ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
(Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.)

Ευκλείδη "Στοιχεία"

**Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή
επεξηγήσεις και σχολιασμό**

ΤΟΜΟΣ ΙΙΙ

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Βιβλία XI, XII, XIII

Αθήνα 2001

ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
(Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.)

Ευκλείδη “Στοιχεία”

Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή
επεξηγήσεις και σχολιασμό

ΤΟΜΟΣ III

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Βιβλία XI, XII, XIII

Αθήνα 2001

Στον Έλληνα μαθηματικό

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ

Επιστημονικός Υπεύθυνος
***Καθηγητής* Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος**
Υπεύθυνος έργου
***Επίκουρος Καθηγητής* Βαγγέλης Ντζιαχρήστος**

Την εισαγωγή έγραψε ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. **Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος**.

Συγγραφικές Ομάδες

1η Ομάδα: Είχε την επιμέλεια κυρίως των κεφαλαίων 1, 2, 3 και 4 του τόμου Ι

- **Βαγγέλης Ντζιαχρήστος**, *Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών*
- **Δημήτριος Κοντογιάννης**, *Διδάκτορας Μαθηματικών, Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
- **Τασούλα Τσιγώνη**, *Καθηγήτρια Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.*

2η Ομάδα: Είχε την επιμέλεια κυρίως των κεφαλαίων 5 και 6 του τόμου Ι

- **Ανάργυρος Φελούρης**, *Επίκουρος Καθηγητής του ΕΜΠ*
- **Χρήστος Στατεράς**, *Διδάκτορας Μαθηματικών, Σχολικός Σύμβουλος*
- **Στέφανος Μέτης,** *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Ιορδάνης Χριστοδούλου**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

3η Ομάδα: Επιμελήθηκε κυρίως τον τόμο ΙΙ

- **Γεώργιος Δημάκος**, *Λέκτορας του Πανεπιστημίου Αθηνών*
- **Παναγιώτης Βλάμος**, *Διδάκτορας Μαθηματικών*
- **Γεώργιος Μπαραλής**, *Διδάκτορας Μαθηματικών, καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Αντώνιος Δούναβης**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

4η Ομάδα: Επιμελήθηκε κυρίως τον τόμο ΙΙΙ

- **Διονύσιος Λάππας**, *Επίκουρος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών*
- **Κυριάκος Καμπούκος**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Δημήτριος Λιουδάκης**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*
- **Γεώργιος Τασσόπουλος**, *Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*

Κάθε ομάδα είχε την κύρια ευθύνη για το τμήμα του έργου που αναφέρεται παραπάνω. Όμως όλες οι ομάδες εργάστηκαν για ολόκληρο το έργο, είχαν συχνές συναντήσεις, συνεργασίες και ανταλλαγές απόψεων για τη διαμόρφωση των κειμένων, καθώς και για την τελική μορφή που πήρε το έργο.

Φιλολογική επιμέλεια: Καλλιόπη-Άννα Χατζησταυρινού
Επιμέλεια σχημάτων: Νικόλαος Ζαράνης
Επιμέλεια σελιδοποίησης: Καίτη Αλεξοπούλου

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΒΙΒΛΙΑ XI, XII, XIII

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η πρώτη αναφορά στην ανάγκη για αυτοτελή ανάπτυξη και θεμελίωση της Γεωμετρίας του Χώρου ανάγεται σε εποχές προγενέστερες της συγγραφής των *Στοιχείων*. Στην *"Πολιτεία"* του Πλάτωνα (528b) υπάρχουν τέτοιες αναφορές. Στο εδάφιο αυτό, σε ελεύθερη απόδοση, αναφέρονται χαρακτηριστικά τα εξής:

"*Το λάθος οφείλεται στο ότι μετά από το επίπεδο μεταβήκαμε σε ένα στερεό που πλέον εκτελεί περιφορά, χωρίς προηγουμένως να μελετήσουμε το στερεό στην καθ' αυτό ουσία του. Το σωστό όμως είναι μετά από τη δεύτερη να μελετήσουμε την (αυξημένη) τρίτη διάσταση. Κάτι τέτοιο, νομίζω, βρίσκεται με την αύξηση στους κύβους και σε κάθε σχήμα που έχει βάθος.*

- *Αυτά είναι σωστά. Όμως, Σωκράτη, νομίζω ότι στην επιστήμη αυτή δεν έχουν γίνει ακόμα ανακαλύψεις.*
- *Μπορεί να εξηγηθεί και αυτό. Οφείλεται σε δύο αφορμές. Παρόλο που η έρευνα στις σπουδές αυτές είναι κοπιώδης, δεν καταβάλλονται μεγάλες προσπάθειες για νέες ανακαλύψεις, επειδή αυτές οι σπουδές δε χαίρουν εκτίμησης σε καμιά πόλη. Απαιτείται λοιπόν κάποιος που να καθοδηγεί τους ερευνητές, αλλιώς αυτοί δε θα μπορέσουν να προωθήσουν τις έρευνές τους. Είναι όμως κατ' αρχήν δύσκολο να βρεθεί ένας τέτοιος οδηγός και ύστερα, στις συνθήκες που τώρα επικρατούν, ακόμα και αν παρουσιασθεί κάποιος, δεν είναι δυνατόν να εισακουσθεί από τους ερευνητές που ασχολούνται με αυτά τα προβλήματα, αφού είναι κενόδοξοι. Όμως, αν η πόλη εκτιμήσει τις σπουδές αυτές και αναλάβει την εποπτεία τους, τότε και οι ερευνητές θα προθυμοποιηθούν να εισακούσουν τον οδηγό και θα γίνουν έντονες αναζητήσεις, που θα αποκαλύψουν τις σχέσεις οι οποίες αφορούν σε αυτά τα αντικείμενα. Ακόμα και τώρα, παρά το ότι πολλοί κατασυκοφαντούν και υποβαθμίζουν τις σπουδές αυτές και οι ίδιοι οι ερευνητές δεν υπερασπίζονται τη χρησιμότητά τους, παρόλα αυτά τα εμπόδια, οι σπουδές αυτές ευδοκιμούν, γιατί τέρπουν και φυσικά κάποτε οι ανακαλύψεις που τώρα γίνονται θα δημοσιοποιηθούν*".

Η κορύφωση όμως της ανάπτυξης της Γεωμετρίας του Χώρου συνέπεσε με την μεγαλοφυΐα του Αρχιμήδη και τις αξεπέραστες μεθόδους που εφάρμοσε στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων, μεθόδους που συγκρίνονται σε αυστηρότητα μόνο με το σύγχρονο Απειροστικό Λογισμό.

Για τη μελέτη ιδιοτήτων στερεών σωμάτων φημίζεται και ο Δημόκριτος. Όπως σαφώς αναφέρεται από τον Αρχιμήδη (στην εισαγωγή της *"Μεθόδου"* του), ο Δημόκριτος ανακάλυψε τη σχέση μεταξύ των όγκων πυραμίδας και πρίσματος.

Τα προβλήματα που ανακύπτουν κατά τη μετάβαση από το επίπεδο στο χώρο φαίνεται να ήταν αντικείμενο εκτενών συζητήσεων κατά την αρχαιότητα, όπως προκύπτει και από το εξής χωρίο του Πλούταρχου, το σχετικό με τις ανακαλύψεις του Δημόκριτου:

> *"Αν σε έναν κώνο, οι κυκλικές τομές που χαράσσονται παράλληλα προς τη βάση του είναι ίσες, πώς είναι τότε δυνατόν ο κώνος να διαφέρει από τον κύλινδρο; Και αν, όσο ανερχόμαστε προς την κορυφή του κώνου, οι τομές αυτές όλο και μικραίνουν, δε θα πρέπει τότε η επιφάνεια του κώνου να φαίνεται κλιμακωτή, ενώ η ίδια είναι λεία;"*

Τα βιβλία XI, XII και XIII των *Στοιχείων* αναφέρονται σε σχήματα του χώρου, διαπραγματεύονται δηλαδή αυτό που σήμερα λέμε **Στερεομετρία**.

Τα τρία αυτά βιβλία λαμβάνονται ως μια ενότητα, κάτι που έχει ήδη συμβεί και με τα αντίστοιχα "Αριθμητικά" βιβλία. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, οι ορισμοί και για τα τρία βιβλία τίθενται στην αρχή του βιβλίου XI. Το περιεχόμενο είναι διαρθρωμένο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε βιβλίο να στοχεύει σε συγκεκριμένα, μεθοδολογικά διακριτά, αποτελέσματα. Έτσι, το βιβλίο XI αφ' ενός λειτουργεί ως συλλογή βασικών προτάσεων που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα και αφετέρου παρουσιάζει τη σύγκριση των παραλληλεπιπέδων. Στο βιβλίο XII γίνεται συστηματική χρήση της *"μεθόδου της εξάντλησης"* στη σύγκριση επίπεδων και στερεών σχημάτων. Τέλος, στο βιβλίο XIII τα πέντε κανονικά στερεά κατασκευάζονται και εγγράφονται σε σφαίρα.

Στα τρία αυτά βιβλία υπάρχουν 28 ορισμοί και 75 προτάσεις. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει οι ορισμοί περιέχονται όλοι στο βιβλίο XI, ενώ οι προτάσεις κατανέμονται ως εξής: Υπάρχουν 39 προτάσεις στο βιβλίο XI και από 18 προτάσεις σε καθένα από τα επόμενα βιβλία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

ΒΙΒΛΙΟ XI

Η Γεωμετρία στο χώρο

1. Εισαγωγή

Το Βιβλίο XI αποτελείται από 39 προτάσεις, οι οποίες μπορούν να ταξινομηθούν ώστε να αποτελέσουν τρία ευδιάκριτα μέρη.

Το πρώτο μέρος, προτάσεις 1 μέχρι 19, διαπραγματεύεται τα πρωταρχικά στοιχεία του χώρου και τις μεταξύ τους σχέσεις. Οι προτάσεις αυτές συγκροτούν το θεωρητικό υπόβαθρο για τη μετάβαση από το επίπεδο στο χώρο.

Το δεύτερο μέρος, προτάσεις 20 μέχρι 27, μελετά τις τρίεδρες στερεές γωνίες, σε αντιστοιχία προς τα τρίγωνα, και τις εφαρμογές τους σε κάποιες κατασκευές.

Στο τρίτο μέρος, προτάσεις 28 μέχρι 39, παρουσιάζεται η συνθετική θεωρία του όγκου, η οποία και εφαρμόζεται στη σύγκριση παραλληλεπιπέδων.

Η τακτική που ακολουθείται στις αποδείξεις για τα δύο πρώτα μέρη του κεφαλαίου αυτού, είναι η αναγωγή κάθε προβλήματος σε επίπεδα σχήματα και μετά η χρήση δεδομένων της Επιπεδομετρίας που έχουν ήδη κατοχυρωθεί, σε τελική ανάλυση δηλαδή η χρήση της ισότητας των τριγώνων. Αυτό πιθανώς να αποτελεί και μια δικαιολογία για την απουσία διατύπωσης κριτηρίων ισότητας για τα στερεά σχήματα που αντιστοιχούν στα τρίγωνα, δηλαδή τα τριγωνικά πρίσματα και τα τετράεδρα, γεγονός που έχει έντονα σχολιασθεί από τους σύγχρονους μελετητές.

Μια τέτοια προσπάθεια σήμερα προϋποθέτει συστηματική ανάπτυξη των σχέσεων ευθειών και επιπέδων στο χώρο, κάτι που διεκπεραιώνεται αποδεκτά στις σύγχρονες θεμελιώσεις.

Παραβάλλοντας την ανάπτυξη του βιβλίου XI με τα βιβλία I μέχρι IV της Επιπεδομετρίας, παρατηρούμε ότι εδώ δε γίνεται προσπάθεια καθορισμού του κατά πόσο ένα αποτέλεσμα εξαρτάται ή όχι από τη θεωρία των αναλογιών. Σ’ αυτά τα πλαίσια λείπει και η μελέτη των ιδιοτήτων της σφαίρας, σε αντίθεση με την επαρκή ανάπτυξη των ιδιοτήτων του κύκλου στην Επιπεδομετρία. Ο Mueller παρατηρεί ότι αυτό πιθανώς να οφείλεται στην έλλειψη επαρκούς θεμελίωσης των *"ιδιοτήτων θέσης"* των στερεών σχημάτων γενικά, αφού η σφαίρα είχε εξαντλητικά χρησιμοποιηθεί σε αστρονομικά θέματα.

Από σύγχρονους μελετητές εκφράζεται η άποψη ότι το πρώτο μέρος του βιβλίου XI αναπτύσσεται σε αντιστοιχία, ακόμα και κατά την αρίθμηση, με ορισμένες ενότητες του βιβλίου I (μέχρι την $29^{η}$ πρόταση). Βέβαια, αυτή η αντιστοιχία υπόκειται σε σημαντικές διαφορές ως προς το περιεχόμενο, όπως:

- Την πλήρη απουσία ρητά εκφρασμένων αξιωμάτων για τα στοιχεία που συγκροτούν τον χώρο.
- Τη μη αναφορά σε κριτήρια ισότητας.
- Τη μη λεπτομερή αναφορά της παραλληλίας στο χώρο με τόση λεπτομέρεια, όση στο βιβλίο I.

Σχετικά με τις αντιστοιχίες αρίθμησης, πιο πιστά τηρούνται αυτές των προτάσεων 11, 12, 20, 22 και 23.

2. Ορισμοί

1. ***Στερεό είναι αυτό που έχει μήκος και πλάτος και βάθος.***

2. ***Το πέρας στερεού είναι επιφάνεια.***

3. ***Ευθεία είναι κάθετη προς επίπεδο, όταν σχηματίζει ορθές γωνίες με κάθε ευθεία του επιπέδου που συναντά.***

4. ***Επίπεδο είναι κάθετο προς επίπεδο, όταν ευθείες του ενός επιπέδου που άγονται κάθετα προς την κοινή τους τομή, είναι κάθετες και προς το άλλο επίπεδο.***

5. ***Κλίση ευθείας προς επίπεδο είναι η γωνία που περιέχεται από την ευθεία και από εκείνη την ευθεία που προκύπτει ως εξής: συνδέει τον πόδα της κάθετης προς το επίπεδο, που άγεται από το ένα πέρας της (αρχικά δεδομένης) ευθείας και το πέρας που δημιουργείται ως τομή της με το επίπεδο.***

6. ***Κλίση επιπέδου προς επίπεδο είναι η οξεία γωνία η οποία περιέχεται από ευθείες που βρίσκονται πάνω σε κάθε ένα από τα επίπεδα και άγονται κάθετα προς την κοινή τομή των επιπέδων και στο ίδιο σημείο της.***

7. ***Ζεύγος επιπέδων θα είναι όμοια κεκλιμένο όπως ένα άλλο ζεύγος, όταν οι αντίστοιχες κλίσεις είναι μεταξύ τους ίσες.***

8. ***Παράλληλα επίπεδα είναι αυτά τα οποία δε συναντώνται.***

9. ***Όμοια στερεά σχήματα είναι αυτά που περιέχονται από ίσα στο πλήθος όμοια επίπεδα (σχήματα).***

10. ***Ίσα και όμοια στερεά σχήματα είναι αυτά που περιέχονται από ίσα στο πλήθος και το μέγεθος όμοια επίπεδα (σχήματα).***

11. ***Στερεά γωνία είναι η σύγκλιση η οποία δημιουργείται όταν συντρέχουν περισσότερες από δύο γραμμές, οι οποίες δε βρίσκονται στην ίδια επιφάνεια. Αλλιώς, στερεά είναι η γωνία που περιέχεται σε περισσότερες από δύο επίπεδες γωνίες, οι οποίες δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και συντρέχουν στο ίδιο σημείο.***

12. ***Πυραμίδα είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται από επίπεδα, τα οποία ξεκινούν από ένα επίπεδο και καταλήγουν σε ένα σημείο.***

13. ***Πρίσμα είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται από επίπεδα σχήματα, εκ των οποίων τα μεν δύο απέναντι είναι ίσα, όμοια και παράλληλα, ενώ τα υπόλοιπα είναι παραλληλόγραμμα.***

14. ***Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που δημιουργείται όταν, ενώ η διάμετρος ενός ημικυκλίου παραμένει ακίνητη, το ημικύκλιο περιστρέφεται και επανέρχεται στη θέση από όπου άρχισε την περιστροφή.***

15. ***Άξονας της σφαίρας είναι η ευθεία που παραμένει ακίνητη και περί την οποία στρέφεται το ημικύκλιο.***

16. ***Το κέντρο της σφαίρας είναι το ίδιο με αυτό του ημικυκλίου.***

17. ***Διάμετρος της σφαίρας είναι μια ευθεία που άγεται δια του κέντρου (της σφαίρας) και έχει τα άκρα της στην επιφάνεια της σφαίρας.***

18. ***Κώνος είναι το στερεό σχήμα που δημιουργείται όταν, ενώ η μια κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου παραμένει ακίνητη, το τρίγωνο περιστρέφεται και επανέρχεται στη θέση από όπου άρχισε την περιστροφή.***

19. ***Άξονας του κώνου είναι η ευθεία που παραμένει ακίνητη και περί την οποία στρέφεται το τρίγωνο.***

20. ***Βάση του κώνου είναι ο κύκλος που διαγράφεται από την περιστρεφόμενη ευθεία.***

21. ***Κύλινδρος είναι το στερεό σχήμα που δημιουργείται όταν, ενώ η μια κάθετη πλευρά ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου παραμένει ακίνητη, το παραλληλόγραμμο περιστρέφεται και επανέρχεται στη θέση από όπου άρχισε την περιστροφή.***

22. ***Άξονας του κυλίνδρου είναι η ευθεία που παραμένει ακίνητη και περί την οποία στρέφεται το παραλληλόγραμμο.***

23. ***Βάσεις του κυλίνδρου είναι οι κύκλοι που δημιουργούνται από τις δύο περιστρεφόμενες απέναντι πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.***

24. ***Δύο κώνοι (ή κύλινδροι) είναι όμοιοι όταν, τόσο οι διάμετροι των βάσεων όσο και οι άξονές τους είναι ανάλογοι.***

25. ***Κύβος είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται από έξι ίσα τετράγωνα.***

26. ***Οκτάεδρο είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται από οκτώ ίσα και ισόπλευρα τρίγωνα.***

27. ***Εικοσάεδρο είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται από είκοσι ίσα και ισόπλευρα τρίγωνα.***

28. ***Δωδεκάεδρο είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται από δώδεκα ίσα, ισόπλευρα και ισογώνια πεντάγωνα.***

Σχόλια στους ορισμούς

Οι δύο πρώτοι ορισμοί προσδιορίζουν την έννοια του στερεού σώματος κατά τρόπο πράγματι αξιοθαύμαστο και συμπαγή, ενσωματώνοντας περιγραφές διάσπαρτες και ανιχνεύσιμες ακόμα και σήμερα σε κλασικά κείμενα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Ένα γεγονός που αξίζει να επισημανθεί είναι η αποφυγή χρήσης της (αριστοτελικής προέλευσης) έννοιας *"διάσταση"*, κάτι που δεν ακολουθείται από τους μεταγενέστερους Ήρωνα και Θέωνα τον Σμυρναίο. Επιπλέον, η χρήση του *πέρατος* (συνόρου) ως επιπρόσθετης προσδιοριστικής ιδιότητας των εννοιών *γραμμή*, *επιφάνεια*, *στερεό*, υποκρύπτει μια προσπάθεια "επαγωγικού" καθορισμού ιδιοτήτων γεωμετρικών αντικειμένων και αφετέρου, σύμφωνα με όσα έχει εισηγηθεί ο καθηγητής Σ. Π. Ζερβός, μια σαφή τοπολογική χροιά στην αντίληψη των γεωμετρικών ορισμών.

