισχύουν

α) Αν f άρτια, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt$,

β) Αν f περιττή , $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$, π.χ. $\int_{-1}^{1} \eta\mu(x^{2009})dx = 0$, γ) $\int_{-\alpha}^{\alpha} xf(x^2)\,dx = 0$.

………………………………

IV. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ (§ 3.7)

Α. Όλοι οι τύποι των εμβαδών είναι επιστημονικά και διδακτικά σωστό να διδαχθούν με την σειρά που υπάρχει στο βιβλίο, επαγωγικά, και όχι να δοθεί απ' ευθείας ο τελικός τύπος (ο οποίος βέβαια θα πρέπει να τονιστεί ότι καλύπτει όλες τις περιπτώσεις). Χρήσιμο είναι να τονίσουμε και να υπενθυμίσουμε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή μιας συνεχούς σε κλειστό διάστημα που χρησιμοποιούμε στη σελίδα 344, θέμα που σχετίζεται πολύ και με διάφορες θεωρητικές ασκήσεις με όρια στα ολοκληρώματα.

Β. Η εφαρμογή 3 της σελίδας 348, σύμφωνα με την εξεταστέα ύλη, έχει παραλειφθεί.

Συνιστάται όμως διδαχθεί ως άσκηση, επισημαίνοντας την συνάρτηση αντικατάστασης - αλλαγής μεταβλητής και να δοθεί ως άσκηση η εύρεση του εμβαδού της έλλειψης.

Εκτός από αυτό, το αποτέλεσμα της εφαρμογής, Εμβαδόν ημικυκλίου $E=\pi\rho^2/2$, μπορεί να θεωρηθεί γνωστό σε σχολικό επίπεδο(π.χ. σε μια εξέταση) αν παρατηρήσουμε ότι αυτό εκφράζεται στον ολοκληρωτικό λογισμό από τον αριθμό $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ $(y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1, 1])$

Γ. Σχετικά με τα σημεία τομής της γ. π. μιας συνάρτησης με την αντίστροφή της, πρόβλημα που μπορεί να εμφανιστεί στα προβλήματα υπολογισμού εμβαδών.

Έχει γίνει πολύ συζήτηση τα τελευταία 2-3 χρόνια, κυρίως στο διαδίκτυο, αν βρίσκονται ή όχι όλα πάνω στην διχοτόμο $y = x$. Όλοι σχεδόν οι συνάδελφοι που έχουν ασχοληθεί με το θέμα, όπως και εγώ παλαιότερα, πιστεύουν ότι δεν υπάρχει επιστημονικός ή διδακτικός λόγος για να μην εργαζόμαστε όπως μέχρι σήμερα και εν πάση περιπτώσει υπάρχει πολύ μικρή αποδοχή της «άλλης θεώρησης της αντίστροφης» (η οποία είναι αξιοπρόσεκτη και χρήζει περαιτέρω έρευνας, όχι κατ' ανάγκη σε σχολικά πλαίσια ή με σχολική προοπτική).

Εκείνο που πρέπει όμως να έχουμε υπόψη και να επισημάνουμε στους μαθητές, είναι ότι: Αν βρούμε κατά τα γνωστά την αντίστροφη μιας συνάρτησης $y = f(x)$, $x\in A$, έστω την $x = g(y)$ (ή $x = f^{-1}(y)$), $y\in f(A)$, δεν πρέπει να εναλλάξουμε τις μεταβλητές x, y, χωρίς ουσιαστικό λόγο Το «επιχείρημα» ότι την ανεξάρτητη μεταβλητή την «παριστάνουμε συνήθως με x» είναι ανεπαρκές και μπορεί να οδηγήσει και σε σύγχυση. Αυτή είναι η μαθηματική (αλγεβρική) πορεία των μεταβλητών-μεγεθών, αλλά και η φυσική πορεία (δηλαδή αν x, y παριστάνουν

συγκεκριμένα μεγέθη). Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις, π.χ. σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα που είναι αδιάφορο πως θα ονομαστεί η ανεξάρτητη μεταβλητή, όμως σε μια αρχική (ή αόριστο ολοκλήρωμα) δεν πρέπει να γίνει εναλλαγή, όπως και σε θέματα παραγωγίσεων.
Μια περίπτωση που πρέπει να γίνει εναλλαγή των x, y είναι όταν κάνουμε την γραφική παράσταση της $y = f(x)$ και της αντίστροφής της στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, όπου κατά πάγια τακτική τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή (ανεξάρτητα πως την συμβολίζουμε κάθε φορά) στον οριζόντιο άξονα. Στη περίπτωση φυσικά αυτή οι τετμημένες των κοινών σημείων της f και της αντίστροφής της, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(t) = f^{-1}(t)$, $t\in A\cap f(A)$, αν την κοινή ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίσουμε π. χ με t.

V. Παράδοξα - Ερωτήσεις

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\Lambda = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\text{συν}x}dx$.

Θέτουμε $\theta = \text{εφ}\frac{x}{2}$, $x\in[0, 2\pi]$, οπότε $dx = \frac{2}{1+\theta^2}d\theta$ και

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\text{συν}x}dx = \int_0^0 \frac{2}{3+\theta^2}d\theta = 0 .$$

Δηλαδή μια θετική συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν, άτοπο.
Το λάθος οφείλεται στο ότι η συνάρτηση αντικατάστασης θ δεν ορίζεται στο διάστημα του $[0, 2\pi]$ (στον αριθμό π).

2. Συχνές είναι οι ερωτήσεις καθηγητών, αν στα Μαθηματικά Γενικής παιδείας μπορούν οι μαθητές στις εξετάσεις να χρησιμοποιήσουν τον τύπο της εφαπτομένης και τον κανόνα De L' Hospital από τα Μαθηματικά κατεύθυνσης.
Σχετικά έχω να παρατηρήσω τα εξής:
Τα ερωτήματα αυτά είναι παλιά και δεν υπάρχει επίσημη απάντηση από το Π. Ι. ή το ΥΔΒΜΘ, παρά τις σχετικές ερωτήσεις που έχουν γίνει. Έτσι κάποιοι καθηγητές είναι υπέρ της μιας και κάποιοι υπέρ της άλλη άποψης. Πιστεύω ότι οι μαθητές οφείλουν να απαντούν με την θεωρία του μαθήματος που εξετάζονται καθώς και με γνώσεις προηγούμενων τάξεων και μόνο. Αν χρησιμοποιήσουν κάτι εκτός εξεταστέας ύλης ή που δεν έχει διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις, οφείλουν να το αποδείξουν. Παλιότερα υπήρχε η αρχή, ό,τι χρησιμοποιήσει ο μαθητής εκτός ύλης εξεταζόμενου μαθήματος πρέπει να το αποδείξει. Στις μέρες μας μερικοί καθηγητές, κυρίως νέοι, ισχυρίζονται ότι τους καλύπτει το: "κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή" (που τίθεται κάθε χρόνο κάτω από τα θέματα των εξετάσεων). Αυτοί που κάθε χρόνο το αναγράφουν αυτό, τουλάχιστον για τα Μαθηματικά, οφείλουν να ξεκαθαρίσουν τι εννοούν ακριβώς, ώστε να ξεκαθαριστούν οι όροι των εξετάσεων και μην δημιουργούνται προβλήματα στα βαθμολογικά κέντρα. Μπορεί κάλλιστα ένας βαθμολογητής να μην θεωρήσει σωστή μια λύση που θα χρησιμοποιεί π.χ. τον κανόνα De L' Hospital στα Μαθηματικά Γενικής παιδείας, ή στην κατεύθυνση π.χ. το δεύτερο κριτήριο ακροτάτων ή το Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού και άλλος να το θεωρήσει σωστό.

Το κύριο επιχείρημά μου είναι η ανισότητα που δημιουργείται με τους μαθητές της θεωρητικής κατεύθυνσης, αλλά και στους μαθητές της κατεύθυνσης που δεν έχουν την άνεση ή την δυνατότητα να διαβάσουν ή να διδαχθούν επί πλέον ύλη. Εξ' άλλου και η μαθηματική πειθαρχία και επινόηση είναι *μέσα στους στόχους του μαθήματος*.

VI. Μεθοδολογικές και γενικές παρατηρήσεις

1. Δεν είναι στους σκοπούς του μαθήματος πολύπλοκοι υπολογισμοί ολοκληρωμάτων και ειδικές τεχνικές και τεχνάσματα ολοκλήρωσης, όπως γίνεται συνήθως στο Πανεπιστήμιο ή στα ΤΕΙ. Οι υπολογισμοί να περιοριστούν σε απλές περιπτώσεις, στο επίπεδο του σχ. βιβλίου, σχετιζόμενες κυρίως με τα εμβαδά..

2. Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης ορισμένων ολοκληρωμάτων χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει άμεση ανάγκη υπολογισμού του ολοκληρώματος. Στην περίπτωση π.χ. απόδειξης μιας ανισότητας ή υπολογισμού ορίου ολοκληρώματος, πρώτα θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε γνωστές ιδιότητες της διάταξης του ολοκληρώματος ή των ορίων και τελευταία θα σκεφτούμε για άμεσο υπολογισμό του ολοκληρώματος. Άλλωστε ο υπολογισμός ενός (αόριστου και κατ' επέκταση ορισμένου) ολοκληρώματος είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα και πρέπει να γίνεται όταν έχουν εξαντληθεί άλλοι τρόποι και ιδιότητες.

3. Οι ερωτήσεις κατανόησης και οι ασκήσεις του βιβλίου πρέπει να προηγούνται των άλλων ασκήσεων που ενδεχομένως θα δώσουμε στους μαθητές.
Οι επαναληπτικές ερωτήσεις κατανόησης των σελ.354-359 επιβάλλεται να μην… λησμονηθούν και να ελεγχθούν οι απαντήσεις τους με σχετική δικαιολόγηση στη τάξη.

4. Σε πολλά θεωρητικά θέματα ολοκληρωμάτων, κυρίως με όρια, που αναφέρονται σε μια συνεχή συνάρτηση φ σε διάστημα [α. β] είναι αρκετά χρήσιμο να έχουμε υπόψη το θεώρημα της μέγιστης και ελάχιστης τιμής για την συνάρτηση φ ή την φ′ αν δίνεται ότι είναι συνεχής.

5. Προβλήματα εύρεσης συνάρτησης με ολοκλήρωμα («ολοκληρωτικές εξισώσεις»)
Αφού ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα των εμφανιζόμενων συναρτήσεων, συνήθως παραγωγίζουμε και τα δυο μέλη και προχωρώντας με συνεπαγωγές, βρίσκουμε μια ή περισσότερες συναρτήσεις. Επειδή δεν προχωρήσαμε με ισοδυναμίες (τουλάχιστον στο βήμα της παραγώγισης), είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε επαλήθευση των υποψηφίων λύσεων -συναρτήσεων, βρίσκοντας ίσως έτσι και την σταθερά που ίσως υπάρχει σε αυτές. Αν όμως δίνεται ή μπορούμε να βρούμε μια αρχική συνθήκη από τη δεδομένη εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση φ, π.χ. $\varphi(\kappa) = \alpha$ ή $\tau(\kappa) = \varphi(\kappa)$ - και έχουμε υπόψη την σχεδόν προφανή ή ευκόλως αποδεικνυόμενη ιδιότητα:
$\tau(x) = \varphi(x)$ αν και μόνο ($\tau'(x) = \varphi'(x)$ και $\tau(\kappa) = \varphi(\kappa)$) , σε κατάλληλα διαστήματα - τότε δεν χρειάζεται επαλήθευση. Συνιστάται να διδαχθούν και οι δυο τρόποι.