Οι ορισμοί 3 και 4, που αναφέρονται στην καθετότητα ευθειών και επιπέδων στο χώρο, διατυπώνονται με σχεδόν σύγχρονη ορολογία. Στους ορισμούς 5 και 7 επιχειρείται γενικότερα να περιγραφεί αυτό που σήμερα θα λέγαμε *"γωνία ευθείας και επιπέδου"* ή *"γωνία δύο επιπέδων"*. Για το σκοπό αυτό εισάγεται ο όρος *"κλίση"*, στον ορισμό 5, περιγράφεται η διαδικασία προβολής και μέσω αυτής ανάγεται η *"κλίση"* σε γωνίες. Ο ορισμός 6 οδηγεί σε αυτό που σήμερα χρησιμοποιείται ως *"δίεδρος γωνία"* και, όπως απέδειξε ο Legendre, επιδέχεται χειρισμό μεγέθους (όπως οι γωνίες).

Οι ορισμοί 9 και 10 αφορούν στην ισότητα και ομοιότητα στο χώρο και είναι οι πιο σχολιασμένοι και αμφισβητήσιμοι. Η πρώτη ένσταση που θα μπορούσε να γίνει είναι ότι, αφού η ισότητα ορίζεται στην αρχή του βιβλίου Ι με τη διαδικασία της εναπόθεσης και σύμπτωσης (ενιαία για όλα τα σχήματα), η ισότητα στο χώρο ειδικότερα θα πρέπει να προκύπτει. Δηλαδή, ότι οι ορισμοί 9 και 10 θα έπρεπε να είναι θεωρήματα. Εξάλλου, η μορφή της διατύπωσης αυτών των ορισμών ανάγει τον έλεγχο της ομοιότητας (ή ισότητας) των στερεών στην ομοιότητα (ή ισότητα) επίπεδων σχημάτων και έτσι φαίνεται να επέχουν θέση κριτηρίων. Πράγματι, αν περιοριστούμε σε κυρτά πολύεδρα, όπως απέδειξε ο Cauchy, είναι κριτήρια, δηλαδή ένα κυρτό πολύεδρο καθορίζεται πλήρως από τις έδρες του.

Ο ορισμός 11 εισάγει την έννοια της στερεάς γωνίας με δύο τρόπους, που ο κάθε ένας από αυτούς σηματοδοτεί μια διαφορετική άποψη. Πρώτα χρησιμοποιείται ο όρος *"κλίση"* που παραπέμπει στην περιγραφή μιας στερεάς γωνίας ως συστήματος διέδρων γωνιών με κοινή κορυφή. Στην εναλλακτική διατύπωση χρησιμοποιείται πλατωνική ορολογία (από τον *"Τίμαιο"*), όπως υποδηλώνει η χρήση της λέξης *"συνισταμένων"* και εννοείται η στερεά γωνία ως αποτελούμενη από επίπεδες γωνίες. Στο κείμενο που ακολουθεί παρουσιάζονται μόνον τρίεδρες στερεές γωνίες και όπως μπορεί να αποδειχθεί, ειδικά για τις τρίεδρες, οι δύο απόψεις είναι ισοδύναμες.

Στους υπόλοιπους ορισμούς (12 έως και 28) εισάγονται και περιγράφονται συγκεκριμένα στερεά σχήματα που θα παρουσιασθούν στο κυρίως κείμενο, με θαυμαστή οικονομία στη παρουσίαση. Τα στερεά αυτά, ομαδοποιούνται ως εξής: πυραμίδα – πρίσμα, σφαίρα – κύλινδρος– κώνος και τέλος τα Πλατωνικά Στερεά. Το ενδιαφέρον στοιχείο εδώ είναι ότι κυρίως για τη σφαίρα (και δευτερευόντως για τον κύλινδρο και τον κώνο) επιλέγεται η παρουσίαση ως στερεών εκ περιστροφής (δηλαδή δια της γενέσεως) και όχι η περιγραφή μέσω ιδιότητας, όπως γίνεται για τον κύκλο (:σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση από σημείο). Ειδικά στους ορισμούς που αναφέρονται σ’ αυτά τα τρία στερεά και τα στοιχεία που τα συγκροτούν, υπάρχει ένα βασικό μοτίβο, το οποίο κατά περίπτωση συμπληρώνεται με μικρές παραλλαγές για να φτάσουμε στο τελικό κείμενο.

3. Παραλληλία και καθετότητα στο χώρο

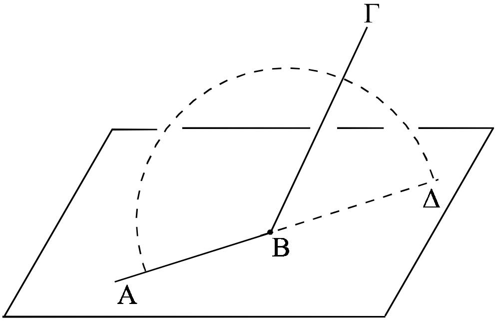
Πρόταση 1 (XI. 1)

Δεν είναι δυνατόν ένα μέρος μιας ευθείας γραμμής να βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδό της και ένα άλλο μέρος της να μεταιωρείται.

Απόδειξη

Έστω ότι το μέρος ΑΒ της ευθείας ΑΒΓ βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο που διέρχεται από αυτό, ενώ το μέρος ΒΓ δεν ανήκει σ' αυτό το επίπεδο.

Για το μέρος ΑΒ της ευθείας θα υπάρχει συνεχής προέκταση ΒΔ, η οποία θα ανήκει στο εν λόγω επίπεδο. Έτσι, το μέρος ΑΒ αποτελεί κοινό τμήμα των ευθειών ΑΒΓ και ΑΒΔ.



Σχήμα 1

Τότε όμως, με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα το κοινό τμήμα ΑΒ είναι δυνατόν να γράψουμε κύκλο, στον οποίο δύο διάμετροι που βρίσκονται πάνω στις ευθείες ΑΒΓ και ΑΒΔ προσδιορίζουν δύο άνισα τόξα.

Αυτό είναι αδύνατο και συνεπώς δεν υπάρχει μέρος ΒΓ της ευθείας ΑΒΓ που βρίσκεται εκτός επιπέδου που περιέχει το ΑΒ.

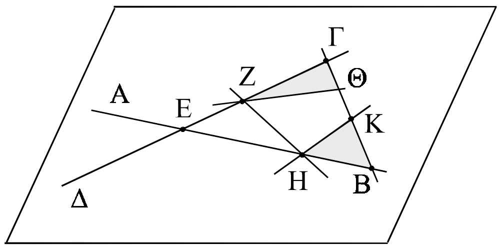
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 2 (XI. 2)

Εάν δυο ευθείες τέμνονται, κείνται επί ενός επιπέδου και κάθε τρίγωνο κείται επί ενός επιπέδου.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο Ε. Παίρνουμε πάνω στις ΕΓ και ΕΒ τυχαία τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, και φέρουμε τις ΖΗ και ΒΓ. Επίσης πάνω στη ΒΓ παίρνουμε τα τυχαία σημεία Θ και Κ, ενώ φέρουμε τις ΖΘ και ΗΚ. Θα αποδειχθεί πρώτα ότι το τρίγωνο ΕΒΓ κείται επί ενός επιπέδου.



Σχήμα 2

Εάν στο τρίγωνο ΕΒΓ το μέρος ΖΘΓ ή το ΗΒΚ κείται πάνω στο ίδιο επίπεδο, ενώ το υπόλοιπο πάνω σε άλλο επίπεδο, τότε θα κείται μέρος καθεμιάς των ευθειών ΕΓ και ΕΒ πάνω στο δοθέν επίπεδο, ενώ ένα μέρος τους πάνω σε άλλο επίπεδο.

Επίσης, εάν στο τρίγωνο ΕΒΓ το μέρος ΖΓΒΗ βρίσκεται πάνω στο δοθέν επίπεδο, ενώ το υπόλοιπο πάνω σε άλλο, θα είναι μέρος και των ευθειών ΕΓ και ΕΒ πάνω στο δοθέν επίπεδο, ενώ μέρος τους θα είναι πάνω σε άλλο επίπεδο, πράγμα που είναι άτοπο (πρόταση 1).

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το τρίγωνο ΕΓΒ κείται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Σ’ αυτό το επίπεδο που ορίζεται από το τρίγωνο ΕΒΓ, βρίσκονται οι ΕΒ και ΕΓ και συνεπώς οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ, όπως και κάθε τρίγωνο των ευθειών ΑΒ και ΓΔ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που αυτές ορίζουν.

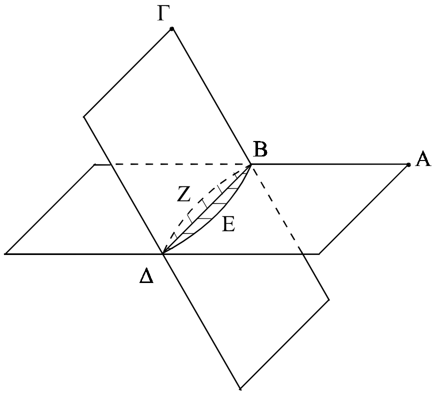
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 3 (XI. 3)

Εάν δύο επίπεδα τέμνονται, τότε η κοινή τομή τους είναι ευθεία.

Απόδειξη

Έστω ότι τα δύο επίπεδα (ΒΔΑ) και (ΒΔΓ) τέμνονται και η κοινή τομή τους είναι η γραμμή ΒΔ. Θα αποδειχθεί ότι η ΒΔ είναι ευθεία.



Σχήμα 3

Έστω ότι η ΒΔ δεν είναι ευθεία. Φέρουμε πάνω στο επίπεδο (ΒΔΑ) την ευθεία ΒΕΔ και πάνω στο επίπεδο (ΒΔΓ) την ευθεία ΒΖΔ. Οι δύο ευθείες έχουν κοινά πέρατα και συνεπώς θα περιέχουν μια επιφάνεια, πράγμα άτοπο, αφού τότε δε θα είναι ευθείες.

Έτσι προκύπτει ότι δεν υπάρχει κάποια άλλη ευθεία που να διέρχεται από τα Β και Δ, παρά μόνο η κοινή τομή των δύο επιπέδων, που είναι η ευθεία ΒΔ.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Τα λογικά βήματα της αποδεικτικής διαδικασίας αποδίδονται ως εξής:

Έστω ότι η γραμμή ΔΒ είναι η κοινή τομή των δύο επιπέδων. (ΒΔΑ) και (ΒΔΓ).

Εάν η ΔΒ δεν είναι ευθεία, τότε ορίζεται στο επίπεδο (ΒΔΑ) μια ευθεία, η ΒΕΔ , και στο επίπεδο (ΒΔΓ) μία ευθεία, η ΒΖΔ.

Έτσι θα έχουμε δύο ευθείες με δύο κοινά σημεία, που ορίζουν μεταξύ τους μία επιφάνεια. Αυτό είναι άτοπο.

Σχόλια στις προτάσεις 1—3

Οι τρεις πρώτες προτάσεις που επιλέγονται για την αρχική μετάβαση στο χώρο, επέχουν ρόλο αξιωμάτων στις διάφορες σύγχρονες παρουσιάσεις θεμελίωσης της Στερεομετρίας. Στις προτάσεις αυτές, η νοητικά γνωστή από την Επιπεδομετρία *"σημειακή"* φύση της ευθείας, χρησιμοποιείται αρχικά για να προσδιορισθεί η φυσιογνωμία του *"επιπέδου"* ως επιφάνειας, που διέρχεται δι' αυτής.

Οι δύο τεμνόμενες ευθείες καθορίζουν στο χώρο τη θέση ενός μοναδικού επιπέδου, όπως τα δύο σημεία καθορίζουν στο επίπεδο τη θέση μιας μοναδικής ευθείας. Με την ίδια αντίληψη, όπως το σημείο περνά στο "διαισθητικό" χώρο ως τομή δύο ευθειών, έτσι και η ευθεία παρουσιάζεται ως τομή δύο επιπέδων.

Γενικά, οι έννοιες του *σημείου,* της *ευθείας* και του *επιπέδου* περνούν στο "διαισθητικό" χώρο, αφού πρώτα βρουν την αποκάλυψή τους στο "νοητικό" τόπο των μορφών τους (μέθεξη).

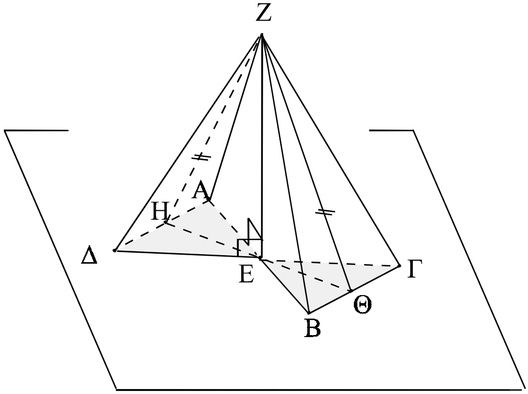
Για πολλούς αιώνες οι τρεις αυτές πρώτες προτάσεις αποτέλεσαν μια ελαχιστοποιημένη επαρκή κάλυψη για την ανάπτυξη κριτηρίων καθετότητας ευθείας και επιπέδου.

Πρόταση 4 (XI. 4)

Εάν μια ευθεία είναι κάθετη σε δύο ευθείες στο κοινό σημείο της τομής τους, τότε είναι κάθετη και προς το επίπεδο των ευθειών αυτών.

Απόδειξη

Υψώνουμε ευθεία ΕΖ κάθετη στις ευθείες ΑΒ και ΓΔ , στο σημείο τομής τους Ε. Παίρνουμε πάνω στις ευθείες ΑΒ και ΓΔ τα ίσα τμήματα ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ και ΕΔ.



Σχήμα 4

Δια του Ε φέρουμε τυχαία ευθεία πάνω στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ, που τέμνει τα συνεπίπεδα τμήματα ΑΔ και ΓΒ στα σημαία Η και Θ αντιστοίχως. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η ευθεία ΕΖ είναι κάθετη στην ΗΘ (ορισμός 3).

Ενώνουμε το τυχαίο σημείο Ζ της ευθείας ΕΖ με τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Η και Θ. Επειδή ΑΕ = ΕΒ, ΓΕ = ΕΔ και $\mathrm{A\hat{E}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{E}B}$ (ως κατακορυφήν) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΕΒ είναι ίσα. Έτσι $\mathrm{\Delta\hat{A}E} = \mathrm{E\hat{B}\Gamma}$, ενώ $\mathrm{A\hat{E}H} = \mathrm{B\hat{E}\Theta}$ και ΑΕ = ΕΒ. Υπάρχουν λοιπόν δύο τρίγωνα ΑΕΗ και ΒΕΘ με μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες. Άρα είναι ίσα και έτσι έχουμε ΗΕ = ΕΘ και ΑΗ = ΒΘ.

Στα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΕΖ είναι ΑΕ = ΕΒ και ΖΕ κοινή πλευρά και κάθετη στην ΑΒ. Άρα ΖΑ = ΖΒ.

Ομοίως προκύπτει ότι ΖΓ = ΖΔ , και αφού ΑΔ = ΒΓ, έχουμε ότι τα τρίγωνα ΖΑΔ ΖΒΓ είναι ίσα, οπότε $\mathrm{Z\hat{A}\Delta} = \mathrm{Z\hat{B}\Gamma}$.

Επειδή ΑΗ = ΒΘ, ΖΑ = ΖΒ και $\mathrm{Z\hat{A}\Delta} = \mathrm{Z\hat{B}\Theta}$, τα τρίγωνα ΖΑΗ και ΖΒΘ είναι ίσα, οπότε ΖΗ = ΖΘ. Επίσης, αφού ΗΕ = ΕΘ και η ΖΕ είναι κάθετη στην ΗΘ, τελικά θα έχουμε ότι $\mathrm{Z\hat{E}H} = \mathrm{\Theta\hat{E}Z}$ = ορθή.

Άρα καθεμιά από τις γωνίες $\mathrm{H\hat{E}Z}$ και $\mathrm{\Theta\hat{E}Z}$ είναι ορθή, οπότε η ΖΕ είναι κάθετη στην δια του Ε τυχαία ευθεία ΗΘ.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 5 (XI. 5)

Εάν μια ευθεία είναι κάθετη σε τρεις ευθείες που περνούν από το ίδιο σημείο και διέρχεται από το σημείο αυτό, τότε οι τρεις ευθείες βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο.

Απόδειξη

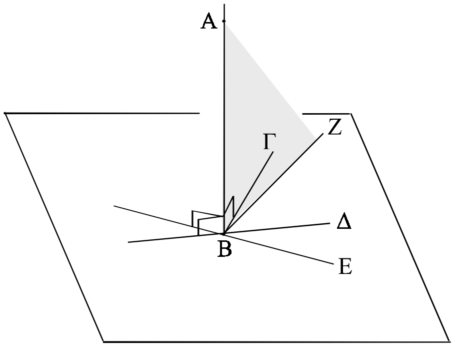
Έστω ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στις τρεις ευθείες ΒΓ, ΒΔ και ΒΕ στο κοινό σημείο τομής τους, που είναι το Β. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι ευθείες ΒΓ, ΒΔ και ΒΕ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Υποθέτουμε ότι οι τρεις ευθείες ΒΓ, ΒΔ και ΒΕ δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και συγκεκριμένα ότι η ΒΓ βρίσκεται εκτός του επιπέδου των ΒΕ και ΒΔ.

Έστω ότι το επίπεδο των ΑΒ και ΒΓ τέμνει το επίπεδο των ΒΕ και ΒΔ, κατά την ευθεία ΒΖ. Τότε οι ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ είναι ομοεπίπεδες, όπως και οι ευθείες ΒΖ , ΒΔ και ΒΕ.

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στις ΒΔ και ΒΕ, είναι κάθετη στο επίπεδό τους και συνεπώς και στην ευθεία ΒΖ που ανήκει σ' αυτό.

Έτσι η γωνία $\widehat{ΑΒΖ}$ είναι ορθή, όπως και η γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ (από την υπόθεση). Άρα $\widehat{ΑΒΖ} = \widehat{ΑΒΓ}$, ενώ ΑΒ, ΒΓ και ΒΖ είναι ομοεπίπεδες. Αυτό είναι άτοπο. Άρα η ΒΓ συμπίπτει με τη ΒΖ και συνεπώς βρίσκεται πάνω στο επίπέδο των ΒΕ και ΒΔ. Άρα η ΒΓ δεν μπορεί να βρίσκεται εκτός του επιπέδου των ΒΔ, ΒΕ. Έτσι, οι τρεις ευθείες ΒΓ, ΒΔ, ΒΓ βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο.



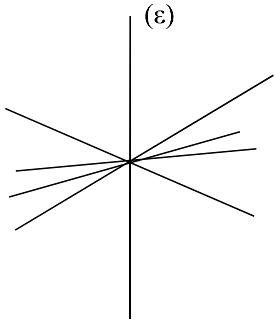
Σχήμα 5

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια στις προτάσεις 4 και 5

Οι προτάσεις 4 και 5 αποτελούν κριτήρια που οριοθετούν τις δυνατότητες καθετότητας ευθείας και επιπέδου στο χώρο, σύμφωνα με το γνωστό ορισμό. Έτσι, στα πλαίσια της καθετότητας ευθείας και επιπέδου, η συμπεριφορά των άπειρων ευθειών μιας ειδικής κεντρικής δέσμης ευθειών στο χώρο καθορίζεται σε σχέση με μία ακτίνα (ε) της δέσμης (βλέπε σχήμα 5.1).