6. Να τονίζουμε σε κάθε ευκαιρία το «πνεύμα των θεμάτων με πολλά ερωτήματα». Οι μαθητές έχουν την τάση να στοχεύουν απ' ευθείας ένα ερώτημα, αγνοώντας τα προηγούμενα (τα οποία μπορούν να χρησιμοποιήσουν ακόμη και αν δεν τα απέδειξαν!).

7. Το γενικό επαναληπτικό διαγώνισμα που συνιστάται να γίνει στο τέλος, -τρίωρο- πρέπει να έχει κύριους στόχους τον έλεγχο βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων, να δίνει μια πρόγευση των πανελληνίων εξετάσεων, **αλλά προπάντων και να ενθαρρύνει,** στο μέτρο του δυνατού, τους μαθητές: είναι λοιπόν καλό τα 2 πρώτα θέματα να αφορούν τον έλεγχο της κατανόησης της διδαγμένης ύλης και των σχετικών δεξιοτήτων μέσω κλειστών ερωτήσεων (καλύτερα πολλαπλής επιλογής-όχι Σ-Λ) και *απλών ασκήσεων* κατανόησης και εφαρμογής. Τα υπόλοιπα 2 θέματα μπορούν να πλησιάζουν στο πνεύμα του 3^{ου} και 4^{ου} των πανελλαδικών εξετάσεων με τις εξής προϋποθέσεις: να έχουν διδαχθεί παρόμοια ή και ίδια ή και πιο δύσκολα στη τάξη και να είναι στο επίπεδο των δυνατοτήτων των μαθητών. Καλύτερα λίγο «φτωχά θέματα» και να πάνε οι μαθητές με θάρρος και αυτοπεποίθηση στις εξετάσεις παρά με «πλούσιο Μαθηματικό περιεχόμενο» και να υπάρξει πικρία, απογοήτευση και πτώση του ηθικού. Άλλωστε τα περιθώρια βελτίωσης στο σημείο αυτό είναι πια πολύ περιορισμένα.-

* * *

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΟΛΟΚΛ/ΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ερωτήσεις κλειστού τύπου

1. α. Μια αρχική της συνάρτησης $\varphi(t) = x$ είναι η

Α. $\frac{x^2}{2}+c$ Β. $\frac{xt^2}{2}+c$ Γ. xt+c Δ. $\frac{tx^2}{2}+c$

β. Μια αρχική της συνάρτησης $\varphi(y) = xe^{xy}$ είναι

Α. $2009+xe^{xy}$ Β. xye^{xy} Γ. $2010+ xe^{xy}$ Δ. $1+ye^{xy}$ Ε. $2011+e^{xy}$

γ. Αν $f(x)=\int_2^x te^x dt$ τότε $f'(2) =$ Α. 0 Β. $2e^2$ Γ $4e^2$. Δ. e^2

δ. Αν α(x) αρχική της φ στο R και $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x\in R$, τότε η $-\alpha(x)$ είναι

Α. Γνησίως αύξουσα Β. Γνησίως φθίνουσα Γ. Κυρτή Δ. Κοίλη

ε. Η διαφορά $\int_\alpha^\beta f(x)dt - \int_\alpha^\beta f(t)dx =$

Α. 0 Β. β-α Γ. f(β)- f(α) Δ. (β-α)(f(x)-f(t))

Στ΄. Η συνάρτηση $f(x) = \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$, $x\in[0, 2]$, έχει

Α. μέγιστη τιμή 0 Β. Ελάχιστη τιμή 0 Γ. Άλλο

ζ. Αν η συνάρτηση $f(x) = \int_k^x \frac{dt}{\ln t}$, $0< x < 1$, είναι μια αρχική της συνάρτησης

$g(t) = \frac{1}{\ln t}$ στο διάστημα (0, 1), τότε πρέπει :

Α. k =1 Β. k < 1 Γ k > 1 Δ. 0< k < 1 Ε. $k\in R$

η. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2}dt =$ Α. 0 Β. 1 Γ. e^{-x^2} Δ . e^{-t^2} Ε. e^{-1}

θ. Ο αριθμός $\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}d\theta =$

Α. $\left[\frac{1}{\varphi(\theta)}\right]_\alpha^\beta$ Β. $\left[-\frac{1}{\varphi(\theta)}\right]_\alpha^\beta$ Γ. $\left[\frac{1}{\varphi(\theta)}\right]_\beta^\alpha$ Δ. $\left[\ln|\varphi(\theta)|\right]_\alpha^\beta$.

2. Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ για $x\neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι μια αρχική της συνάρτησης g με $g(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ για $x \neq 0$ και $g(0) = \frac{1}{2}$.

Β. Να βρεθεί μια αρχική της συνάρτησης φ, με
$\varphi(y) = 3y^2$ για $0 \le y < 1$, και $\varphi(y) = 3$ για $y \ge 1$.

3. Α. Αν Φ αρχική μιας συνάρτησης f στο διάστημα [α, β] και Σ αρχική της f στο διάστημα [β, γ], να βρεθεί μια αρχική της f στο διάστημα [α, γ].
Β. Έστω η συνάρτηση f με f(x) = -1 για $x\in[-1, 0)$ και f(x) = 1 για $x\in[0, 1]$. Να βρεθεί μια αρχική της σε κάθε ένα διάστημα [-1, 0), [0,1] και να δειχθεί ότι δεν έχει αρχική.

4. Έστω η συνάρτηση $x(t) = t + \sqrt{1+t^2}$. α) Δείξετε ότι $x'(t) = \dfrac{x(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, $t\in R$,

β) Δείξετε ότι η x(t) είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Να βρεθεί μια αρχική της συνάρτησης $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

5. Δείξετε, με την βοήθεια του ορισμού του ολοκληρώματος, ότι
α) $\int_1^3 x dx = 4$, β) $\int_1^3 x^2 dx = \dfrac{26}{3}$, γ) $\int_0^1 x^3 dx = \dfrac{1}{4}$

(Δίνεται ότι $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3 = \left(\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$)

6. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων
$\varphi(x) = \int_1^{\sqrt{x-2}} \dfrac{dt}{|t-2|}$, $S(x) = \int_e^{\sqrt{x-2}} \dfrac{du}{\ln u}$ (Απ. (2, 6), (3, +∞))

7. Δείξετε ότι η συνάρτηση $\lambda(x) = 1 + x^2 + \int_{x^3}^{1} \dfrac{1}{1+t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί η εφαπτομένη της στην θέση x=1. (Απ. x-2y+3=0)

8. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \int_x^{1+x} \dfrac{t}{e^t}dt$, $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη και να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

9. Αν f συνεχής στο R, τότε ισχύει, $f(x) = \int_1^x f(t)dt$ για κάθε $x\in R$, αν και μόνο αν η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

10. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις στο R , με την ιδιότητα
$e^x(x-2) + x + 2 = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du\right) dt$, $x\in R$. (Απ: xe^x)

11. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.
α) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
β) Να βρεθεί το όριο $\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^{\alpha+1} f(t)dt$,γ) Να βρεθεί μια αρχική της f.

12. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_1^x \dfrac{xe^t}{t}dt$, x > 0 και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης φ′.

13*. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $\tau(y) = \int_y^0 \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}dt$ και να βρείτε την αντίστροφή της αν υπάρχει.

14. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση φ(x), x > 0, με την ιδιότητα $ex + \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt = \varphi(x)$ για κάθε x > 0 και στην συνέχεια να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

15. Να δείξετε ότι: α) αν $0 \le \alpha \le 1$ τότε $\sqrt{2\alpha} \le \sqrt{1+\alpha^2} \le \sqrt{2}$, β) $\frac{\sqrt{2}}{14} < \int_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{13}$.

16. Αν $\varphi(x) = (x + 4)e^{-x}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία Σ(x, y) με $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \varphi(x)$. (Απ.4e-6/e)

17. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \ge 1$.
α) Να βρεθεί η αντίστροφή της,
β) Να λυθεί η εξίσωση $\varphi(x) = \varphi^{-1}(x)$,
γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ, φ^{-1}. (Απ.1/3)

18. Α. Αν f συνεχής στο [-1, 1] να αποδειχθεί ότι $\int_{-1}^{1} \eta\mu x \cdot f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx = 0$

Β. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} \frac{\eta\mu 2x}{8 + \sigma\upsilon\nu^3 x}dx$

Γ. Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] με $\varphi^2(x) + \varphi(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx + 2005 = 0$. Να εξεταστεί η μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = \int_x^\beta \varphi(t)dt$, $x \in [\alpha, \beta]$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

19*. Έστω φ συνάρτηση συνεχής στο R και παραγωγίσιμη στο 0 με την ιδιότητα

$$12\int_0^x t\varphi t)dt = x^3 + 6x\int_0^x \varphi(t)dt \quad \text{για κάθε } x \in R$$

α) Να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο R, β)Να βρείτε την συνάρτηση φ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (1, 2009).

20*. Α. Αν φ συνεχής στο διάστημα [0, +∞) και κ > 0 τότε $\int_{-\kappa}^{\kappa} x\varphi(x^2)dx = 0$.

Β. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \int_0^1 \sigma\upsilon\nu(\lambda t)dt$ είναι συνεχής στο R και να εξεταστεί ως προς την μονοτονία στο διάστημα [0, π/2].

21*. α) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty} \int_e^x \frac{1}{\ln t}dt = +\infty$.

β) Να βρεθεί ο αριθμός με τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράσταση $P = \frac{\ln x}{x^2}\int_e^x \frac{1}{\ln t}dt$ όταν το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. (Απ. 0)

γ) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $\Sigma(x) = \frac{\ln x}{x}\int_x^3 \frac{1}{\ln t}dt$ στο +∞. (Απ. -1)

22. Έστω φ άρτια και συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [-1, 1]. α) Να αποδειχθεί ότι $\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{1+e^t}dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$, β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} \frac{\eta\mu^2 t}{1+e^t}dt$.

23. Έστω η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = e^x + \lambda$ αν $x < 0$ και $\varphi(x) = 2x$ αν $x \geq 0$, όπου $\lambda \in R$ σταθερά.
α) Να δειχθεί ότι, αν $\lambda = 0$ η φ δεν έχει αρχική.
β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η φ έχει αρχική και να βρεθεί. (Απ. -1)

24*. Αν για την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση φ ισχύει $\varphi'(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι $\int_0^x \varphi(t)\,dt + \int_0^{\alpha+\beta-x} \varphi(t)\,dt \geq 2\int_0^{(\alpha+\beta)/2} \varphi(t)dt$ για κάθε $x \in R$.

25. Α. Έστω φ συνάρτηση γνησίως μονότονη με συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $[0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\alpha} \varphi(t)dt + \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\alpha)} \varphi^{-1}(t)dt = \alpha\varphi(\alpha) \text{ για κάθε } \alpha \in [0, +\infty).$$

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής;

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e \varphi^{-1}(t)dt$, όπου $\varphi(t) = te^t$.