Όταν οι ευθείες της δέσμης πλην της (ε) είναι συνεπίπεδες (πρόταση 4), τότε η καθετότητα της (ε) προς το επίπεδό τους εξασφαλίζεται με την καθετότητά της προς δύο μόνο ευθείες της δέσμης.



Σχήμα 5.1

Η πρόταση 4 αποτελεί υπόδειγμα επαγωγικού συλλογισμού, που βασίζεται στην "*ευθειογενή*" φύση του επιπέδου. Αντίθετα, στην πρόταση 5 χρησιμοποιείται η έννοια της καθετότητας της ευθείας (ε) προς τις άπειρες ακτίνες της δέσμης για να εκθέσει τη συνεπίπεδη ιδιότητα των ευθειών της δέσμης. Με αυτή την έννοια η πρόταση χαρακτηρίζεται ως ένας "παραγωγικός" συλλογισμός.

Πρόταση 6 (XI. 6)

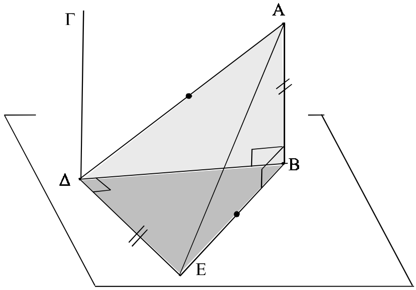
Εάν δύο ευθείες είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο, με Β και Δ τα ίχνη τους. Θα αποδειχθεί ότι οι δύο ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.

Ενώνουμε τα σημεία Β και Δ των δύο ευθειών και φέρουμε την ΔΕ πάνω στο επίπεδο, κάθετη στη ΒΔ και ίση με την ΑΒ. Επίσης φέρουμε τις ΑΕ, ΒΕ και ΑΔ.

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο, είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία του επιπέδου που περνά από το ίχνος της. Άρα οι γωνίες $\widehat{AB\Delta}$ και $\widehat{ABE}$ είναι ορθές.



Σχήμα 6

Ομοίως, επειδή η ΓΔ είναι κάθετη στο επίπεδο, οι γωνίες $\widehat{\Gamma\Delta B}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$ είναι ορθές.

Επειδή ΒΔ κοινή και ΑΒ = ΔΕ, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΒΕ.

Επίσης αφού ΑΔ = ΒΕ, ΑΒ = ΔΕ και ΑΕ κοινή, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ίσα.

Έτσι οι γωνίες $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{ABE}$ είναι ίσες και αφού η τελευταία είναι ορθή, είναι ορθή και η $\widehat{A\Delta E}$. Άρα η ΕΔ είναι κάθετη στην ΔΑ και (όπως γνωρίζουμε) στις ΔΒ και ΔΓ.

Συνεπώς οι ευθείες ΔΓ, ΔΒ και ΔΑ είναι ομοεπίπεδες, καθώς και η ΑΒ, αφού το τρίγωνο ΑΒΔ ορίζει επίπεδο. Έτσι, οι ΑΒ και ΓΔ είναι ομοεπίπεδες και αφού οι γωνίες $Γ\hat{Δ}Β$ και $Α\hat{Β}Δ$ είναι ορθές, οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

ὅ.ἔ.δ.

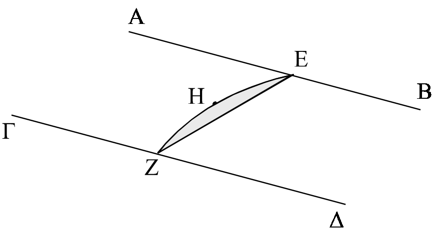
Πρόταση 7 (XI. 7)

Εάν δύο ευθείες είναι παράλληλες και ληφθούν πάνω σε κάθε μια από αυτές τυχαία σημεία, η ευθεία που συνδέει τα σημεία αυτά κείται στο ίδιο επίπεδο με τις δύο παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ΕΗΖ η ευθεία που ορίζεται από τα δύο τυχαία σημεία Ε και Ζ των παράλληλων ευθειών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Θα αποδειχθεί ότι τα σημεία της ΕΖ βρίσκονται στο επίπεδο των ευθειών ΑΒ και ΓΔ.

Υποθέτουμε ότι η ευθεία ΕΗΖ δε βρίσκεται πάνω στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ.



Σχήμα 7

Τότε, αν φέρουμε επίπεδο που περνά από την ΕΗΖ, αυτό θα τέμνει το επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ κατά ευθεία γραμμή, την ΕΖ.

Έτσι οι ευθείες ΕΗΖ και ΕΖ θα ορίζουν μία επιφάνεια, πράγμα άτοπο. (Δύο ευθείες με δύο κοινά σημεία, ταυτίζονται).

Άρα η ευθεία ΕΖ κείται πάνω στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση:

Με την πρόταση 7 γίνεται φανερό ότι οι παράλληλες ευθείες στο χώρο θεωρούνται ως ομοεπίπεδες.

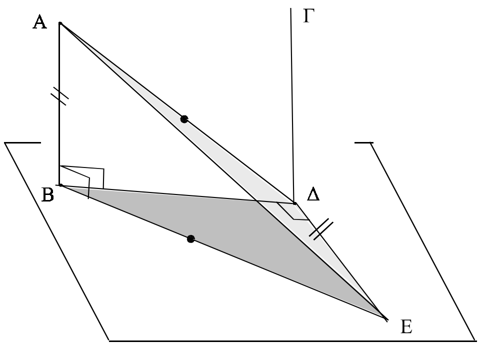
Πρόταση 8 (XI. 8)

Εάν δύο ευθείες είναι παράλληλες και η μια από αυτές είναι κάθετη προς ένα επίπεδο, τότε και η άλλη θα είναι κάθετη προς αυτό το επίπεδο.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ, που είναι παράλληλες, τέμνουν το ίδιο επίπεδο στα σημεία Β και Δ αντίστοιχα και η ΑΒ είναι κάθετη προς αυτό το επίπεδο. Θα αποδειχθεί ότι και η ΓΔ είναι κάθετη προς το επίπεδο.

Ενώνουμε τα ίχνη Β και Δ των δύο ευθειών με την ευθεία ΒΔ και φέρουμε πάνω στο επίπεδο την ΔΕ κάθετη στη ΒΔ και ίση με την ΑΒ. Επίσης φέρουμε τις ΑΕ, ΒΕ και ΑΔ.



Σχήμα 8

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο, είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία του επιπέδου που περνά από το ίχνος της. Άρα οι γωνίες $\hat{ΑΒΔ}$ και $\hat{ΑΒΕ}$ είναι ορθές.

Επειδή οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και τέμνονται από την ΒΔ, οι γωνίες $\hat{ΑΒΔ}$ και $\hat{ΓΔΒ}$ έχουν άθροισμα δύο ορθές και αφού η $\hat{ΑΒΔ}$ είναι ορθή, έπεται ότι και η $\hat{ΓΔΒ}$ είναι ορθή.

Άρα η ΓΔ είναι κάθετη στην ΒΔ.

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν κοινή πλευρά τη ΒΔ και ΑΒ = ΔΕ, είναι ίσα, οπότε και ΑΔ = ΒΕ.

Επειδή ΑΒ = ΔΕ, ΑΔ = ΒΕ και ΑΕ κοινή πλευρά στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΕ, αυτά θα είναι ίσα, οπότε $\hat{ΑΒΕ} = \hat{ΑΔΕ}$.

Έτσι, αφού η γωνία $\hat{ΑΒΕ}$ είναι ορθή, είναι ορθή και η $\hat{ΑΔΕ}$.

Συνεπώς, η ΕΔ είναι κάθετη στην ΑΔ.

Επειδή η ΕΔ είναι κάθετη στην ΑΔ και την ΔΒ, είναι κάθετη στο επίπεδο των παράλληλων ευθειών ΑΒ και ΓΔ.

Έτσι, η ΓΔ είναι κάθετη στην ΔΕ.

Συνεπώς, η ΓΔ είναι κάθετη και στην ΒΔ (όπως δείχθηκε), καθώς και στην ΔΕ, δηλαδή είναι κάθετη στο επίπεδο, αφού είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου που περνούν από το ίχνος της.

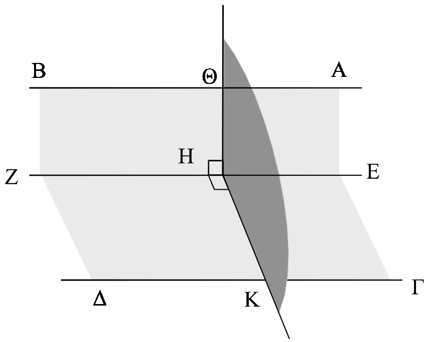
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 9 (XI.9)

Ευθείες παράλληλες προς την ίδια ευθεία και οι οποίες δε βρίσκονται στο ίδιο με αυτήν επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες προς την ΕΖ και δε βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο. Θα αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.



Σχήμα 9

Πάνω στο επίπεδο των παραλλήλων ΕΖ και ΓΔ φέρουμε την ευθεία ΗΚ κάθετη στην ΕΖ σε τυχαίο σημείο της Η.

Επίσης, πάνω στο επίπεδο των παραλλήλων ΑΒ και ΕΖ φέρουμε την ευθεία ΗΘ κάθετη στην ΕΖ στο σημείο της Η.

Επειδή η ΕΖ είναι κάθετη προς τις δύο ευθείες ΗΘ και ΗΚ, θα είναι κάθετη και στο επίπεδο που αυτές ορίζουν.

Έτσι, αφού η ΕΖ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ, ενώ η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΕΖ, έπεται (σύμφωνα με την πρόταση 8) ότι η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ.

Ομοίως, αφού η ΕΖ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ, ενώ η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΕΖ, έπεται ότι η ΓΔ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ.

Άρα, εφόσον οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι κάθετες στο επίπεδο των ευθειών ΗΚ και ΗΘ, είναι (σύμφωνα με την πρόταση 6) μεταξύ τους παράλληλες.

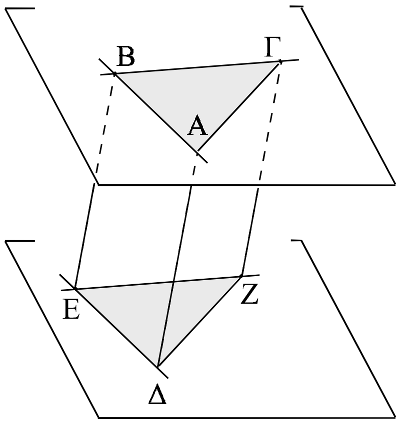
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 10 (XI. 10)

Εάν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι αντίστοιχα παράλληλες προς δύο τεμνόμενες ευθείες, που δεν βρίσκονται στο επίπεδό τους, τότε τα δύο ζεύγη των τεμνομένων ευθειών ορίζουν ίσες γωνίες.

Απόδειξη

Έστω ότι οι τεμνόμενες ευθείες ΒΓ και ΒΑ είναι αντίστοιχα παράλληλες και μη συνεπίπεδες με τις τεμνόμενες ευθείες ΕΖ και ΕΔ.



Σχήμα 10

Παίρνουμε πάνω στα δύο μη συνεπίπεδα ζεύγη των τεμνόμενων ευθειών τα ίσα τμήματα ΒΓ = ΒΑ = ΕΖ = ΕΔ και φέρουμε τις ευθείες ΒΕ, ΑΔ και ΓΖ.

Θα αποδειχθεί ότι

$\hat{\mathrm{AB\Gamma}} = \hat{\mathrm{\Delta EZ}}$.

Επειδή ΒΓ ίση και παράλληλη με την ΕΖ, έπεται ότι και η ΓΖ είναι ίση και παράλληλη με την ΒΕ. Ομοίως, αφού ΒΑ ίση και παράλληλη με την ΕΔ, έπεται ότι η ΑΔ είναι ίση και παράλληλη με την ΒΕ.

Έτσι, αφού οι ΓΖ και ΑΔ είναι ίσες και παράλληλες με την ΒΕ και δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτή, θα είναι, σύμφωνα με την πρόταση 9, (ίσες και) παράλληλες μεταξύ τους.

Τα ίσα και παράλληλα τμήματα ΑΔ και ΓΖ συνδέονται με τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ, οπότε και αυτά είναι μεταξύ τους παράλληλα και ίσα. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ και ΑΓ = ΔΖ. Άρα είναι ίσα, οπότε και η γωνία $\hat{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{\mathrm{\Delta EZ}}$.

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια στις προτάσεις 6 – 10

Με τις παραπάνω προτάσεις εισάγεται η έννοια της παραλληλίας ευθειών στο χώρο, δια μέσου της ήδη θεμελιωμένης καθετότητας ευθείας και επιπέδου.

Η πρόταση 6 θεωρείται βασική, διότι κατά την αποδεικτική της διαδικασία εξασφαλίζεται ότι δύο κάθετες ευθείες σε επίπεδο είναι πρώτιστα ομοεπίπεδες και μετά παράλληλες. Το γεγονός αυτό ενισχύεται με την πρόταση 7. Έτσι, το ότι δύο παράλληλες ευθείες είναι ομοεπίπεδες, δίνει τη δυνατότητα η καθετότητα της μιας σε ένα επίπεδο να συνεπάγεται και την καθετότητα της άλλης σε αυτό (πρόταση 8). Με αυτό τον τρόπο εισάγεται όχι ρητά, αλλά υπονοούμενα και η καθετότητα δύο επιπέδων.

Η παραλληλία δύο ευθειών στο χώρο, που είναι παράλληλες προς τρίτη, αποδεικνύεται με τη χρήση του κάθετου επιπέδου, όπως και η παραλληλία δύο ευθειών παραλλήλων προς τρίτη στο επίπεδο αποδεικνύεται με τη χρήση της κάθετης ευθείας (πρόταση 9).

Τέλος, η πρόταση 10 εντάσσεται στην ενότητα των προτάσεων που αναφέρονται στην παραλληλία ευθειών στο χώρο, και παρουσιάζει την ισότητα δύο γωνιών με αντίστοιχα παράλληλες πλευρές, αλλά εισάγει και την παραλληλία δύο επιπέδων που διαπραγματεύεται η πρόταση 15.

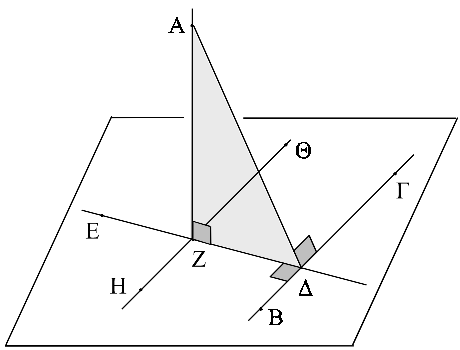
Πρόταση 11 (XI. 11)

Από δοθέν σημείο που βρίσκεται εκτός ενός επιπέδου να αχθεί ευθεία γραμμή κάθετη προς το επίπεδο.

Απόδειξη

Φέρουμε τυχαία ευθεία ΒΓ πάνω στο δοθέν επίπεδο και από το δοθέν σημείο Α την κάθετη ευθεία ΑΔ επί της ΒΓ. (Το σημείο Α και η ευθεία ΒΓ ορίζουν επίπεδο).

Εάν η ΑΔ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, τότε έχει αχθεί από το σημείο Α κάθετη στο επίπεδο.



Σχήμα 11

Εάν η ΑΔ δεν είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, φέρουμε πάνω στο επίπεδο την ευθεία ΕΔ κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Δ. Επίσης, πάνω στο επίπεδο των τεμνόμενων ευθειών ΔΕ και ΔΑ φέρουμε την ΑΖ κάθετη στην ΔΕ. Τέλος, πάνω στο δοθέν επίπεδο φέρουμε την ευθεία ΗΖΘ παράλληλη προς την ΒΓ.

Επειδή η ΒΓ είναι κάθετη και στις δύο ευθείες ΔΕ και ΔΑ, θα είναι κάθετη και προς το επίπεδό τους και αφού η ΗΘ είναι παράλληλη με την ΒΓ, θα είναι και αυτή (σύμφωνα με την πρόταση 9) κάθετη στο επίπεδο των ΔΕ και ΔΑ.

Η ευθεία ΗΘ ως κάθετη στο επίπεδο των ΔΕ και ΔΑ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία αυτού του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της Ζ. Έτσι η ΗΘ είναι κάθετη και στη ΖΑ.

Συνεπώς, η ΖΑ είναι κάθετη τόσο στην ΕΔ όσο και στην ΗΘ, οπότε είναι κάθετη και στο επίπεδό τους, που είναι το δοθέν επίπεδο.

ὅ.ἔ.π.

Πρόταση 12 (XI. 12)

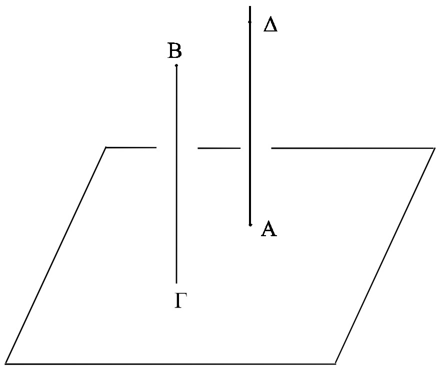
Από σημείο το οποίο βρίσκεται σε ένα επίπεδο, να υψωθεί κάθετη προς το επίπεδο.

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Β εκτός του δοθέντος επιπέδου.

Από το Β φέρουμε την κάθετη ευθεία ΒΓ προς το δοθέν επίπεδο (σύμφωνα με την πρόταση 11).

Στο επίπεδο του σημείου Α και της ευθείας ΒΓ φέρουμε την ευθεία ΑΔ παράλληλη προς την ΒΓ.



Σχήμα 12

Επειδή η ΑΔ είναι παράλληλη προς την ΒΓ, και η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, έπεται ότι και η ΑΔ είναι η ζητούμενη κάθετη προς το δοθέν επίπεδο (πρόταση 8).

ὅ.ἔ.π.

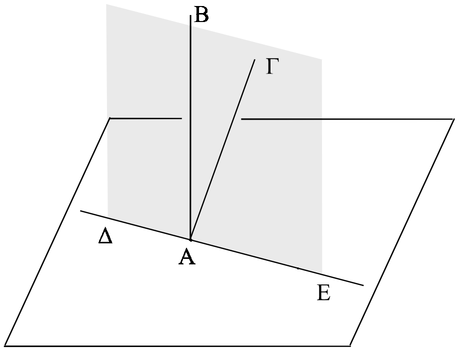
Πρόταση 13 (XI. 13)

Από ένα σημείο ενός επιπέδου δεν είναι δυνατόν να υψωθούν δύο κάθετες προς το επίπεδο αυτό, οι οποίες να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του επιπέδου.

Απόδειξη

Έστω ότι είναι δυνατόν από το σημείο Α του δοθέντος επιπέδου να υψώσουμε δύο κάθετες ΑΒ και ΑΓ προς αυτό, οι οποίες να βρίσκονται και προς το ίδιο μέρος του επιπέδου.

Το επίπεδο των ευθειών ΑΒ και ΑΓ θα τέμνει το δοθέν επίπεδο κατά μία ευθεία, έστω την ΔΑΕ.



Σχήμα 13

Οι ευθείες ΑΒ, ΑΓ και ΔΑΕ είναι συνεπίπεδες, ενώ η ΓΑ και η ΒΑ είναι κάθετες στο δοθέν επίπεδο. Έτσι η ΓΑ και η ΒΑ είναι κάθετες σε κάθε ευθεία του δοθέντος επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος τους Α, και συνεπώς στην ΔΑΕ.