* * *

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω φ συνάρτηση συνεχής στο R.
α) Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση

$$\varphi(\lambda) = \int_{\alpha}^{\lambda} (\varphi(x) - 1)dx + \int_{\beta}^{\lambda} (\varphi(x) - 1)dx ,\ \lambda \in [\alpha, \beta].$$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{\xi} \varphi(x)dx + \int_{\beta}^{\xi} \varphi(u)du + \alpha + \beta = 2\xi$.

2. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο R ώστε η συνάρτηση $g(x) = f(x)\int_x^0 f(t)dt$, $x \in R$ να είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

3. Α. Αν για ένα μιγαδικό z ισχύει $|z + i| + |z - i| = |z + 1| + |z - 1|$ να αποδείξετε ότι $|Re(z)| = |Im(z)|$
Β. Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$$\varphi(x) = \int_0^x t\eta\mu(x - t)dt ,\ x \in [0, 2\pi].$$

4. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_e^x \frac{t}{\ln t} dt$, $x \geq e$.
α) Να εξεταστεί η μονοτονία και η κυρτότητά της.
β) Να δειχθεί ότι $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.
γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες έχει λύση η εξίσωση $\lambda - F(x) = 0$, $x \geq e$.

5. α) Να βρεθεί μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με την ιδιότητα $xf'(x) = f(x) - 2x^3 + 6x^2 + \text{ë}$ και $f(-2) = 50 - \lambda$, όπου λ παράμετρος, $\lambda \in R$.
β) Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

6. Α. Έστω f μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης g στο R με g(0)=2011, f(0) = 2012. i) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη και να εξεταστεί αν έχει ακρότατα.
ii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της γ. π. της f στη θέση x = 0.

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t} dt$, $x \geq 0$.

α) Να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να δειχθεί ότι κάθε αρχική της f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.
γ) Να βρεθεί μια αρχική της f της οποίας η γ. π. να διέρχεται από το σημείο (0, 2011).
δ) Να βρεθεί το όριο της f στο $+\infty$ και το σύνολο τιμών της.

7. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \pi] = \Delta$

β) Να εξεταστεί ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση $F(x) = \int_x^\pi \frac{\eta\mu t}{t} dt$ $x \in (0,\pi]$

γ) Να δειχτεί ότι η F είναι γνησίως φθίνουσα.

8. Α* Αν $z \in C$, τότε $|z| = |z + 1| = 1$ αν και μόνο αν $z^2 + z + 1 = 0$.
Β. Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$$f(x) = \int_0^x t\eta\mu(x - t)dt .$$

9. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R. θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt , \ x \in R.$$

α) Να δειχτεί ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο R.
β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να δειχτεί ότι και η h είναι ομοίως μονότονη.
γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή να δειχτεί ότι η h είναι επίσης κυρτή συνάρτηση.

10. Έστω μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 1$ τέτοια ώστε $f(x + y) = f(x)e^{2y} + f(y)e^{2x}$ για κάθε $x, y \in R$. Να αποδειχτεί ότι:

α) $f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

β) $f'(x) = 2f(x) + e^{2x}$ και $f^{(3)}(x) = 8f(x) + 12e^{2x}$, $x \in R$.

γ) $f(x) = xe^{2x}$, $x \in R$.

11. Έστω συνάρτηση φ με την ιδιότητα $\varphi'(t) > \frac{1}{t}$ για κάθε $x > 0$.

α) Να εξεταστεί η μονοτονία της συνάρτησης $\gamma(t) = \varphi(t) - \ln t$, $t > 0$
β) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με $tf(t) > 1$ για κάθε $t > 0$. Να δειχθεί ότι η f δεν έχει αρχική στο διάστημα $[0, +\infty)$.

12. α) Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f'(\lambda) + \lambda = f(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in R$.
β) Να δειχτεί ότι μια από τις προηγούμενες συναρτήσεις είναι κοινή ασύμπτωτη (για $\lambda \to -\infty$) όλων των υπολοίπων.

13. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β].

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x \in [\alpha, \beta]$ με $F(\beta) = 0$.

Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in R$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = \lambda F(\xi)$.

β) Αν η f είναι επιπλέον παραγωγίσιμη, να δειχτεί ότι μεταξύ δυο ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $F'(x) = f'(x)$.

14. Έστω μια συνάρτηση φ παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\varphi(x) > 0$ και $\varphi''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Να βρείτε τα σημεία ξ του [α, β],στα οποία το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο (ξ, φ(ξ)) και τις ευθείες x = α, x = β, γίνεται ελάχιστο.

15. Έστω $\alpha > 0$ και φ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, α]. Ισχύουν

α) $\int_0^{\alpha} \varphi(u)du = \int_0^{\alpha} \varphi(u-\alpha)du$, β) $\int_0^{\alpha} \varphi(u)du = \int_0^{\alpha/2} \varphi(u-\alpha)du + \int_0^{\alpha/2} \varphi(u)du$,

γ) Αν $\varphi(\alpha - \chi) = \varphi(\chi)$ για κάθε $\chi \in [0, \alpha]$ να δείξετε ότι η ευθεία $\chi = \alpha/2$ είναι άξονας συμμετρίας της γ. π. της φ και ισχύει $\int_0^{\alpha} \varphi(u)du = 2\int_0^{\alpha/2} \varphi(u)du$.

16. Α. Αν η συνάρτηση φ(x) έχει αρχική, ενώ η f(x) δεν έχει, σ' ένα διάστημα Δ, να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις φ + f, φ – f, αf, $\alpha \in R^*$, δεν έχουν αρχική στο Δ.