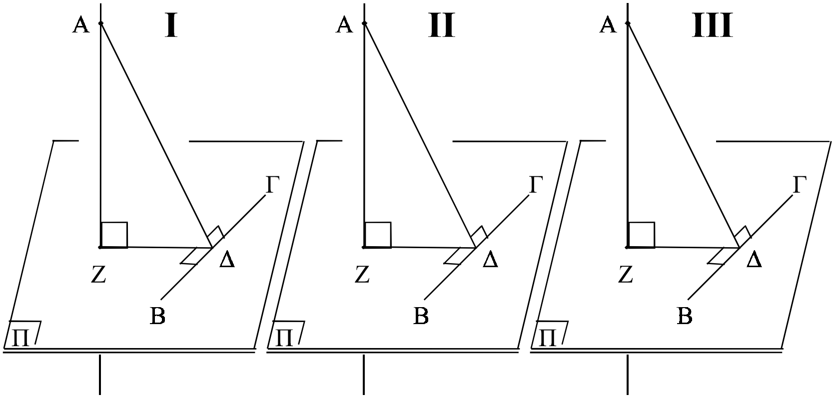
Άρα η γωνία $B\hat{A}E$ είναι ορθή, όπως και η $\Gamma\hat{A}E$, ενώ βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Αυτό είναι αδύνατο, και συνεπώς οι δύο ευθείες ΑΒ και ΑΓ συμπίπτουν, οπότε δεν είναι δυνατόν να υψωθούν δύο κάθετες.

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια στις προτάσεις 11 μέχρι 13

Οι τρεις προτάσεις καλύπτουν τη δυνατότητα κατασκευής ευθείας κάθετης προς ένα επίπεδο από ένα σημείο εκτός επιπέδου ή πάνω σ’ αυτό.

Η πρόταση 11 αποτελεί την αυθεντική μορφή του γνωστού θεωρήματος *"των τριών καθέτων"* (βλέπε **Ι.** στο σχήμα 13.1), το οποίο στις σύγχρονες παρουσιάσεις της Στερεομετρίας εμφανίζεται και με τις μορφές **ΙΙ**. και **ΙΙΙ.**



Σχήμα 13.1

Μορφή I.
$\{ A \notin (\Pi), B\Gamma \subseteq (\Pi), Z\Delta \subseteq (\Pi), Z\Delta \perp B\Gamma, A\Delta \perp B\Gamma\} \Rightarrow AZ \perp (\Pi)$

Μορφή II
$\{ A \notin (\Pi), B\Gamma \subseteq (\Pi), AZ \perp (\Pi), Z\Delta \perp B\Gamma\} \Rightarrow A\Delta \perp B\Gamma$

Μορφή III
$\{ A \notin (\Pi), B\Gamma \subseteq (\Pi), AZ \perp (\Pi), A\Delta \perp B\Gamma\} \Rightarrow Z\Delta \perp B\Gamma$

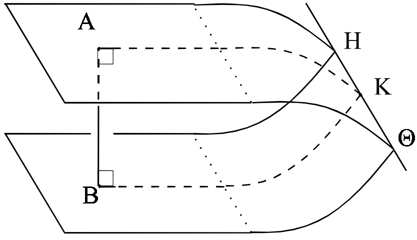
Πρόταση 14 (XI. 14)

Τα επίπεδα επί των οποίων η ίδια ευθεία είναι κάθετη είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Απόδειξη

Έστω ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη προς δύο δοσμένα επίπεδα. Θα αποδειχθεί ότι τα επίπεδα αυτά είναι παράλληλα.

Εάν τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα, τότε (προεκτεινόμενα) θα τέμνονται κατά ευθεία γραμμή, έστω την ΗΘ.



Σχήμα 14

Πάνω στην ευθεία ΗΘ παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ και φέρουμε τις ευθείες ΑΚ και ΒΚ που βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στα δύο δοθέντα επίπεδα.

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στα δύο επίπεδα, θα είναι κάθετη και στις ευθείες ΑΚ και ΒΚ των δύο δοθέντων επιπέδων.

Έτσι στο τρίγωνο ΑΒΚ οι γωνίες $\mathrm{K}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι ορθές, που είναι αδύνατο. Άρα τα επίπεδα δεν τέμνονται και συνεπώς είναι παράλληλα.

ὅ.ἔ.δ.

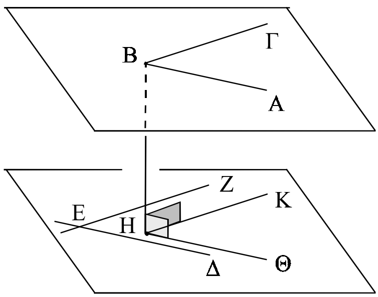
Πρόταση 15 (XI. 15)

Εάν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι αντίστοιχα παράλληλες προς δύο τεμνόμενες ευθείες και δε βρίσκονται πάνω στο ίδιο με αυτές επίπεδο, τότε τα επίπεδα των ευθειών αυτών είναι παράλληλα.

Απόδειξη

Έστω οι τεμνόμενες ευθείες ΒΑ και ΒΓ, που είναι αντίστοιχα παράλληλες προς τις τεμνόμενες ευθείες ΕΔ και ΕΖ και δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές. Θα αποδειχθεί ότι τα επίπεδα που ορίζονται από τις ΒΓ, ΒΑ και ΕΖ, ΕΔ αντίστοιχα, είναι παράλληλα.

Από το σημείο Β φέρουμε την κάθετη ευθεία ΒΗ προς το επίπεδο των τεμνομένων ευθειών ΕΖ και ΕΔ.



Σχήμα 15

Από το Η φέρουμε στο επίπεδο των ΕΖ και ΕΔ τις ευθείες ΗΚ και ΗΘ, παράλληλες προς τις ΕΖ και ΕΔ αντίστοιχα.

Επειδή η ΒΗ είναι κάθετη στο επίπεδο των ευθειών ΕΖ και ΕΔ, είναι κάθετη και στις ευθείες ΗΚ και ΗΘ αυτού του επιπέδου, που διέρχονται από το ίχνος της. Έτσι, οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Theta$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{K}$ είναι ορθές.

Αφού όμως οι ευθείες ΒΑ και ΒΓ είναι παράλληλες προς τις ΗΘ και ΗΚ αντίστοιχα, τόσο οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Theta$ και $\mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$, όσο και οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ έχουν άθροισμα δύο ορθές.

Έτσι οι γωνίες $H\hat{B}A$ και $H\hat{B}\Gamma$ είναι ορθές, οπότε η ΒΗ είναι κάθετη στις δύο τεμνόμενες ευθείες ΒΑ και ΒΓ. Άρα η ΒΗ είναι κάθετη και στο επίπεδο των τεμνόμενων ευθειών ΒΑ και ΒΓ.

Συνεπώς, (σύμφωνα με την πρόταση 14), αφού τα δύο επίπεδα των τεμνόμενων ευθειών ΒΑ, ΒΓ και ΕΔ, ΕΖ είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ΒΗ, τα δύο αυτά επίπεδα είναι παράλληλα.

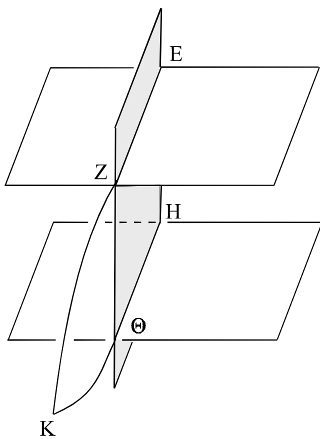
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 16 (XI. 16)

Εάν δύο παράλληλα επίπεδα τέμνονται από ένα επίπεδο, τότε οι κοινές τομές των επιπέδων αυτών είναι ευθείες παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι τα δύο παράλληλα επίπεδα τέμνονται από το επίπεδο ΕΖΘΗ κατά τις ευθείες ΕΖ και ΗΘ. Θα αποδειχθεί ότι οι ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες.



Σχήμα 16

Εάν οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ δεν είναι παράλληλες, τότε προεκτεινόμενες επί του επιπέδου ΕΖΘΗ θα τέμνονται προς το μέρος των Ζ και Θ ή προς το μέρος των Ε και Η.

Έστω ότι τέμνονται προς το μέρος των Ζ και Θ, στο σημείο Κ.

Επειδή οι ευθείες ΕΖΚ και ΗΘΚ είναι ευθείες που ανήκουν αντίστοιχα στα δύο παράλληλα επίπεδα, έπεται ότι τα δύο επίπεδα έχουν κοινό σημείο το Κ. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα.

Άρα οι συνεπίπεδες ευθείες ΕΖ και ΗΘ δεν τέμνονται και συνεπώς είναι παράλληλες.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 17 (XI. 17)

Εάν δύο ευθείες τέμνονται από παράλληλα επίπεδα, θα τέμνονται σε μέρη ανάλογα.

Απόδειξη

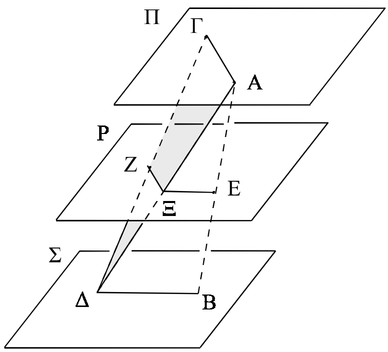
Έστω ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από τα παράλληλα επίπεδα Π, Ρ και Σ στα σημεία Α, Ε, Β και Γ, Ζ, Δ αντίστοιχα. Θα αποδειχθεί ότι $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$.

Φέρουμε τις ευθείες ΑΓ, ΒΔ και ΑΔ, και έστω ότι η ΑΔ τέμνει το επίπεδο Ρ στο σημείο Ξ. Φέρουμε έτσι τις ΞΖ και ΞΕ.

Επειδή τα παράλληλα επίπεδα Ρ και Σ τέμνονται από το επίπεδο ΞΕΒΔ, οι τομές ΞΕ και ΔΒ είναι παράλληλες.

Ομοίως, επειδή τα παράλληλα επίπεδα Ρ και Π τέμνονται από το επίπεδο ΞΖΓΑ, οι τομές ΞΖ και ΑΓ είναι παράλληλες.

Στο τρίγωνο ΑΔΒ η ευθεία ΞΕ είναι παράλληλη με την ΔΒ, οπότε: $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΑΞ}{ΞΔ}$.



Σχήμα 17

Επίσης, στο τρίγωνο ΔΑΓ η ευθεία ΖΞ είναι παράλληλη με την ΓΑ, οπότε: $\frac{ΑΞ}{ΞΔ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$.

Έτσι έχουμε $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$, οπότε οι δύο ευθείες τέμνονται από τα παράλληλα επίπεδα σε μέρη ανάλογα.

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια στις προτάσεις 14-17

Οι προτάσεις αυτές εστιάζονται στην παραλληλία επιπέδων. Παρά το γεγονός ότι μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη και μοναδικότητα επιπέδου παράλληλου προς δοθέν επίπεδο, που να διέρχεται από σημείο εκτός αυτού, το αποτέλεσμα αυτό δε διατυπώνεται ευθέως ως πρόταση.

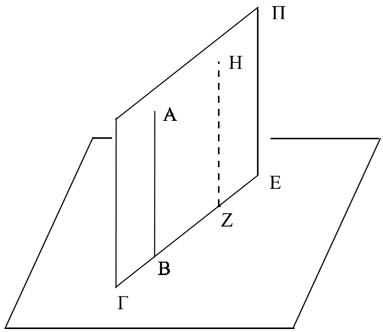
Από τις παραπάνω τέσσερις προτάσεις οι δύο πρώτες χρησιμοποιούν στην απόδειξή τους την κοινή κάθετο δύο παραλλήλων επιπέδων, ενώ οι δύο επόμενες επικεντρώνονται στην παραλληλία των τομών δύο παραλλήλων επιπέδων από ένα τρίτο επίπεδο.

Πρόταση 18 (XI. 18)

Εάν ευθεία είναι κάθετη προς ένα επίπεδο, τότε όλα τα επίπεδα τα οποία διέρχονται από την ευθεία αυτή θα είναι επίσης κάθετα προς αυτό το επίπεδο.

Απόδειξη

Έστω ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη προς ένα δοθέν επίπεδο και διέρχεται από αυτή το τυχαίο επίπεδο Π. Θα αποδειχθεί ότι το επίπεδο Π είναι κάθετο προς το δοθέν επίπεδο.



Σχήμα 18

Το Π τέμνει το δοθέν επίπεδο κατά την ευθεία ΓΒΕ.

Πάνω στην ΓΒΕ παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Ζ και φέρουμε πάνω στο επίπεδο Π την ΖΗ κάθετη στην ΓΕ.

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της, οπότε η ΑΒ είναι κάθετη στη ΓΕ.

Έτσι η γωνία $\hat{ABZ}$ είναι ορθή, ενώ είναι ορθή και η γωνία $\hat{HZB}$, οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΗΖ του επιπέδου Π είναι παράλληλες.

Συνεπώς, αφού η ΑΒ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, θα είναι κάθετη σ' αυτό, όπως και η παράλληλή της ΗΖ.

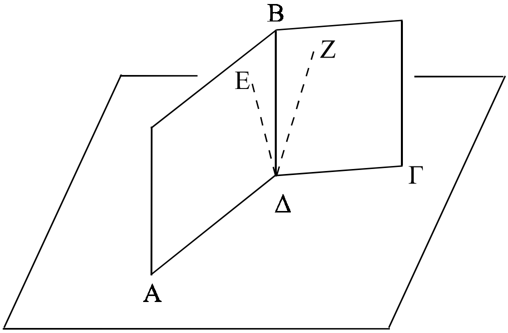
Επειδή δύο επίπεδα είναι κάθετα όταν οι κάθετες που άγονται, προς την κοινή τομή και που ανήκουν στο ένα από αυτά είναι κάθετες και στο άλλο (ορισμός 4), έπεται ότι το επίπεδο Π είναι κάθετο στο δοθέν επίπεδο. Επειδή όμοια απόδειξη γίνεται και για κάθε άλλο (τυχαίο) επίπεδο που διέρχεται από την ευθεία ΑΒ, το ζητούμενο αποδείχθηκε.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 19 (ΧΙ. 19)

Εάν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε ένα επίπεδο, τότε η κοινή τομή τους θα είναι επίσης κάθετη προς αυτό το επίπεδο.

Απόδειξη



Σχήμα 19

Έστω ότι τα επίπεδα ΒΑ και ΒΓ είναι κάθετα προς ένα δοθέν επίπεδο και ότι ΒΔ είναι η κοινή τομή τους. Θα αποδειχθεί ότι η ΒΔ είναι κάθετη προς το δοθέν επίπεδο.

Αν η ΒΔ δεν είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, φέρουμε τη ΔΕ πάνω στο επίπεδο ΒΑ κάθετη στη ΔΑ, και την ΔΖ πάνω στο επίπεδο ΒΓ κάθετη στη ΔΓ, οπότε η ΔΕ θα είναι διαφορετική από τη ΔΖ.

Επειδή το επίπεδο ΒΑ είναι κάθετο στο δοθέν και φέραμε ευθεία ΔΕ του επιπέδου ΒΑ κάθετη στην τομή ΔΑ των δύο επιπέδων, έπεται ότι (ορισμός 4) η ΔΕ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο.

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι και η ΔΖ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο.

Άρα από το ίδιο σημείο Δ του δοθέντος επιπέδου υψώνονται δύο κάθετες προς αυτό, οι ΔΕ και ΔΖ.

Αυτό είναι άτοπο (πρόταση 13), οπότε η μοναδική κάθετος που μπορεί να υψωθεί από το σημείο Δ προς το επίπεδο είναι η ΔΒ, που αποτελεί την κοινή τομή των δύο τεμνόμενων επιπέδων, τα οποία είναι κάθετα στο δοθέν επίπεδο.

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια στις προτάσεις 18 - 19

Οι δύο προτάσεις αναφέρονται στην καθετότητα επιπέδων. Η πρόταση 18 παρουσιάζει την κάθετη ευθεία προς ένα επίπεδο ως φορέα μιας δέσμης καθέτων επιπέδων προς αυτό, ενώ η πρόταση 19 αποδεικνύει ότι κάθε ζεύγος τεμνόμενων επιπέδων, καθέτων σε δοθέν επίπεδο, ορίζει και μία ευθεία κάθετη προς το δοθέν επίπεδο, που είναι η τομή τους.

Σχήμα κατανομής των προτάσεων 1 – 19

Αρχική μετάβαση στο χώρο, σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων.	**3 προτάσεις**
Καθετότητα ευθειών και επιπέδων	**2 προτάσεις**
Παραλληλία ευθειών στο χώρο.	**5 προτάσεις**
Καθετότητα ευθείας σε επίπεδο από σημείο εκτός ή επί του επιπέδου.	**3 προτάσεις**
Παραλληλία επιπέδων.	**4 προτάσεις**
Καθετότητα επιπέδων	**2 προτάσεις**

4. Τρίεδρες στερεές γωνίες και η χρήση τους στην κατασκευή παραλληλεπιπέδων

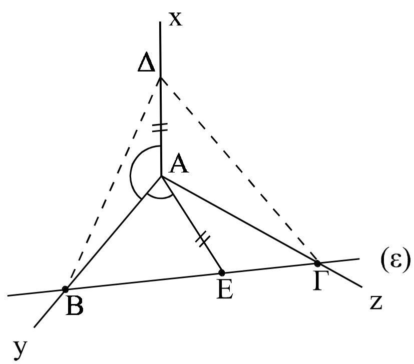
Σύμφωνα με τις απαιτήσεις των ορισμών 9 και 10 του βιβλίου XI, τα στερεά σχήματα καθορίζονται πλήρως από τα επίπεδα σχήματα που τα περιβάλλουν. Έτσι σε μια τρίεδρη στερεά γωνία οι έδρες θεωρούνται τρίγωνα με κορυφές την κορυφή της τρίεδρης και η βάση της τρίεδρης είναι τρίγωνο με πλευρές τις βάσεις των εδρών της τρίεδρης. Επί πλέον, οι ακμές νοούνται ως (πεπερασμένα) ευθύγραμμα τμήματα. Για να συνδεθεί λοιπόν η τρέχουσα πρακτική με αυτές τις απαιτήσεις, πρέπει πάνω στις (μη συνεπίπεδες) συντρέχουσες ημιευθείες Οx, Oy, Oz να λαμβάνονται σημεία Α, Β, Γ ώστε να δημιουργηθεί η τρίεδρη Ο.ΑΒΓ. Με αυτή την οπτική, η τρίεδρη είναι το αντίστοιχο του τριγώνου στο χώρο. Είναι λοιπόν εντελώς φυσικό, να αναζητηθούν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων μιας τρίεδρης και να διατυπωθούν κατασκευαστικά κριτήρια. Αυτό γίνεται στις προτάσεις 23 μέχρι 26, όπου διατυπώνονται τα απόλυτα απαραίτητα αποτελέσματα για την κατασκευή παραλληλεπιπέδων, που γίνεται στην πρόταση 28. Κάποιες προεκτάσεις των συμπερασμάτων, όπως και κάποιες μετέπειτα θεωρήσεις, παρατίθενται υπό μορφή σχολίων.

Πρόταση 20 (XI. 20)

Αν μια στερεά γωνία περιέχεται από τρεις επίπεδες γωνίες, τότε οι δύο από αυτές, όπως και να ληφθούν, έχουν άθροισμα μεγαλύτερο της τρίτης.