Β.i) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης Φ, με

$$\Phi(x) = x^2 \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \text{ για } x \neq 0 \text{ και } \Phi(0) = 0.$$

ii) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = 2x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $\varphi(0)=0$ έχει αρχική

iii) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση Σ με $\Sigma(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$ έχει αρχική.

iv) Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f με $f(x) = 0$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ δεν έχει αρχική, να δειχθεί ότι και η συνάρτηση g με $g(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $g(0) = 1$ δεν έχει αρχική.

17. Έστω φ(χ) συνάρτηση ορισμένη στο διάσημα $[0, +\infty)$ με $\varphi(\chi)=1+\chi\ln\chi$, για $\chi>0$.

Α. Να βρεθεί η τιμή φ(0) ώστε η φ(χ) να είναι συνεχής

Β. Για την συνεχή πλέον συνάρτηση φ:

i) να βρεθεί μια αρχική της φ της οποίας η γ. π. να διέρχεται από το σημείο (1, ¾),

ii) να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{e} \varphi(\chi)d\chi$. (Απ. $e+e^2/4$)

18. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο R και έστω για κάποιο $\xi \in R$ ισχύει

$f(x) > \int_{\xi}^{x} f(t)dt$ για κάθε $x \in R$.

α) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\Sigma(x) = e^{-x} \cdot \int_{\xi}^{x} f(t)dt$, $x \in R$

β) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

19. Έστω φ συνάρτηση διπλά παραγωγίσιμη στο R με την ιδιότητα

$\varphi(t^3) - t^3 \leq \varphi(t) - t$ για κάθε $t \in R$. Να αποδειχθεί ότι

α) ότι οι εφαπτόμενες στην γ. π. της φ στις θέσεις -1, 0,1 είναι παράλληλες.

β) Η συνάρτηση φ'' έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα (-1, 1).

20*. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη στο R και συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
α) Αν η φ έχει αρχική, να δείξετε ότι τότε είναι συνεχής.
β) Αν τα πλευρικά όρια της φ στο 0 είναι πραγματικοί αριθμοί και διάφοροι μεταξύ τους, να δειχθεί ότι, ενώ η φ έχει αρχική σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, δεν έχει αρχική. (Υπ. de L' Hospital)

21. Έστω f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in R$ και $f(0) = 0$.

α. Να δεχθεί ότι $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$, β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$,

γ. Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt$, $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x\in R$.

δ. Δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (0, 1). (2005)

22. Α.Η εφαπτομένη στην γ.π. της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $\alpha>0$, $\alpha \neq 1$, στο σημείο Μ(ξ, φ(ξ)) τέμνει τον x-άξονα στο σημείο Σ. Να δειχθεί ότι η προβολή του ΜΣ στον x - άξονα έχει σταθερό μήκος. (Απ.$1/|\ln\alpha|$)

Β. . Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $x(t) = 2\sigma\upsilon\nu t - \frac{t^4}{12}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

23. Α. Έστω G συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β). Να αποδειχθεί ότι, $G'(x) + G(x) = 0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$, αν και μόνο αν υπάρχει $\kappa\in R$ με $G'(x) = \kappa e^{-x}$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$.
Β. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο R ώστε κάθε μια να είναι μια αρχική της άλλης και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Αν ο x-άξονας δεν εφάπτεται στην γ. π. της f, να αποδειχθεί ότι : i) Ο x-άξονας δεν εφάπτεται στην γ. π. της g,
ii) Η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα,
iii) Η συνάρτηση $\Sigma(x) = f^2(x) - g^2(x)$ είναι σταθερή, ενώ για την συνάρτηση $G(x) = f(x) - g(x)$ ισχύει $G'(x) = - G(x)$
iv) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f, g.

24. Α. Αν $z = 3 - t + i\sqrt{1-(2-t)^2}$, $1 \leq t < 3$, να δειχθεί ότι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z^2, z-1 είναι ομόρροπες

Β. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση φ με την ιδιότητα $\varphi(x) = \int_0^x 2te^{t^2+1-\varphi(t)}dt$ για κάθε $x\in R$.

25. α) Να αποδειχθεί ότι $2(t^2 - 1)\ln(1 + t) > t^2 - 2t$ για κάθε $t > 0$.
β*) Μια συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$ και μη αρνητική, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γ.π. της φ , τον x- άξονα και τις ευθείες x = 0, x = t > 0 είναι ίσο με $E(t) = \frac{1}{2}(t^2-1)\ln(1+t) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - t\right)$ για κάθε $t > 0$.

Να βρεθεί η συνάρτηση φ. (Απ. $t\ln(1+t)$)

26. Α. Αν z, ω μιγαδικοί ώστε ο αριθμός $\omega\bar{z}$ να είναι πραγματικός, να δείξετε ότι οι εικόνες των z, ω και η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου είναι σημεία συνευθειακά και αντίστροφα.
Β. Έστω $z \in C^*$ και ν θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $z_1 = \left(\frac{z}{|z|}+1\right)^{2\nu}$, $z_1 = \left(\frac{z}{|z|}-1\right)^{2\nu}$ είναι παράλληλες.

27. Α*. Έστω $\alpha \neq 0$. Με την βοήθεια του Θ. Rolle να δείξετε ότι, η μεν εξίσωση $(x+\alpha)^{2006} = x^{2006} + \alpha^{2006}$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$, η δε εξίσωση $(x+\alpha)^{2005} = x^{2005} + \alpha^{2005}$ έχει δυο ακριβώς ρίζες, τις $x = 0, -\alpha$. Δώσετε γενίκευση.
Β*. Αν φ συνεχής στο [0, 1] δείξετε ότι

$$\text{i) } \lim_{t\to+\infty}\int_0^1 x^t\varphi(x)dx = 0, \quad \text{ii) } \lim_{t\to+\infty}\int_0^1 x^t\left(\int_0^x \varphi(u)du\right)dx = 0.$$