Απόδειξη

Έστω η τρίεδρη στερεά γωνία με κορυφή Α, που περιβάλλεται από τις επίπεδες γωνίες $x\hat{A}y$, $y\hat{A}z$, $z\hat{A}x$. Θα αποδειχθεί ότι το άθροισμα των δύο από αυτές είναι πάντα μεγαλύτερο από την εναπομένουσα τρίτη.



Σχήμα 20

Η πρόταση προφανώς ισχύει όταν οι τρεις αυτές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.

Έστω λοιπόν ότι δεν είναι όλες μεταξύ τους ίσες και η γωνία $y\hat{A}z$ είναι η πιο μεγάλη από αυτές. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι $y\hat{A}z < z\hat{A}x + y\hat{A}x$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y\hat{A}z > y\hat{A}x$. Θεωρούμε σημείο Δ της Αx και εντός της γωνίας $y\hat{A}z$ σημείο Ε, τέτοιο ώστε $y\hat{A}E = x\hat{A}y$ και ΑΕ = ΑΔ. Τέλος, από το Ε και εντός της γωνίας $y\hat{A}z$ άγεται η ευθεία (ε), που συναντά τις ευθείες Αy και Αz στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΕ είναι ίσα, αφού έχουν την ΑΒ κοινή, ΑΔ = ΑΕ και $\Delta\hat{A}B = B\hat{A}E$ (από κατασκευή). Επομένως οι (βάσεις) ΔΒ και ΒΕ είναι ίσες, δηλαδή ΔΒ = ΒΕ.

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε ΔΒ + ΔΓ > > ΒΓ. Όμως, αφού ΒΓ = ΒΕ + ΕΓ και ΒΕ = ΒΔ, θα ισχύει ότι ΔΓ > ΕΓ.

Ακολούθως, τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΕΓ έχουν ΑΔ = ΑΕ, την ΑΓ κοινή και ΔΓ > ΕΓ. Επομένως θα ισχύει η σχέση $\Delta\hat{A}\Gamma > E\hat{A}\Gamma$.

Όμως, η γωνία $\Delta\hat{A}B$ αποδείχθηκε ίση προς τη γωνία $B\hat{A}E$, οπότε $\Delta\hat{A}B + \Delta\hat{A}\Gamma > B\hat{A}E + E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$, δηλαδή $x\hat{A}y + x\hat{A}z > y\hat{A}z$.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να κάνουμε την απόδειξη και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

ὅ.ἔ.δ.

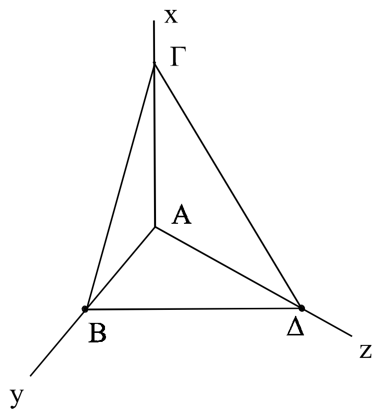
Πρόταση 21 (XI. 21)

Κάθε στερεά γωνία περιέχεται από επίπεδες γωνίες, το άθροισμα των οποίων είναι μικρότερο από τέσσερις ορθές.

Απόδειξη

Έστω ότι η τρίεδρη στερεά γωνία με κορυφή το Α περιέχεται από τις επίπεδες γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}B$, όπου τα σημεία Β, Γ και Δ έχουν ληφθεί (τυχαία) πάνω στις ακμές και έχουν αχθεί οι ΒΓ, ΓΔ και ΔΒ. Θα αποδείξουμε ότι:

$$B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B < 4 \text{ ορθές}.$$



Σχήμα 21

Η στερεά γωνία με κορυφή το Β περιέχεται από τρεις επίπεδες γωνίες, για τις οποίες το άθροισμα, δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη. Επομένως, θα ισχύει: $\Gamma\hat{B}A + A\hat{B}\Delta > \Gamma\hat{B}\Delta$. Για τον ίδιο λόγο θα έχουμε ότι $\Gamma\hat{\Delta}A + A\hat{\Delta}B > \Gamma\hat{\Delta}B$, όπως και $B\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}\Delta > B\hat{\Gamma}\Delta$. Θέτοντας λοιπόν $\hat{\sigma} = \Gamma\hat{B}A + A\hat{B}\Delta + B\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}A + A\hat{\Delta}B$, έχουμε: $\hat{\sigma} > \Gamma\hat{B}\Delta + B\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}B$. Όμως οι γωνίες $\Gamma\hat{B}\Delta$, $B\hat{\Delta}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}\Delta$ (ως γωνίες του τριγώνου ΒΓΔ) έχουν άθροισμα δύο ορθές, επομένως $\hat{\sigma} > 2$ ορθές.

Ομοίως, κάθε ένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ έχει άθροισμα γωνιών δύο ορθές, επομένως ισχύει:

$$\widehat{ΓΒΑ} + \widehat{ΑΓΒ} + \widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΑΓΔ} + \widehat{ΓΔΑ} + \widehat{ΓΑΔ} + \widehat{ΑΔΒ} + \widehat{ΔΒΑ} + \widehat{ΒΑΔ} =$$

$= 6$ ορθές, δηλαδή $\hat{σ} + \widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΓΑΔ} + \widehat{ΒΑΔ} = 6$ ορθές

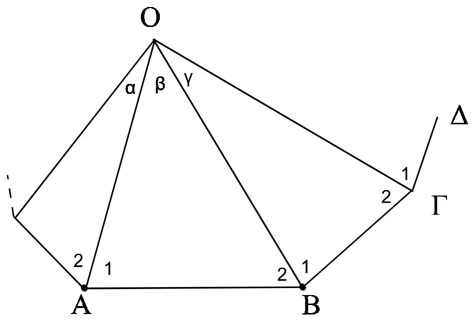
Όμως, αφού έχουμε $\hat{σ} > 2$ ορθές, θα πρέπει να είναι:

$$\widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΓΑΔ} + \widehat{ΒΑΔ} < 4 \text{ ορθές.}$$

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των επίπεδων γωνιών της κορυφής τυχαίας στερεάς (και όχι μόνο τρίεδρης) γωνίας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις τέσσερις ορθές. Αυτό γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τόσο την ανισοτική σχέση για τις επίπεδες γωνίες τριέδρου που μόλις αποδείχθηκε, όσο και το αποτέλεσμα για το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κυρτού πολυγώνου. Ας σημειωθεί ότι αυτό το γενικό αποτέλεσμα, αν και δεν διατυπώνεται πουθενά στα "*Στοιχεία*", χρησιμοποιείται στο βιβλίο XIII (βλέπε Συμπέρασμα μετά την πρόταση XIII.18).



Σχήμα 21α

Απόδειξη

Πράγματι, για τη στερεά γωνία Ο. ΑΒΓΔ, όπου τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, . . . είναι συνεπίπεδα, σημειώνουμε $\hat{Ο}_α, \hat{Ο}_β, \hat{Ο}_γ \ldots$, τις (επίπεδες) γωνίες της κορυφής, $(\hat{Α}_1, \hat{Β}_2)$, $(\hat{Β}_1, \hat{Γ}_2)$, . . . , τις γωνίες των τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, . . . και $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$, . . . τις γωνίες του (κυρτού) πολυγώνου ΑΒΓΔ . . . (βλέπε σχήμα 21α) και θέτουμε:

$$σ = \hat{Ο}_α + \hat{Ο}_β + \hat{Ο}_γ + \ldots$$

$$\Sigma = \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \ldots + \hat{A} = (2\nu - 4) \text{ ορθές}$$

$$\sigma_\beta = \hat{O}_\beta + \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 2 \text{ ορθές}, \ \sigma_\gamma = \hat{O}_\beta + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 2 \text{ ορθές, κλπ.}$$

Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα (πρόταση 21) για τις τρίεδρες γωνίες Β.ΑΓΟ, Γ.ΒΔΟ, . . . έχουμε επίσης τις ανισοτικές σχέσεις:

$$\hat{B} < \hat{B}_1 + \hat{B}_2, \ \hat{\Gamma} < \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2, \ldots$$

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω, βρίσκουμε (με πρόσθεση κατά μέλη):

$$(2\nu - 4) \text{ ορθές} = \Sigma < (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) + \ldots =$$

$$= (\hat{A}_1 + \hat{B}_2) + (\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2) + \ldots =$$

$$= (2 \text{ ορθές} - \hat{O}_\alpha) + (2 \text{ ορθές} - \hat{O}_\beta) + \ldots = (2\nu) \text{ ορθές} - \sigma,$$

οπότε προκύπτει ότι $\sigma < 4$ ορθές.

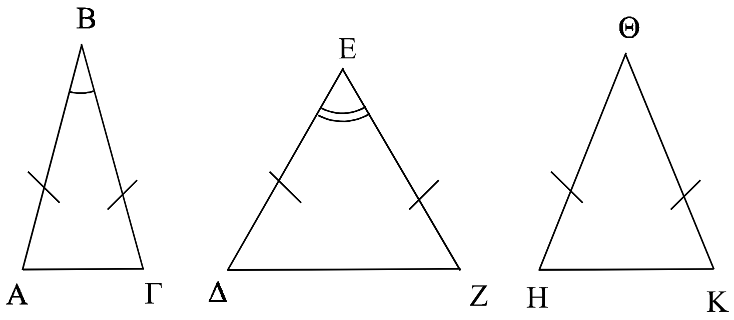
Πρόταση 22 (XI. 22)

Αν δοθούν τρεις επίπεδες γωνίες, για τις οποίες το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο της τρίτης και πάνω στις πλευρές τους ληφθούν ίσα τμήματα, τότε είναι δυνατόν να κατασκευασθεί τρίγωνο που να έχει ως πλευρές τις βάσεις των τριών (ισοσκελών) τριγώνων τα οποία προκύπτουν.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τρεις επίπεδες γωνίες με κορυφές Β, Ε, Θ, και ας κατασκευάσουμε τα (ισοσκελή) τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ και ΗΘΚ με πλευρές ΒΑ = ΒΓ= ΕΔ = ΕΖ = ΘΗ = ΘΚ, για τα οποία ισχύει:

$$A\hat{B}\Gamma + \Delta\hat{E}Z > H\hat{\Theta}K, \ \Delta\hat{E}Z + H\hat{\Theta}K > A\hat{B}\Gamma, \ H\hat{\Theta}K + A\hat{B}\Gamma > \Delta\hat{E}Z .$$

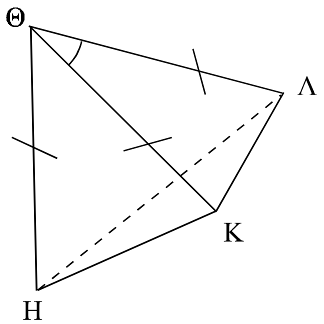


Σχήμα 22

Θα αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΔΖ και ΗΚ μπορεί να αποτελέσουν πλευρές τριγώνου, ότι δηλαδή το άθροισμα δύο εξ αυτών είναι μεγαλύτερο του τρίτου.

Αν οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$, $\Delta\hat{E}Z$, $H\hat{\Theta}K$ είναι ίσες, τότε είναι φανερό ότι και τα τμήματα ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ είναι ίσα και από αυτά κατασκευάζεται (ισόπλευρο) τρίγωνο.

Έστω ότι οι γωνίες δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους και ότι κατασκευάζεται η γωνία $K\hat{\Theta}\Lambda$, εφεξής της $H\hat{\Theta}K$ και ίση προς τη γωνία $A\hat{B}\Gamma$. Το σημείο Λ έχει ληφθεί έτσι ώστε ΘΚ = ΘΛ. Φέρουμε και τις ευθείες ΚΛ, ΗΛ. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΘΛ προκύπτει ότι ΑΓ = ΚΛ.



Σχήμα 22α

Αφού $A\hat{B}\Gamma + H\hat{\Theta}K > \Delta\hat{E}Z$ και $A\hat{B}\Gamma = K\hat{\Theta}\Lambda$, θα είναι και $H\hat{\Theta}\Lambda > \Delta\hat{E}Z$ (βλέπε παρατήρηση μετά το τέλος της απόδειξης). Τα τρίγωνα λοιπόν ΗΘΛ και ΔΕΖ έχουν ΘΗ = ΕΔ, ΘΛ = ΕΖ και $H\hat{\Theta}\Lambda > \Delta\hat{E}Z$. Επομένως θα είναι και ΗΛ > ΔΖ.

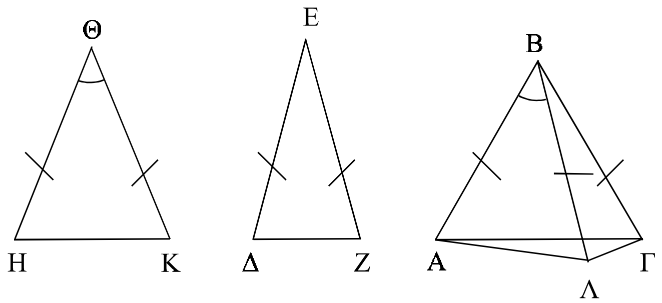
Όμως, στο τρίγωνο ΗΚΛ είναι ΗΚ + ΚΛ > ΗΛ, άρα θα είναι και ΗΚ + ΚΛ > ΔΖ .

Όμως, αφού ΚΛ = ΑΓ, θα είναι και ΗΚ + ΑΓ > ΔΖ.

Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι έχουμε ΔΖ + ΗΚ > ΑΓ, όπως και ότι ΑΓ + ΔΖ > ΗΚ.

Επομένως, είναι δυνατόν να κατασκευασθεί ένα τρίγωνο με πλευρές ίσες προς τις ΑΓ, ΔΖ και ΗΚ .

ὅ.ἔ.δ.



Σχήμα 22β

Παρατήρηση

Μια παρόμοια απόδειξη επιτυγχάνεται, υποθέτοντας ότι μια από τις γωνίες, π.χ. η γωνία $A\hat{B}\Gamma$, είναι η μέγιστη (βλέπε σχήμα 22β).

Πράγματι, αφού $A\hat{B}\Gamma \geq H\hat{\Theta}K$ και $A\hat{B}\Gamma \geq \Delta\hat{E}Z$, θα έχουμε: ΑΓ ≥ ΗΚ και ΑΓ ≥ ΔΖ. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ΔΖ + ΗΚ > ΑΓ.

Στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ φέρεται η ΒΛ, έτσι ώστε να ισχύει $H\hat{\Theta}K = A\hat{B}\Lambda$, όπου έχει ληφθεί ΒΛ = ΑΒ = ΒΓ και έχουν αχθεί οι ΑΛ και ΓΛ.

Από την ισότητα των τριγώνων ΗΘΚ και ΑΒΛ, προκύπτει ότι ΗΚ =ΑΛ. Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$\Lambda\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Gamma - A\hat{B}\Lambda = A\hat{B}\Gamma - H\hat{\Theta}K < \Delta\hat{E}Z$, οπότε από τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΛΒΓ έχουμε ΛΓ < ΔΖ.

Με χρήση τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο ΑΛΓ, προκύπτει ότι:

$$A\Gamma < A\Lambda + \Lambda\Gamma = HK + \Lambda\Gamma < HK + \Delta Z,$$

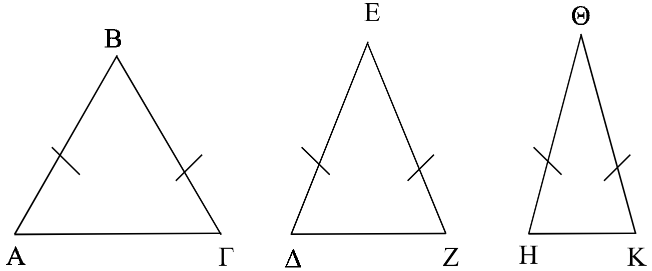
δηλαδή ότι ΑΓ < ΗΚ + ΔΖ, οπότε μπορεί να κατασκευασθεί τρίγωνο με πλευρές ΑΓ, ΗΚ, ΔΖ.

Πρόταση 23 (XI. 23)

Να κατασκευασθεί στερεά γωνία από τρεις επίπεδες γωνίες, για τις οποίες το άθροισμα δύο εξ αυτών, όπως και να ληφθούν, είναι πάντα μεγαλύτερο από την τρίτη. Όμως πρέπει το άθροισμα και των τριών γωνιών να είναι μικρότερο των τεσσάρων ορθών.

Απόδειξη

Έστω ότι οι δοθείσες γωνίες είναι οι $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$, $\mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K}$ και ότι το άθροισμα των δύο εξ αυτών, όπως και να ληφθούν, είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την τρίτη, και επιπλέον είναι $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} + \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} < 4$ ορθές. Πρέπει λοιπόν από τρεις γωνίες ίσες προς τις $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$, $\mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K}$ να κατασκευασθεί στερεά γωνία.

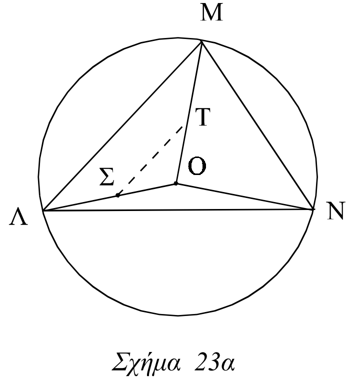


Σχήμα 23

Έχοντας ήδη λάβει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ίσες και φέροντας τις ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ είναι (επομένως) δυνατόν να κατασκευασθεί τρίγωνο, που να έχει πλευρές ίσες προς τις ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ (πρόταση 22).

Έστω ΛΜΝ το τρίγωνο που κατασκευάζεται, ούτως ώστε ΑΓ = ΛΜ, ΔΖ = ΜΝ και ΗΚ = ΝΛ. Θεωρούμε το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΛΜΝ και τις ακτίνες ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ.

Ισχυριζόμαστε ότι ΑΒ > ΟΛ.



Σχήμα 23α

Αν δεν ισχύει αυτό, τότε θα έπρεπε να συμβαίνει είτε ΑΒ = ΟΛ, είτε ΑΒ < ΟΛ.

Έστω ότι ισχύει το πρώτο, (δηλαδή ότι ΑΒ = ΟΛ). Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΛΜ έχουν ΒΑ = ΟΛ, ΒΓ = ΟΜ και ίσες βάσεις ΛΜ = ΑΓ, άρα θα είναι και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \Lambda\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M}$. Για τον ίδιο λόγο θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{N}$ και $\mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} = \mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\Lambda$.

Τότε όμως έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} + \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} = \Lambda\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M} + \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{N} + \mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\Lambda = 4 \text{ ορθές.}$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση ισχύει

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} + \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} < 4 \text{ ορθές.}$$

Επομένως, οι ΒΑ και ΟΛ δεν μπορεί να είναι ίσες.