28. Έστω $\alpha > 1$. α) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $x(t) = \alpha^t + \alpha^{1-t}$, $0 \le t \le 1$
β) Να δειχθεί ότι $\alpha^t + \alpha^{1-t} \ge 2\sqrt{\alpha}$, $0 \le t \le 1$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\frac{9}{4}\right)^{\eta\mu^2 x} + \left(\frac{9}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$, $x \in [0, \pi/2]$. (Απ. π/4)

29. Α. Αν $\varphi(\lambda) = \lambda^{10} + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 - 1$ και $\alpha + \beta < 0$ να δειχθεί ότι η γ.π. της φ τέμνει τον λ - άξονα σε δυο τουλάχιστον σημεία.
Β*. Έστω φ κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ με $\varphi(0) = 0$. Να αποδειχθεί ότι
α) $\varphi(x) < x\varphi'(x)$, $x>0$,
β) η συνάρτηση $g(x) = \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

30. Α. Έστω α, β, γ μιγαδικοί με $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Να δειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \gamma| \ge 3$.
Β. Έστω η παραβολή $\varphi(x) = x^2$ και $A(\alpha, \varphi(\alpha))$, $B(\beta, \varphi(\beta))$ δυο διαφορετικά σημεία της. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο, έστω $\Gamma(\xi, \varphi(\xi))$, της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΑΒ και ότι οι αριθμοί α, ξ, β αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

31. Α. Από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν τις εικόνες τους στην γ. π. της συνάρτησης $\varphi(x) = e^x$, $x \in R$, να βρεθεί αυτός που απέχει λιγότερο από τον μιγαδικό $\omega = 1$. Επίσης αυτός του οποίου η διανυσματική ακτίνα σχηματίζει την μικρότερη γωνία με τον ημιάξονα Οx. (Απ. i, 1+ei)
Β. α) Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x\ln x \ge x - 1$,
β) Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί με $\alpha + \beta + \gamma \ge 3$ τότε $\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma \ge 1$.

32*. α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^{x-1} = x$ έχει μοναδική λύση την x=1.
β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = 2e^{x-1} + 1$ για $x < \lambda$ και $\varphi(x) = e^{x-1} + 1 + x$ για $x \ge \lambda$, έχει αρχική αν και μόνο αν $\lambda = 1$.
γ) Να βρεθεί μια αρχική της φ της οποίας η γ. π. να διέρχεται από το σημείο (1, 2011).

....

ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΠΟ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΔΕΣΜΩΝ)

Τα θέματα που είχαν δοθεί παλαιότερα στις «δέσμες» Α΄ και Δ΄, μέχρι και το 2001, ήταν γενικά πιο δύσκολα από αυτά που τίθενται με το τωρινό σύστημα των «κατευθύνσεων». Ανάλογα με το επίπεδο της τάξης, τα χρονικά περιθώρια και τον βαθμό απορρόφησης της γνώσης και των δεξιοτήτων από τους μαθητές, ο Καθηγητής θα επιλέξει όσα κρίνει σκόπιμο για μια τελική επανάληψη, έχοντα πάντα κατά νου ότι οι μαθητές καλό να πάνε στις εξετάσεις προετοιμασμένοι τουλάχιστον, στο μέγιστο δυνατό βαθμό που επιτρέπει το σχολικό πρόγραμμα.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - e$ για $x<1$ και $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ για $x \geq 1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την C_f, τον x - άξονα και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

(Δ΄ 1991)

2. Α.Αν $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^\nu x dx$,ν = 1, 2… τότε, α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει

$I_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$ **,** β) Να υπολογίσετε το I_5.

Β. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία,
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από την C_f, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = 1$, $x = 4$. (Α΄ 1991)

3. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση P(x) με $P(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma$, $x \in R$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, η οποία να ικανοποιεί τις συνθήκες: α) η P(x) είναι περιττή, β) η P(x) παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x = 1$, γ) $\int_0^2 f(x)dx = 2$. (Δ΄ 1992)

4. Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$, $x > 0$.

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f,
β) Να μελετηθεί η ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $E(t) = \int_1^t (x-2)\ln x dx$, $t > 1$,

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{E'(t)}{t\ln t}$. (Δ΄ 1992)

5. α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο R έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.
β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα (-π/2, π/2) η οποία ικανοποιεί τη σχέση $g'(x)\sigma\upsilon\nu x + g(x)\eta\mu x = g(x)\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0) = 1992$. (Α΄ 1992)

6. Αν η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, e] με $0 < \varphi(x) < 1$ και $\varphi'(x) \geq 0$ για κάθε. $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $\varphi(x_0) + x_0\ln x_0 = x_0$. (Α΄ 1994)

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$, $x > 0$.

α) Να εξετάσετε την μονοτονία της, β) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$.

(Α΄ 1993)

8. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ Να αποδείξετε ότι η συ-νάρτηση $F(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)dt$, $x \in R$, α, β $\in R$ είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_0 \in R$ με $F'(x_0) = 0$ τότε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in R$. (Α΄ 1995)

9. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f(x), $x \in R$ για την οποία ισχύει

$$\int_\alpha^x e^{-t} f(t)dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} f(x) \text{ με } x, \alpha \in R$$ (Α΄ 1993)

10. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ αν και μόνο $Re(z_1 \bar{z}_2) = 0$.