Έστω ΑΒ < ΛΟ. Τότε μπορούμε να πάρουμε ΟΣ = ΑΒ, ΟΤ = ΒΓ και να φέρουμε την ΣΤ. Αφού ΒΓ = ΒΑ, θα είναι και ΟΣ = ΟΤ, ΛΣ = = ΜΤ, οπότε η ΣΤ θα είναι παράλληλη προς την ΛΜ και συνεπώς το τρίγωνο ΛΜΟ θα είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΣΤΟ. Έτσι ισχύει $\frac{\mathrm{O}\Lambda}{\Lambda\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{O}\Sigma}{\Sigma\mathrm{T}}$, από όπου λαμβάνεται $\frac{\mathrm{O}\Lambda}{\mathrm{O}\Sigma} = \frac{\Lambda\mathrm{M}}{\Sigma\mathrm{T}}$ (:ιδιότητα εναλλάξ). Όμως ΛΟ > ΟΣ, οπότε θα έχουμε ΛΜ > ΣΤ. Αφού όμως είναι ΛΜ = =ΑΓ, θα είναι και ΑΓ > ΣΤ. Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΣΤ είναι ΒΑ = ΟΣ, ΒΓ = ΟΤ και ΣΤ < ΑΓ. Άρα, θα είναι και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma > \Sigma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{T} = \Lambda\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M}$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} > \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{N}$ και $\mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} > \mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\Lambda$.

Επομένως $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} + \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} > \Lambda\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M} + \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{N} + \mathrm{N}\hat{\mathrm{O}}\Lambda = 4$ ορθές.

Αυτό είναι άτοπο, αφού $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} + \mathrm{H}\hat{\Theta}\mathrm{K} < 4$ ορθές. Άρα, δεν μπορεί να είναι ΑΒ < ΟΛ. Όμως, έχει αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να είναι ούτε και ΑΒ = ΟΛ. Επομένως θα είναι ΑΒ > ΛΟ.

Υψώνεται τώρα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΡ κάθετα προς το επίπεδο του κύκλου, στο σημείο Ο, έτσι ώστε να ισχύει

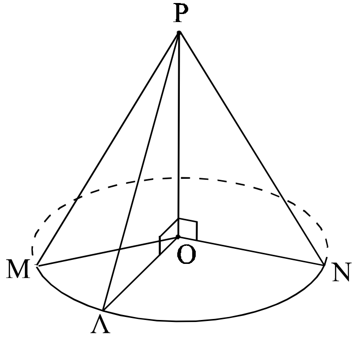
$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AB}^2 - \Lambda\mathrm{O}^2$$

και φέρονται τα ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ.

Αφού η ΟΡ είναι κάθετη προς το επίπεδο του κύκλου, σχηματίζει ορθές γωνίες με κάθε μια από τις ευθείες ΛΟ, ΜΟ, ΝΟ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΛΟΡ , ΜΟΡ , ΝΟΡ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μια, άρα είναι ίσα, οπότε ΡΛ = ΡΜ = ΡΝ.

Ακολούθως, αφού το τρίγωνο ΛΟΡ είναι ορθογώνιο, έχουμε:

$$\Lambda P^2 = O\Lambda^2 + OP^2 =$$
$$= O\Lambda^2 + AB^2 - \Lambda O^2 = AB^2.$$



Σχήμα 23β

Ομοίως το ΑΒ είναι ίσο με κάθε ένα από τα ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, και το ΡΛ ίσο προς κάθε ένα από τα ΡΜ, ΡΝ. Επομένως και κάθε ένα από τα ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ είναι ίσο με κάθε ένα από τα ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ.

Στα τρίγωνα ΛΡΜ και ΑΒΓ οι πλευρές ΛΡ, ΡΜ είναι αντίστοιχα ίσες προς τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, όπως και η βάση ΛΜ είναι ίση προς τη βάση ΑΓ. Επομένως, θα είναι $\Lambda\hat{P}M = A\hat{B}\Gamma$. Για τον ίδιο λόγο θα είναι $M\hat{P}N = \Delta\hat{E}Z$ και $\Lambda\hat{P}N = H\hat{\Theta}K$.

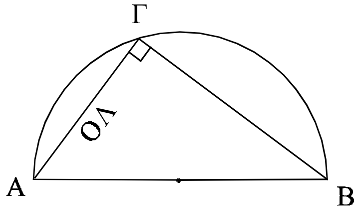
Άρα κατασκευάσθηκε στερεά γωνία με κορυφή το Ρ που περιέχεται από τις επίπεδες γωνίες $\Lambda\hat{P}M$, $M\hat{P}N$, $\Lambda\hat{P}N$, οι οποίες είναι αντίστοιχα ίσες προς τις επίπεδες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$, $\Delta\hat{E}Z$, $H\hat{\Theta}K$.

ό.ε.π.

Λήμμα

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΡ, μπορεί να ληφθεί έτσι ώστε να ισχύει:

$$\boldsymbol{OP^2 = AB^2 - \Lambda O^2.}$$



Σχήμα 23.γ

Απόδειξη

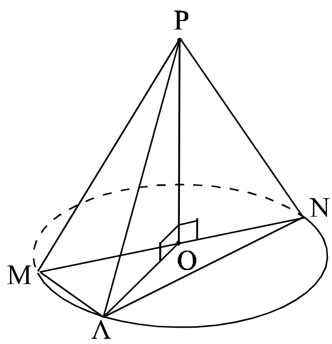
Έχοντας ότι ΑΒ > ΛΟ, με διάμετρο ΑΒ γράφεται ημικύκλιο, στο οποίο μπορεί να ληφθεί χορδή ΑΓ = ΛΟ, αφού η ΛΟ δεν είναι μεγαλύτερη της διαμέτρου. Φέρουμε και την ΓΒ.

Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη στο ημικύκλιο ΑΓΒ, άρα είναι ορθή και επομένως $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$. Άρα θα είναι και $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Gamma^2$. Αφού είναι $A\Gamma = \Lambda O$, θα ισχύει $B\Gamma^2 = AB^2 - \Lambda O^2$. Λαμβάνοντας λοιπόν $OP = B\Gamma$, έχουμε $OP^2 = AB^2 - \Lambda O^2$.

Παρατήρηση. (Η απόδειξη της πρότασης 23 σε ειδικές περιπτώσεις).

(α) *Αν το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται πάνω σε μια από τις πλευρές του τριγώνου ΛΜΝ, π.χ. στην πλευρά ΜΝ, τότε και πάλι θα ισχύει ΑΒ > ΛΟ.*

Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι μπορεί να ισχύει ΑΒ = ΛΟ. Τότε θα έχουμε ΜΝ = 2ΛΟ. Αφού όμως είναι ΜΝ= ΔΖ και ΛΟ = ΑΒ = ΕΔ = ΕΖ, στο τρίγωνο ΔΕΖ θα ισχύει ΔΖ = ΔΕ + ΕΖ, που είναι αδύνατον. Δεν μπορεί λοιπόν να έχουμε ΑΒ = ΛΟ.



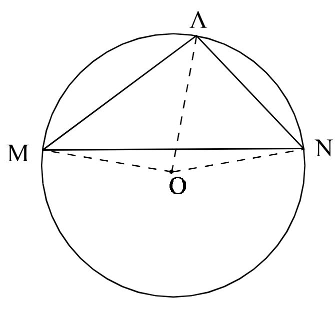
Σχήμα 23δ

Για τους ίδιους λόγους, αν συμβαίνει ΑΒ < ΛΟ, θα προκύψει η σχέση ΔΖ > ΔΕ + ΕΖ, που είναι και πάλι αδύνατο.

Άρα, πάντοτε έχουμε: ΑΒ > ΛΟ, οπότε υψώνοντας την ΟΡ κάθετη στο επίπεδο του κύκλου και έτσι ώστε να ισχύει $OP^2 = AB^2 - O\Lambda^2$, φτάνουμε στην σύνθεση του προβλήματος.

(β) *Αν το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου δε βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΛΜΝ, τότε και πάλι θα ισχύει ΑΒ > ΛΟ.*

Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι μπορεί να ισχύει ΑΒ = ΛΟ. Τότε, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΛΜΟ είναι ίσα, όπως και τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΛΝΟ.



Σχήμα 23ε

Επομένως έχουμε:

$A\hat{B}\Gamma = M\hat{O}\Lambda$ και $\Delta\hat{E}Z = \Lambda\hat{O}N$, από τις οποίες προκύπτει ότι

$A\hat{B}\Gamma + \Delta\hat{E}Z = M\hat{O}N$, γωνία η οποία βέβαια είναι ίση προς τη γωνία $\hat{H\Theta K}$. Έτσι φτάνουμε στη ισότητα

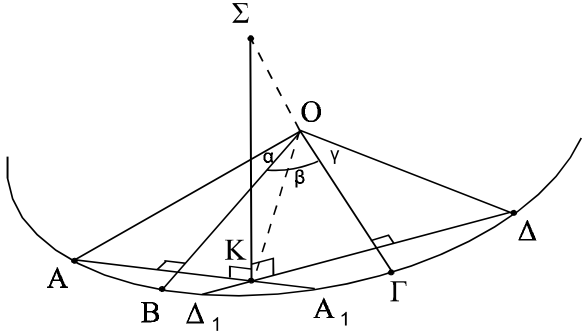
$\hat{AB\Gamma} + \hat{\Delta EZ} = \hat{H\Theta K}$, που οδηγεί σε άτοπο. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει ΑΒ = ΛΟ.

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει ΑΒ < ΛΟ, τότε με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά της κυρίως απόδειξης (δηλαδή με χρήση όμοιων τριγώνων) μπορούμε να καταλήξουμε όπως πριν σε άτοπο.

Σχόλιο. Κατασκευή τριέδρου με χρήση αναπτύγματος

Μια (συντομότερη) κατασκευή τριέδρου, που κινείται στα ίδια πλαίσια με αυτά της πρότασης 23, μπορεί να γίνει ως εξής:

Με δεδομένες τις επίπεδες γωνίες α, β, γ, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: α + β + γ < 4 ορθές, β < α + γ και υποθέτοντας ότι η β είναι η μέγιστη, κατασκευάζουμε τις γωνίες πρώτα διαδοχικές με κορυφή Ο και με τη σειρά α, β, γ και κατόπιν επίκεντρες. Λόγω της συνθήκης α+β+γ< <4 ορθές, δεν επικαλύπτεται η περιφέρεια (βλέπε σχήμα 23.1).



Σχήμα 23.1

Κατασκευάζοντας A_1 και Δ_1 ώστε οι χορδές AA_1 και $\Delta\Delta_1$ να είναι αντίστοιχα κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ, **μπορεί να αποδειχθεί** ότι οι AA_1 και $\Delta\Delta_1$ τέμνονται σε ένα σημείο Κ εντός του κύκλου, δηλαδή ΟΚ < ΟΒ.

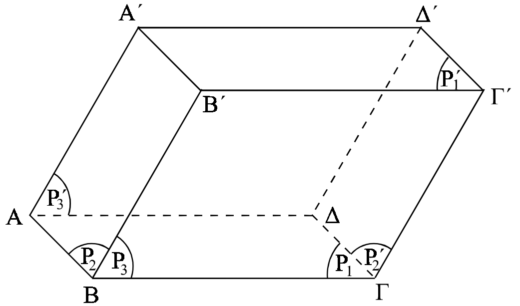
Υψώνοντας κάθετη ΚΣ στο επίπεδο, έτσι ώστε $K\Sigma^2 = OB^2 - OK^2$, προκύπτει η τρίεδρη Ο. ΣΒΓ, που μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι η ζητούμενη.

Πρόταση 24 (XI. 24)

Αν ένα εξάεδρο περιέχεται μεταξύ παράλληλων ανά δύο επιπέδων, τότε οι απέναντι έδρες του είναι παραλληλόγραμμα ίσα.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε στερεό (εξάεδρο) που περικλείεται από τα ζεύγη παράλληλων επιπέδων (P_1 = ΑΒΓΔ, P_1' = Α΄Β΄Γ΄Δ΄), (P_2 = ΑΒΒ΄Α΄, P_2' = ΓΔΔ΄Γ΄) και (P_3 = ΒΓΓ΄Β΄ , P_3' = ΑΔΔ΄Α΄). Θα αποδείξουμε ότι οι απέναντι έδρες του στερεού είναι παραλληλόγραμμα, μεταξύ τους ίσα.



Σχήμα 24

Οι τομές των επιπέδων P_1, P_1' με το P_2 θα είναι παράλληλες (πρόταση16), δηλαδή ΑΒ // Α΄Β΄. Ομοίως οι τομές των P_3, P_3' με το P_2 θα είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΑ΄// ΒΒ΄. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ είναι παραλληλόγραμμο.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι και οι υπόλοιπες έδρες του στερεού είναι παραλληλόγραμμα.

Εξάλλου οι γωνίες $B\hat{A}\Delta$, $B'\hat{A}'\Delta'$ έχουν πλευρές παράλληλες, άρα είναι ίσες (πρόταση 15). Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄ είναι ίσα, αφού ισχύουν οι σχέσεις ΑΒ = Α΄Β΄ , ΑΔ = Α΄Δ΄ και $B\hat{A}\Delta = B'\hat{A}'\Delta'$ (πρόταση Ι. 4).

Όμως το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΔ και το παραλληλόγραμμο Α΄Β΄Γ΄Δ΄, διπλάσιο του τριγώνου Α΄Β΄Δ΄. Άρα και τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ίσα.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και οι υπόλοιπες έδρες του στερεού είναι ίσες.

ὅ.ἔ.δ.

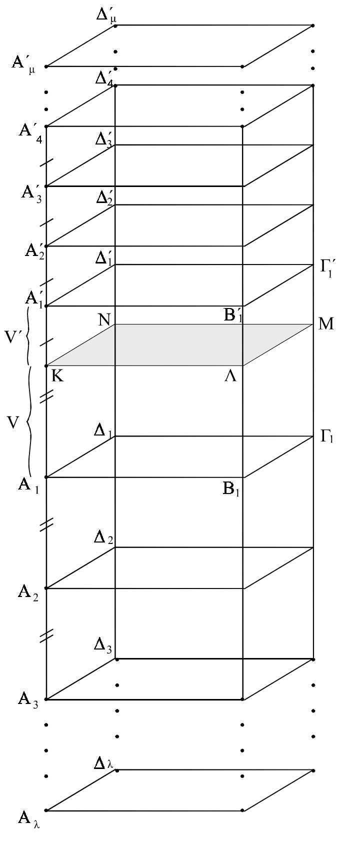
Παρατήρηση

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη η διατύπωση της πρότασης 24 αναφέρεται σε τυχαίο στερεό και όχι σε εξάεδρο. Προφανώς, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει χωρίς διευκρινίσεις, π.χ. σε πρίσμα με βάσεις κανονικά εξάγωνα.

Εξάλλου, όπως έγινε φανερό από την απόδειξη που προηγήθηκε, με τον όρο *ισότητα των απέναντι εδρών* εδώ εννοούμε όχι μόνο ισεμβαδικά αλλά και συμπτώσιμα σχήματα.

Πρόταση 25 (XI. 25)

Αν ένα παραλληλεπίπεδο τμηθεί από επίπεδο παράλληλο προς δύο απέναντι έδρες του, τότε τα δύο παραλληλεπίπεδα στα οποία διαιρείται το αρχικό είναι ανάλογα των βάσεών τους, που ορίζονται πάνω σε κάποια άλλη έδρα του αρχικού.



Σχήμα 25

Απόδειξη

Θεωρούμε μια τομή ΚΛΜΝ παράλληλη στις βάσεις $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$, $Α΄_1Β΄_1Γ΄_1Δ΄_1$ ενός παραλληλεπιπέδου.

Ας συμβολίσουμε με V, V΄ τα παραλληλεπίπεδα ΚΛΜΝ – $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$, και ΚΛΜΝ – $Α΄_1Β΄_1Γ΄_1Δ΄_1$ αντίστοιχα. Τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{V}{V'} = \frac{(ΚΑ_1Δ_1Ν)}{(ΚΑ'_1Δ'_1Ν)}$$

Πάνω στις ημιευθείες ΚΑ, ΝΔ θεωρούμε τα λ στο πλήθος ίσα μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα $ΚΑ_1$, $Α_1Α_2$, $Α_2Α_3$, … , $Α_{λ-1}$ $Α_λ$ και $ΝΔ_1$, $Δ_1Δ_2$, $Δ_2Δ_3$, . . . , $Δ_{λ-1}Δ_λ$ αντίστοιχα Επίσης, πάνω στις ημιευθείες ΚΑ΄, ΝΔ΄ τα μ ίσα τμήματα ΚΑ΄, $Α΄Α_1΄$, $Α_1΄Α_2΄$, ... , $Α΄_{μ-1}$ $Α΄_μ$, και $ΝΔ΄_1$, $Δ΄_1Δ΄_2$, $Δ΄_2$ $Δ΄_3$, . . . , $Δ΄_{μ-1}Δ΄_μ$ αντίστοιχα.

Τα παραλληλεπίπεδα με παράπλευρες ακμές τα τμήματα KA_1, A_1A_2, A_2A_3, … , $A_{\lambda-1}\,A_\lambda$ και βάσεις ίσες με την ΚΛΜΝ είναι ίσα με το V, ενώ τα παραλληλεπίπεδα με παράπλευρες ακμές KA_1', $A'_1A'_2$, $A_2'A_3'$, . . . , $A'_{\mu-1}A'_\mu$ και βάσεις ίσες με την ΚΛΜΝ είναι ίσα με το V΄.

Παρατηρούμε ακόμη ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$\lambda \cdot (KA_1\Delta_1N) > \mu\,(KA_1'\Delta_1'N) \Rightarrow$

$\Rightarrow (KA_\lambda\Delta_\lambda N) > (KA_\mu'\Delta_\mu'N) \Rightarrow$

$\Rightarrow KA_\lambda > KA_\mu' \Rightarrow \lambda \cdot V > \mu \cdot V'$ (I)

Ομοίως

$\lambda \cdot (KA_1\Delta_1\,N) < \mu\,(KA_1'\Delta_1'N) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \cdot V < \mu \cdot V'$ (II)

και

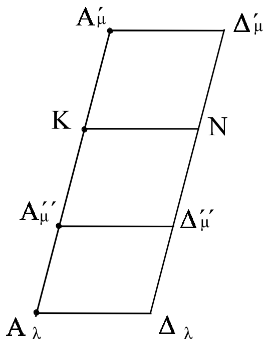
$\lambda \cdot (KA_1\Delta_1N) = \mu\,(KA_1'\Delta_1'N) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \cdot V = \mu \cdot V'$ (III)

Οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό ισότητας λόγων κατά τον Εύδοξο (V. ορισμός 5), θα έχουμε:

$$\frac{V}{V'} = \frac{(KA_1\Delta_1N)}{(KA_1'\Delta_1'N)}$$

ὅ.ἔ.δ.



Σχήμα 25α

Παρατήρηση

Οι συνεπαγωγές I, II, III της πρότασης 25 (XI.25) προκύπτουν αν πάνω στις ημιευθείες KA_λ , $N\Delta_\lambda$ πάρουμε τμήματα $KA''_\mu = KA'_\mu$, $N\Delta''_\mu = N\Delta'_\mu$ αντίστοιχα, οπότε

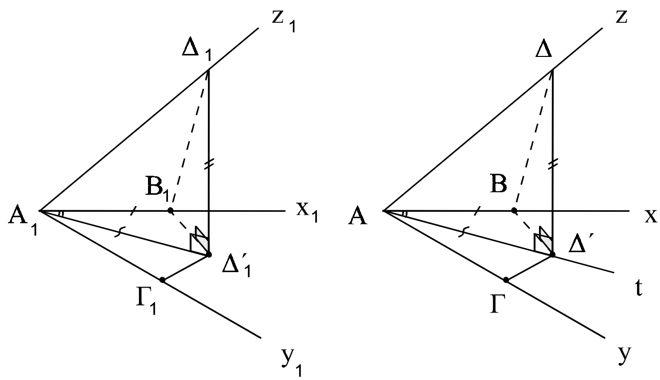
$(KA''_\mu\Delta''_\mu N) = (KA_\mu'\Delta_\mu'N)$ κ.λπ.

Πρόταση 26 (XI. 26)

Πάνω σε δοσμένη ευθεία και με ένα σημείο της ως κορυφή να κατασκευαστεί στερεά γωνία (τρίεδρη), ίση με δοσμένη στερεά γωνία.

Απόδειξη

Δίνονται η ημιευθεία Αx και η τρίεδρη $A_1.x_1y_1z_1$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ_1 της A_1z_1 και την προβολή του Δ'_1 στο επίπεδο $x_1A_1y_1$.



Σχήμα 26

Κατασκευάζουμε γωνία $x\hat{A}y$ ίση με την $x_1\hat{A}_1y_1$ και πάνω στο επίπεδο xAy τη γωνία $x\hat{A}t$ ίση με την $x_1\hat{A}_1\Delta_1'$, έτσι ώστε οι Ay, At να έχουν ως προς την Ax την ίδια θέση που έχουν οι A_1y_1, $A_1\Delta_1'$ ως προς την A_1x_1 (πρόταση Ι. 23). Πάνω στην ημιευθεία At θεωρούμε το σημείο Ζ΄, τέτοιο ώστε $A\Delta' = A_1\Delta'_1$ και το τμήμα $\Delta'\Delta = \Delta_1'\Delta_1$ κάθετο στο επίπεδο xAy (πρόταση 12). Έστω Az η ημιευθεία με αρχή Α που περιέχει το Δ. Θα δείξουμε ότι η στερεά γωνία A.xyz είναι ίση με την $A_1.x_1y_1z_1$.

Πάνω στις Ax, A_1x_1 θεωρούμε τα σημεία Β, B_1 αντιστοίχως έτσι ώστε $AB = A_1B_1$. Προφανώς η $\Delta_1\Delta'_1$ είναι κάθετη στις $\Delta_1'A_1$, $\Delta_1'B_1$ και η ΔΔ΄ κάθετη στις Δ΄Α, Δ΄Β.

Τα τρίγωνα $A_1B_1\Delta_1'$ και ΑΒΔ΄ έχουν $A_1B_1 = AB$, $A_1\Delta_1' = A\Delta'$ και $B_1\hat{A}_1\Delta_1' = B\hat{A}\Delta'$. Άρα είναι ίσα (πρόταση Ι. 4), οπότε

$$\Delta_1'B_1 = \Delta'B. \qquad (1)$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα λοιπόν $\Delta_1\Delta_1'B_1$, ΔΔ΄Β έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μία ($B_1\Delta_1' = B\Delta'$, $\Delta_1\Delta_1' = \Delta\Delta'$). Άρα είναι ίσα, οπότε

$$B_1\Delta_1 = B\Delta \qquad (2)$$

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα $A_1\Delta_1\Delta_1'$, ΑΔΔ΄ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μία ($A_1\Delta_1' = A\Delta'$, $\Delta_1\Delta_1' = \Delta\Delta'$). Άρα είναι ίσα, οπότε

$$A_1\Delta_1 = A\Delta \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $A_1B_1\Delta_1$ και ΑΒΔ (έχουν τρεις πλευρές ίσες μια προς μία). Άρα $B_1\hat{A}_1\Delta_1 = B\hat{A}\Delta$.

Εντελώς ανάλογα, αν λάβουμε υπόψη μας ότι και οι γωνίες $\Delta_1'\hat{A}_1y_1$, $\Delta'\hat{A}y$ είναι ίσες (ως αθροίσματα ή διαφορές ίσων γωνιών) και θεωρήσουμε πάνω στις Αy, A_1y_1 τα σημεία Γ, Γ_1, έτσι ώστε $A\Gamma = A_1\Gamma_1$, μπορούμε να δείξουμε ότι: $\Gamma_1\hat{A}_1\Delta_1 = \Gamma\hat{A}\Delta$.

Οι τρίεδρες λοιπόν περιέχονται από επίπεδες γωνίες ίσες και ομοίως κείμενες, οπότε θα είναι ίσες.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 27 (XI. 27)

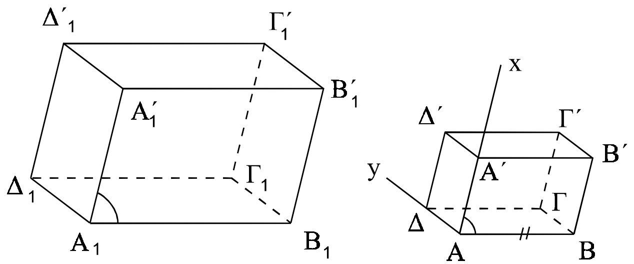
Με δοσμένη ακμή να κατασκευαστεί παραλληλεπίπεδο όμοιο και ομοίως κείμενο προς δοσμένο παραλληλεπίπεδο.

Απόδειξη

Δίδονται το τμήμα ΑΒ και το παραλληλεπίπεδο

$$A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 - A_1'B_1'\Gamma_1'\Delta_1'.$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ – Α′Β′Γ′Δ′ όμοιο και ομοίως κείμενο προς το δοσμένο.



Σχήμα 27

Σύμφωνα με την πρόταση 26, μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίεδρη γωνία Α.Βxy ίση με την $A_1.B_1A_1'\Delta_1$, τέτοια ώστε:

$$B\hat{A}x = B_1\hat{A}_1A_1' \qquad (\alpha),$$

$$x\hat{A}y = A_1'\hat{A}_1\Delta_1 \qquad (\beta),$$

και $$B_1\hat{A}_1\Delta_1 = B\hat{A}y \qquad (\gamma).$$

Πάνω στην Αx ορίζουμε το σημείο Α΄, έτσι ώστε

$$\frac{A1B1}{A1A1'} = \frac{AB}{AA'} \qquad (1)$$

(προφανώς το ΑΑ΄ λαμβάνεται ως τετάρτη ανάλογος των ευθύγραμμων τμημάτων A_1B_1, A_1A_1', ΑΒ).

Στη συνέχεια πάνω στην Αy ορίζουμε ομοίως το σημείο Δ, έτσι ώστε

$$\frac{A_1A_1'}{A_1\Delta_1} = \frac{AA'}{A\Delta} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) με εφαρμογή της ιδιότητας "*δι΄ ίσου*" (πρόταση V. 22) ή, με σημερινούς όρους, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, προκύπτει

$$\frac{A_1B_1}{A_1\Delta_1} = \frac{AB}{A\Delta} \qquad (3)$$

Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο με τρεις συντρέχουσες ακμές ΑΒ, ΑΑ΄, ΑΔ, έστω το ΑΒΓΔ – Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Από τις σχέσεις (α), (1) προκύπτει η ομοιότητα των παραλληλογράμμων ΑΒΒ΄Α΄, $A_1B_1B_1'A_1'$. Ομοίως από τις (β) , (2) η ομοιότητα των ΑΔΔ΄Α΄ , $A_1\Delta_1\Delta_1'A_1'$ και από τις (γ), (3) η ομοιότητα των ΑΒΓΔ, $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.

Επομένως και τα ζεύγη των ίσων προς αυτές απέναντι εδρών είναι επίσης όμοια και ομοίως κείμενα παραλληλόγραμμα. Το παραλληλεπίπεδο λοιπόν ΑΒΓΔ – Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς το δοσμένο.

ὅ.ἔ.δ.

5. Σχόλια πάνω στις τρίεδρες γωνίες

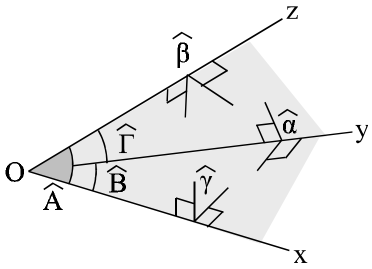
5.1. Κριτήρια ισότητας τριέδρων γωνιών.

Ως τρίεδρη στερεά γωνία θεωρήσαμε το "σχήμα" του χώρου που προκύπτει από τρεις μη συνεπίπεδες ημιευθείες (Ox, Oy, Oz) κοινής αρχής Ο. Κύρια στοιχεία της τρίεδρης στερεάς γωνίας είναι οι τρεις επίπεδες γωνίες της $(x\hat{O}y\,,\, y\hat{O}z\,,\, z\hat{O}x)$ και οι τρεις δίεδρες γωνίες της $(\hat{\alpha}\,,\,\hat{\beta}\,,\,\hat{\gamma})$.

$$(x - Oz - y)\ \hat{\beta} \leftrightarrow \hat{B}\left(x\hat{O}y\right)$$

$$(y - Ox - z)\ \hat{\gamma} \leftrightarrow \hat{\Gamma}\left(y\hat{O}z\right)$$

$$(z - Oy - x)\ \hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{A}\left(x\hat{O}z\right)$$



Σχήμα 5.1

Στις τρίεδρες στερεές γωνίες μπορεί να αποδειχθεί ότι οι επίπεδες γωνίες έχουν την ίδια σειρά μεγέθους με τις απέναντι δίεδρες γωνίες και αντιστρόφως. Έτσι, τα κύρια στοιχεία της τρίεδρης καθορίζονται και διατάσσονται "μετρικά" στο χώρο ανά δύο.

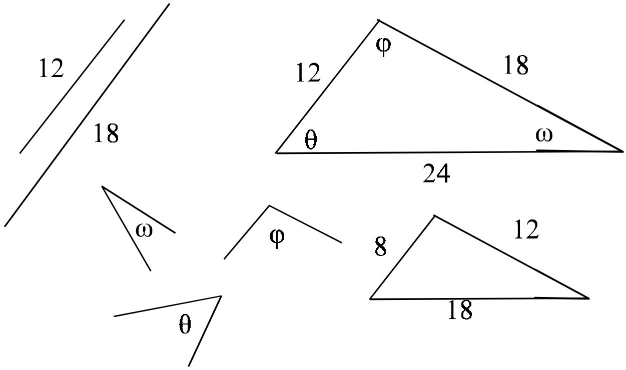
Μεταξύ των σημείων και των ευθειών στο επίπεδο υπάρχει μια αντιστοίχηση που σήμερα κατανοείται ως δυϊκότητα. Αν σε κάθε πρόταση ή σε κάθε σχήμα εναλλαγούν οι λέξεις *"σημείο"* και *"ευθεία"*, *"κείται"* και *"διέρχεται"*, *"τέμνονται"* και *"συνδέονται με"* κ.λπ., προκύπτει μια νέα "πρόταση" ή ένα νέο "σχήμα", που καλείται *δυϊκή* ή *δυϊκό* του αρχικού. Έτσι π.χ. το αξίωμα *"δύο σημεία συνδέονται με μια μοναδική ευθεία"* έχει ως δυϊκό το "αξίωμα" *"δύο ευθείες τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο"* και αντιστρόφως.

Παρόμοια κατά την μετάβαση στο χώρο και πάλι οι λέξεις *"σημείο"*, *"κορυφή"*, *"ευθύγραμμο τμήμα"*, *"πλευρά"* και *"επίπεδος γωνία"*, αντιστοιχούν με *"ευθεία"*, *"ακμή"*, *"επίπεδος γωνία"*, *"έδρα"* και *"δίεδρος γωνία"* κλπ.

Έτσι, μεταξύ τρίεδρης στερεάς γωνίας και τριγώνου, με χρήση και της δυϊκότητας δημιουργείται μια εννοιολογική συσχέτιση.

ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΒΓ	**ΤΡΙΕΔΡΗ ΓΩΝΙΑ Ο.ΑΒΓ**
πλευρά ΑΒ	επίπεδη γωνία $A\hat{O}B$
επίπεδη γωνία $A\hat{\Gamma}B$	δίεδρη γωνία Α - ΟΓ - Β

Κατ’ αυτό τον τρόπο μία σχέση ισότητας δύο τριέδρων που καθορίζεται από τα αλληλοεξαρτώμενα κύρια στοιχεία των δύο τριέδρων, μπορεί να συσχετισθεί εννοιολογικά και να "ανακαλυφθεί" από τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων, αρκεί να ξεκαθαριστεί πόσα και ποια στοιχεία αρκούν για τον πλήρη καθορισμό μιας τρίεδρης.



Σχήμα 5.2

* *Τα δύο τρίγωνα του σχήματος 5.2 έχουν δύο πλευρές με μέτρα 12 και 18 μονάδες.*

* *Είναι όμοια, αφού* $\frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{27}{18} = 1{,}5$ *οπότε* $\hat{\omega} = \hat{\Gamma}$, $\hat{\varphi} = \hat{A}$, *και* $\hat{\theta} = \hat{B}$ *αλλά οι γωνίες δεν έχουν την ίδια διάταξη (δεν είναι ίσες "μία προς μία".*

Ακόμα, έννοιες όπως *παραπληρωματική γωνία* μπορούν να επεκταθούν στο χώρο, οπότε οι επίπεδες γωνίες μιας τρίεδρης γίνονται δίεδρες της παραπληρωματικής της. Τελικά, από τα θεωρήματα κατασκευής μιας τρίεδρης από τα στοιχεία της, προκύπτει ότι είναι δυνατόν με έξη δοσμένα κύρια στοιχεία η τρίεδρη που κατασκευάζεται να μην είναι μοναδική. Αυτό δεν πρέπει να φανεί περίεργο, όταν ακόμα και η κατασκευή ενός τριγώνου από πέντε δοσμένα στοιχεία μπορεί να μην είναι μοναδική, αν ληφθούν υπόψη απαιτήσεις διάταξης των στοιχείων και προσανατολισμού στο επίπεδο.

Για την απόδειξη της μη μοναδικής τρίεδρης από τα έξι κύρια στοιχεία γίνεται επίκληση της κατά κορυφή τρίεδρης.

Οι δύο κατά κορυφή τρίεδρες έχουν:

$$x\hat{O}y = x'\hat{O}'y' , \quad y\hat{O}z = y'\hat{O}z' , \quad z\hat{O}x = z'\hat{O}x' \text{ και}$$

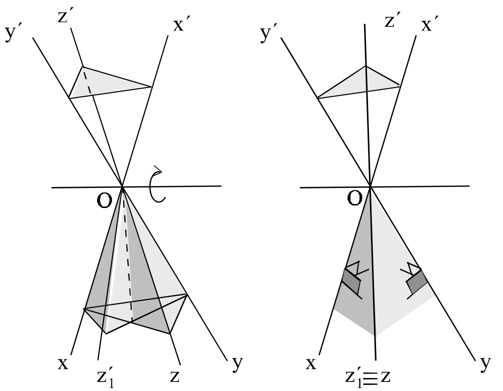
$$x - Oy - z = x' - Oy' - z'$$

$$y - Oz - x = y' - Oz' - x'$$

$$z - Ox - y = z' - Ox' - y'$$

όμως μπορεί να είναι ίσες ή συμμετρικές.

(Μπορεί να αποδειχθεί ότι γίνονται ίσες (: συμπτώσιμες) όταν δύο επίπεδες γωνίες τους είναι ίσες: ισοσκελής τρίεδρη γωνία).



Σχήμα 5.3

$$z - Ox - y \neq z - Oy - x, \quad x\hat{O}y \neq x'\hat{O}y'$$

$$z - Ox - y = z - Oy - x, \quad x\hat{O}y = x'\hat{O}y'$$

Τελικά, τα κριτήρια ισότητας δύο τριέδρων διαμορφώνονται ως εξής:

- Εάν δύο τρίεδρες γωνίες έχουν μία έδρα ίση και τις προσκείμενες σ’ αυτήν δίεδρες ανά μία ίσες, τότε αυτές είναι ίσες ή συμμετρικές

- Εάν δύο τρίεδρες έχουν δύο επίπεδες γωνίες ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές δίεδρες αντίστοιχα ίσες, τότε αυτές είναι ίσες ή συμμετρικές.

- Εάν δύο τρίεδρες γωνίες έχουν τις επίπεδες γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε αυτές είναι ίσες ή συμμετρικές.

- Εάν δύο τρίεδρες γωνίες έχουν τις δίεδρες γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε αυτές είναι ίσες ή συμμετρικές (:όμως τρίγωνα με 3 γωνίες ίσες είναι ίσα ή όμοια).

Από την παράθεση αποτελεσμάτων που προηγήθηκε μπορούμε να αποφανθούμε ότι δύο τρίεδρες στερεές γωνίες με τις επίπεδες γωνίες τους ίσες και ομοίως κείμενες είναι ίσες, δηλαδή ***συμπτώσιμες,*** όπως ακριβώς επιτάσσουν οι ορισμοί 9 και 10 του βιβλίου XI.

5.2 Κατά κορυφήν τρίεδρες γωνίες

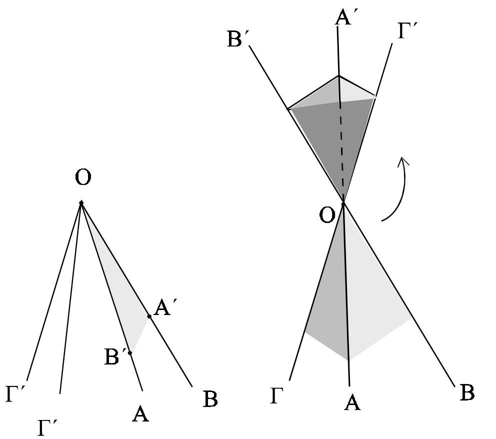
α) Η έννοια της ισότητας δύο τριέδρων συμπίπτει «διαισθητικά» με την ανθρώπινη δυνατότητα ταύτισής τους.

Όπως προκύπτει από την πρόταση 22, τρεις άνισες επίπεδες γωνίες πληρούν τις προϋποθέσεις κατασκευής μιας τριέδρης γωνίας όταν:

i) καθεμιά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και

ii) το άθροισμά τους είναι μικρότερο από 4 ορθές.

Όταν κατασκευάσουμε τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ από τρεις δοσμένες έδρες (επίπεδες γωνίες) ΟΑΒ, ΟΒΓ και ΟΑΓ, και προεκτείνουμε τις ακμές της, βρίσκουμε και την κατά κορυφήν της τρίεδρη γωνία Ο.Α΄Β΄Γ΄ (Σχήμα 5.4). Στα "*Στοιχεία*" όμως η τρίεδρη καθορίζεται αυστηρά από τις έδρες που την περιβάλλουν, οι οποίες είναι τρίγωνα. Προηγούνται δηλαδή έννοιες, όπως *κατά κορυφήν*, *παραπληρωματικές* κ.λπ.



Σχήμα 5.4

Οι δύο τρίεδρες λοιπόν που προέκυψαν, έχουν ίσες έδρες και ίσες δίεδρες, αλλά είναι άνισες, με την έννοια ότι δεν μπορούν να μετακινηθούν μέσω μιας "στερεάς" κίνησης και να γίνουν συμπτώσιμες. Θα επιχειρηθεί μια εποπτική διερεύνηση του τρόπου κίνησης και της σύμπτωσης.

β) Επειδή ο παρατηρητής βρίσκεται στο χώρο, μπορεί να θεωρεί ακίνητη την τρίεδρη Ο.ΑΒΓ και να κινεί την Ο.Α΄Β΄Γ΄ για να ελέγξει αν συμπίπτει με την δοθείσα σταθερή τρίεδρη. Υπάρχουν όμως, σε αντίθεση με τα προβλήματα στο επίπεδο, πολλές δυνατότητες να γίνει αυτή η στερεά κίνηση στο χώρο.

Στρέφοντας π.χ. τη γωνία $O\hat{A}'B'$ κατά 180^o, ώστε να συμπέσει με την $O\hat{A}B$, η ΟΓ΄ περνά από τον ημιχώρο που βρισκόταν ως προς το επίπεδο Α΄Β΄ΟΑΒ στον ημιχώρο που βρίσκεται η ΟΓ (Σχ. 5.4).