β) Έστω φ(x), $x \in [\alpha, \beta]$ συνεχής συνάρτηση και οι μιγαδικοί αριθμοί $\zeta = \alpha^2 + i\varphi(\alpha)$, $\omega = \varphi(\beta) + i\beta^2$ με $\alpha\beta \neq 0$. Αν $|\omega|^2 + |\zeta|^2 = |\omega - \zeta|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση φ(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [α, β]. (Α΄ 1995)

11. Θεωρούμε τους α, $\beta \in R$, με $0<\alpha<\beta$ και την συνεχή συνάρτηση f(x), x > 0,για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και την συνάρτηση $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)dt$, x> 0.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν

α) η εφαπτομένη της γ. π. της g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον x-άξονα, β) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$. (Α΄ 1995)

12. Να βρείτε τη συνάρτηση f (x), $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν f(0) = 1995, f(′0) = 1 και

$$1 + \int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt.$$ (Α΄ 1995)

13. Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύουν α) ημx < 2x, β) $\eta\mu x > x - \dfrac{x^3}{3}$.

(Α΄ 1996)

14. Α. Έστω g συνεχής συνάρτηση στο R και $f(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt$, $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, όταν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γ. π. των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt{x}$, f(x) = 2x-1 και την ευθεία x = 0. (Δ΄ 1996)

15. Έστω f(t) η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά την χρονική στιγμή t, όπου $t \geq 0$, και f(x), $x \geq 0$ συνάρτηση με $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{\frac{-\sqrt{t}}{499}}$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το 1/16 του ρυθμού απορρόφησης κατά την χρονική στιγμή $t_0 = 0$. (Δ΄ 1996)

16. Α. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$\int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in R$.

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) + f(α+β-x) = c για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, όπου c σταθερός αριθμός. Να αποδείξετε ότι

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$. (Α΄ 1996)

Σημείωση: η συνθήκη f(x) + f(α + β - x) = c για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, είναι ικανή και αναγκαία για να έχει η γ. π. της f κέντρο συμμετρίας με τετμημένη το μέσο του διαστήματος [α, β]. Έτσι υπάρχει και γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης.

17. Έστω g συνάρτηση διπλά παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε g(x) > 0 και $g''(x)g(x) - (g'(x))^2 > 0$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι

α) η συνάρτηση g'/g είναι γνησίως αύξουσα,

β*) Ισχύει $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in R$. (Α΄ 1997)

18. Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο R τέτοια ώστε $f(x) \ge 2$ για κάθε $x \in R$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $x \in R$. Να αποδειχθεί ότι

α) g(-3)g(0) < 0,

β) Η εξίσωση g(x) = 0 έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (-3, 0). (Δ΄ 1997)

19.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση φ(x) > 0, x > 0, για την οποία ισχύει $\varphi'(x) + 2x\varphi(x) = 0$, για κάθε x > 0 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, 1). α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της φ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε την συνάρτηση φ.

β) Να δείξετε ότι $\frac{x-1}{2x^2}\varphi(x) < \int_1^x \frac{\varphi(t)dt}{2t^2} < \frac{x-1}{2}$, x > 1.

γ) Να βρείτε την συνάρτηση $\Phi(x) = \int_1^x (1 + \frac{1}{2t^2})\varphi(t)dt$, x > 1.

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt < 1$ για κάθε x > 1. (Α΄ 1998)

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$.

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t)dt$,

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{t/x^2}dt$, x > 0.

i) να δειχθεί ότι $e^{1/x^2} \le e^{t/x^2} \le e^{4/x^2}$ για κάθε $x \in [1, 4]$,

ii) να υπολογιστεί το $\lim_{x \to +\infty} g(x)$. (Α΄ 1999)

21. Έστω f συνεχής στο R. α) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(u)du$.

β) Έστω ότι $4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(u)du + 2004$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (1, 7)$ τέτοιο ώστε f(ξ) = 334. (Δ΄ 2000)

22. Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση f(x), x∈R με την ιδιότητα

$\int_0^x (1+t^2)f(t)dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)dt$, x∈R. α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$, x∈R,

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γ.π. της f στο σημείο Α(0, f(0)).
(Δ΄ 2000)

23. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$I(x) = \int_0^1 [(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4]dt$, x∈R παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

$x_0 = 5\int_0^1 t^2 f(t)dt$. (Α΄ 2000)

24. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε να υπάρχει α∈R με $g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha$, για κάθε x, y∈R.
Να αποδείξετε ότι α) α = g(0) = 0, β) $g'(x) = g(x) + e^x g'(0) + x$ για κάθε x∈R.
(και προαιρετικά ...ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση!) (Α΄ 1997)

25. Έστω συνάρτηση φ παραγωγίσιμη στο R με φ′(0) =1 ώστε

$\int_0^x \varphi(t)dt \ge xe^{-x}$ για κάθε x∈R Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γ.π. της φ στο σημείο Α(0, φ(0)). (Α΄ 2001)

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, x > 0. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x-άξονα.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x-άξονα και την ευθεία $x = x_0$ όπου x_0 η θέση του τοπικού ακρότατου της f.
(Α΄ 2001)

27. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, x ≠ 2. Να βρεθούν οι τιμές των α, β για τις οποίες η ευθεία y = 2x-1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞. (Δ΄ 2001)

28. Α. Η συνάρτηση f(x), x∈R έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$\int_\alpha^\beta f'(x)e^{f(x)}dx = 0$, α < β, α, β∈R. Να αποδείξετε ότι

i) f(α) = f(β), ii) Η εξίσωση f ′(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x + \dfrac{4}{x}$, x > 0. α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x-άξονα και τις ευθείες x = λ, x = λ+1, λ>0 είναι ίσο με $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln(1 + \dfrac{1}{\lambda})$,

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το Ε(λ) γίνεται ελάχιστο.
(Απ.λ=1, Δ΄ 2001)

29*. Έστω η συνάρτηση f(x) = 2000 + |ln(x-1)|, x > 1 και c > 2000. Έστω ότι η C_f και ευθεία y = c τέμνονται σε δυο διαφορετικά σημεία του επιπέδου Α, Β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία Α, Β είναι κάθετες μεταξύ τους.
(Α΄ 2000) .-

* * * * *