Το αν η ΟΓ΄ θα συμπέσει ή όχι με την ΟΓ εξαρτάται από το αν η χάραξη μιας ημιευθείας από το Ο που να σχηματίζει δοσμένες γωνίες με τις ΟΑ και ΟΒ είναι μοναδική στο χώρο.

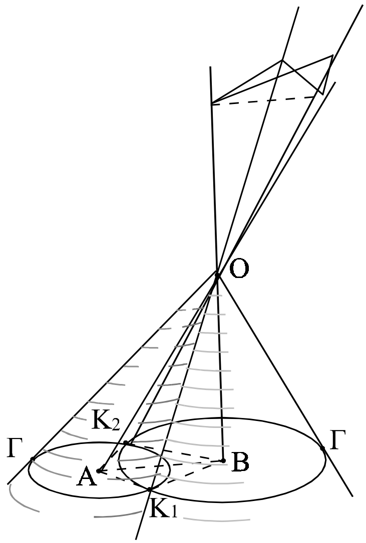
Όλες οι ημιευθείες που σχηματίζουν με την ΟΑ γωνία ίση με την $A\hat{O}\Gamma$ βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια ενός κώνου με άξονα ΟΑ (Σχ. 5.5).

Ομοίως, οι ημιευθείες που σχηματίζουν με την ΟΒ γωνία ίση με τη $B\hat{O}\Gamma$ βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια ενός κώνου με άξονα ΟΒ.

Οι δύο κώνοι τέμνονται κατά δύο ευθείες OK_1 και OK_2, αφού

$$A\hat{O}\Gamma + B\hat{O}\Gamma > A\hat{O}B.$$

Έτσι, από τις έδρες $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma$ σχηματίζονται δύο τρίεδρες, οι $O.AK_1B$ και η $O.AK_2B$, οπότε η ακμή ΟΓ΄ της κατά κορυφήν τρίεδρης δεν συμπίπτει με την ακμή ΟΓ της αρχικής.



Σχήμα 5.5

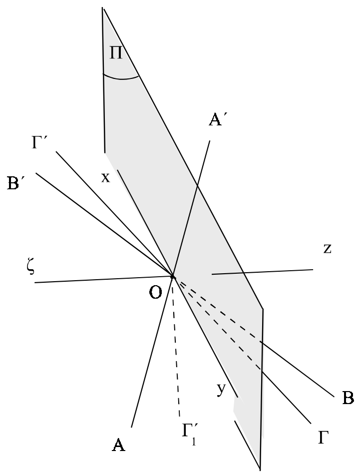
Σημείωση

Το επίπεδο που διέρχεται από την ΑΒ και τέμνει τους δύο κώνους κατά ελλείψεις, χρησιμοποιήθηκε για εποπτικούς λόγους. Η πλήρης μελέτη του προβλήματος απαιτεί τη χρήση μετασχηματισμών στο χώρο, κάτι που χρησιμοποίησε συστηματικά ο Euler στη μελέτη της κίνησης ενός στερεού σώματος.

γ) Στη συνέχεια θα υποδειχθεί μια διαδικασία που επεκτείνει στο χώρο τη διαδικασία για την σύμπτωση στο επίπεδο δύο τριγώνων με ίσα ζεύγη ομόλογων πλευρών και που διευκρινίζει τη δυνατότητα σύμπτωσης δύο κατά κορυφήν ισοσκελών τριέδρων.

Φέρουμε τη διχοτόμο xy των κατά κορυφή εδρών ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄ και επίπεδο (Π) κάθετο στο επίπεδο των εδρών ΟΑΒ, ΟΑ΄Β΄, που να το τέμνει κατά την xy (Σχ. 5.6). Η τρίτη ακμή ΟΓ και η προέκτασή της βρίσκονται σε δύο διαφορετικούς ημιχώρους (Π) - Β και (Π) - Β΄ αντίστοιχα (αν η ακμή Γ΄ΟΓ βρισκόταν επί του (Π), η τρίεδρη θα ήταν ισοσκελής).

Φέρουμε την ευθεία z κάθετη στο (Π) στο σημείο Ο. Αν στρέψουμε τη γωνία $\widehat{ΟΑ'Β'}$ κατά 180^o στο χώρο γύρω από τον άξονα ζz, ώστε η ημιευθεία ΟΑ΄ να συμπέσει με την ΟΒ και η ΟΒ΄ με την ΟΑ, τότε η σταθερή κατά θέση (στο χώρο) ΟΓ΄ θα ξαναβρεθεί στον ίδιο ημιχώρο (Π) - Β΄ που ήταν αρχικά. Έτσι, η $ΟΓ_1'$ που αποτελεί τη νέα θέση της ΟΓ, δε συμπίπτει με την ΟΓ, αφού βρίσκονται σε δύο διαφορετικούς ημιχώρους.



Σχήμα 5.6

Θα παρατηρήσουμε ότι μια ανάλογη διαδικασία στο επίπεδο οδηγεί πάντα στην ταύτιση δύο τριγώνων που έχουν τις τρεις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες (χωρίς να λαμβάνονται υπόψη απαιτήσεις προσανατολισμού). Εδώ όμως χρειάζεται να βγούμε έξω από το επίπεδο για να αναπτυχθεί η ταύτιση στον περιβάλλοντα χώρο.

6. Μέτρηση παραλληλεπιπέδων και τριγωνικών πρισμάτων

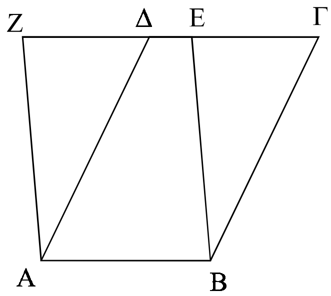
Η σύγκριση των ευθύγραμμων σχημάτων στο επίπεδο εντάσσεται στο λογικό σχήμα: ***Ισότητα – ομοιότητα – εμβαδόν.***

Σύμφωνα με αυτή την κλιμάκωση, όταν δύο σχήματα δεν είναι συμπτώσιμα, μπορεί να είναι όμοια και όταν δεν εμπίπτουν στις απαιτήσεις της ομοιότητας, μπορούν να συγκριθούν ως προς την επιφάνεια που περικλείουν. Η ορθότητα αυτής της επιλογής δικαιώνεται από αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως το "*στοιχειώδες της θεωρίας του εμβαδού στην επίπεδη Γεωμετρία*", και που αποδείχθηκε μόλις στο τέλος του 19^{ου} αιώνα.

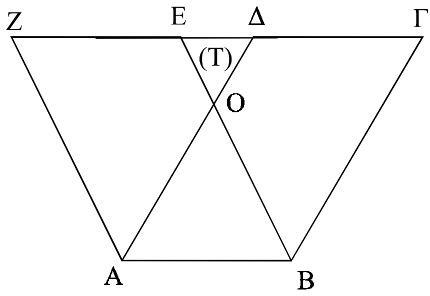
Η σχετική θεωρία θεμελιώνεται και αναπτύσσεται επιτυχώς στα βιβλία Ι και ΙΙ των *Στοιχείων*. Η επέκταση και ανάπτυξη του αντίστοιχου σχήματος στο χώρο, συμπεριλαμβάνοντας την έννοια ***όγκος***, παρουσιάζει ανυπέρβλητες δυσκολίες. Όμως, αν περιοριστούμε σε παραλληλεπίπεδα, αναπτύσσεται μια ικανοποιητική θεωρία, σε πλήρη αναλογία με το επίπεδο. Αυτό ακριβώς είναι και το αντικείμενο των προτάσεων 28 μέχρι 39. Σε αυτά τα πλαίσια η ισότητα στερεών, όταν δεν είναι σύμπτωση, εννοείται ως ισότητα όγκων, δηλαδή "ισοδυναμία". Έτσι αποδεικνύεται ότι *"Ο λόγος (των όγκων) δύο όμοιων παραλληλεπιπέδων είναι ο κύβος του λόγου ομοιότητας"* (πρόταση 33), όπως και ότι *"Σε δύο ίσα (:ίσων όγκων) παραλληλεπίπεδα οι βάσεις είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών"* (πρόταση 34).

Με σημερινή ορολογία σ’ αυτή τη διατύπωση εμπλέκονται τα μεγέθη *"μήκος"*, *"εμβαδόν"*, *"όγκος"*, που σχετίζονται με ευθύγραμμα τμήματα, επίπεδα και στερεά σχήματα αντίστοιχα. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί η απουσία συμπερασμάτων που αποτελούν σήμερα "άμεση" γνώση σε προσεγγίσεις που επικεντρώνονται στη μέτρηση, όπως π.χ. ότι σε ένα παραλληλεπίπεδο το γινόμενο εμβαδού βάσης και ύψους είναι σταθερό.

Για να γίνει κατανοητή η διαπραγμάτευση των εννοιών στις προτάσεις που ακολουθούν θα πρέπει να κάνουμε μια σύντομη αναδρομή στον τρόπο χειρισμού του εμβαδού των ευθύγραμμων επίπεδων σχημάτων. Οι απαρχές μιας συνθετικής ανάπτυξης της θεωρίας του Εμβαδού για τα επίπεδα σχήματα βρίσκονται ήδη στο βιβλίο Ι των *Στοιχείων* (μετά την πρόταση 35). Εκεί συγκρίνονται παραλληλόγραμμα με την ίδια βάση και ίσα ύψη και ακολουθείται (με σύγχρονη ορολογία) η εξής διαδικασία, όπου εντός παρενθέσεως σημειώνονται τα χωρία του επιπέδου που υποδηλώνουν τα αντίστοιχα γράμματα.



Σχήμα Α



Σχήμα Β

Στην πρώτη περίπτωση (Σχ.Α)	Στη δεύτερη περίπτωση (Σχ. Β)
$\Pi_1 = (ΑΒΓΔ)$, $\Pi_2 = (ΑΒΕΖ)$ $Τ = (ΑΒΕΔ)$, $Τ_2 = (ΖΔΑ)$ $Τ_1 = (ΕΓΒ)$ $\Pi_1 = Τ_1 + Τ$ $\Pi_2 = Τ_2 + Τ$, Όμως, τρίγωνο (ΖΔΑ) = = τρίγωνο (ΕΓΒ), οπότε $Τ_1 = Τ_2$, και έτσι $\Pi_1 = \Pi_2$	$\Pi_1 = (ΑΒΓΔ)$, $Τ = (ΕΔΟ)$, $Τ_1 = (ΕΓΒ)$, $Τ' = (ΑΟΒ)$ $Τ_2 = (ΖΔΑ)$, $\Pi_2 = (ΑΒΕΖ)$ $\Pi_1 + Τ = Τ_1 + Τ'$, $\Pi_2 + Τ = Τ_2 + Τ'$ Όμως, τρίγωνο (ΕΓΒ) = = τρίγωνο (ΖΔΑ), οπότε $Τ_1 = Τ_2$, και έτσι $\Pi_1 = \Pi_2$

Τα πιο πάνω υποδεικνύουν ότι το εμβαδόν μπορούμε να το χειρισθούμε ως μέγεθος, όπου:

(α) Ίσα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά.

(β) Το εμβαδόν είναι θετικό και προσθετικό με την εξής έννοια: Όταν ένα σχήμα διαμεριστεί *κατά αποδεκτό τρόπο,* το εμβαδόν του σχήματος προκύπτει ως το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων της διαμέρισης.

Η αρχή (β) λειτούργησε στην περίπτωση που μόλις παρουσιάστηκε με δύο τρόπους:

($β_1$) *Ισοδιαχωρίσιμα χωρία,*

όπου το ζητούμενο εμβαδόν προέκυψε από άθροισμα εμβαδών ίσων σχημάτων (Σχ. Α)

($β_2$) *Ισοσυμπληρώσιμα χωρία,*

όπου το ζητούμενο εμβαδόν προέκυψε αφού το σχήμα συμπληρώθηκε, ώστε να προκύψει άθροισμα ίσων σχημάτων (Σχ. Β)

Οι διαδικασίες (α) και (β) μπορούν με τις αναγκαίες παραδοχές να επεκταθούν σε (κυρτά) πολυγωνικά χωρία, οπότε οδηγούν σε πολύγωνα ισοδιαχωρίσιμα και σε πολύγωνα ισοσυμπληρώσιμα. Χρησιμοποιώντας τριγωνοποιήσεις και την αρχή του Αρχιμήδη-Ευδόξου, μπορεί να αποδειχθεί ότι τα ισοδιαχωρίσιμα χωρία είναι ισοσυμπληρώσιμα και αντιστρόφως.

Η μετάβαση στη μέτρηση απαιτεί την κατασκευή μιας *συνάρτησης εμβαδού*. Η ιδέα για την κατασκευή της βρίσκεται στον ορισμό του εμβαδού πρώτα στα τρίγωνα και κατόπιν την επέκταση (προσθετικά) στα πολυγωνικά χωρία, μέσω τριγωνοποιήσεων. Πράγματι, αυτό επιτυγχάνεται παρατηρώντας ότι σε ένα τρίγωνο το γινόμενο μιας πλευράς και του αντίστοιχου σ' αυτήν ύψους είναι ανεξάρτητο από τη θεωρούμενη πλευρά. Τότε ορίζουμε το εμβαδόν στα τρίγωνα μέσω του γνωστού τύπου:

$$\text{εμβαδόν} = \frac{1}{2}\,(\text{βάση}) \cdot (\text{ύψος}).$$

Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός πολυγώνου ως το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων μιας τριγωνοποίησης, αφού βέβαια αποδειχθεί ότι είναι ανεξάρτητο από την τριγωνοποίηση.

Η θεωρία του εμβαδού στο επίπεδο που αναπτύσσεται με αυτόν τον τρόπο είναι *στοιχειώδης* με την ακόλουθη έννοια: Δύο πολυγωνικά χωρία είναι ισεμβαδικά ακριβώς τότε, αν είναι ισοδιαχωρίσιμα (άρα και ισοσυμπληρώριμα). Σε μια απλή, εντυπωσιακή (αλλά ισοδύναμη) διατύπωση: *Ισεμβαδικά πολυγωνικά χωρία (χωρία με το ίδιο εμβαδόν) μπορούν να διαμερισθούν στον ίδιο αριθμό ίσων τριγώνων.*

Η ανάπτυξη μιας αντίστοιχης θεωρίας μέτρησης στο χώρο παρουσιάζει δυσκολίες και τελικά αποδείχθηκε ότι δεν μπορεί να υπάρξει στοιχειώδης θεωρία όγκου στο χώρο. Μια σύνοψη της όλης κατάστασης έχει ως εξής:

(1) Στο συνθετικό μέρος της προσέγγισης, αντικαθιστώντας τα τρίγωνα με τετράεδρα αποδείχθηκε (το 1943 από τον Sylder) ότι ισοσυμπληρώσιμα πολύεδρα είναι και ισοδιαχωρίσιμα.

(2) Όσον αφορά στην κατασκευή μιας συνάρτησης όγκου, αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας τον όγκο στο τετράεδρο ως το $\frac{1}{3}$ του γινομένου του εμβαδού μιας έδρας και του αντίστοιχου σ' αυτήν ύψους. Κατόπιν, επεκτείνεται στα πολύεδρα με χρήση διαμερίσεων σε τετράεδρα.

(3) Αυτή η κατασκευή έχει ως συνέπεια, παραλληλεπίπεδα (ή και πρίσματα) με ίσους όγκους να είναι ισοδιαχωρίσιμα Όμως, όπως απο-

δεικνύεται με χρήση αποτελεσμάτων του M. Dehn, ένα κανονικό τετράεδρο δεν μπορεί να είναι ισοδιαχωρίσιμο με ένα κύβο του ίδιου όγκου. (Βλέπε και σχόλιο μετά την πρόταση 39).

Επομένως, η θεωρία μέτρησης στο χώρο που αναπτύσσεται κατ' αυτό τον τρόπο δεν είναι στοιχειώδης, πέραν των πρισμάτων. Για μια συστηματική μελέτη απαιτούνται *μέθοδοι εξάντλησης* ή χρήση της *αρχής του Cavallieri* (δηλαδή απειροστικός λογισμός).

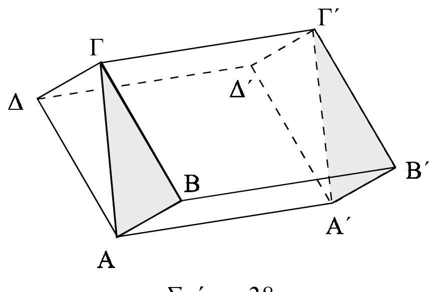
Το αξιοθαύμαστο έγκειται στο γεγονός ότι το XI βιβλίο των *Στοιχείων* (που διαπραγματεύεται τη σύγκριση των πρισμάτων) σταματά εκεί ακριβώς που απαιτείται η αλλαγή των μεθόδων, ενώ η *μέθοδος της εξάντλησης* εφαρμόζεται στο βιβλίο XII.

Πρόταση 28 (XI. 28)

Αν παραλληλεπίπεδο τμηθεί από το επίπεδο το οποίο διέρχεται από τις διαγώνιες δύο απέναντι εδρών του, τότε διαιρείται σε δύο ίσα (: ισοδύναμα) πρίσματα.

Απόδειξη

Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ – Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και τις διαγώνιες ΑΓ, Α΄Γ΄ δύο βάσεών του. Τα πρίσματα ΑΒΓ – Α΄Β΄Γ΄ και ΑΔΓ – Α΄Δ΄Γ΄ είναι ίσα, αφού οι έδρες τους είναι μια προς μια ίσες και παράλληλες ή ταυτιζόμενες.



Σχήμα 28

Παρατήρηση

Ο ρόλος της πρότασης 28 είναι θεμελιώδης σε ό,τι ακολουθεί.

Όπως τονίσθηκε η θεωρία της σύγκρισης των παραλληλεπιπέδων και των πρισμάτων αναπτύσσεται σε πλήρη αντιστοιχία με την θεωρία σύγκρισης παραλληλογράμμων και τριγώνων από το πρώτο βιβλίο, με το επιπλέον γεγονός της συστηματικής χρήσης σχέσεων ομοιότητας και αναλογιών που αυτή συνεπάγεται.

Στην εισαγωγική πρόταση 28, ένα παραλληλεπίπεδο διαιρείται σε δύο τριγωνικά πρίσματα, όπως ένα παραλληλόγραμμο διαιρείται (από μία διαγώνιο) σε δύο (ίσα) τρίγωνα. Όμως, τα πρίσματα που προκύπτουν, όντας συμμετρικά, *δεν μπορεί να είναι συμπτώσιμα*. Έτσι το αποτέλεσμα που προκύπτει οφείλει να ερμηνευθεί στα πλαίσια που θέτει ο ορισμός 10 και με σημερινούς όρους να αποδοθεί *ως ισοδυναμία,* δηλαδή *ισότητα όγκων*.

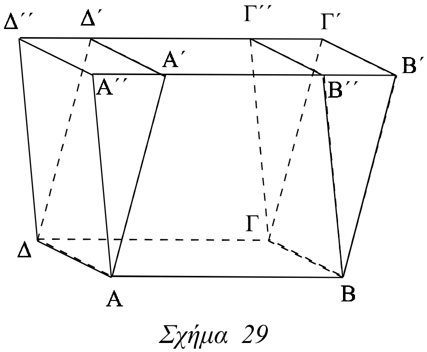
Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται το συμπέρασμα είναι καταλυτικός. Επιτρέπει μια συνθετική προσέγγιση της θεωρίας του όγκου, όπως έγινε και με το εμβαδόν και τελικά την αντιμετώπισή του ως μεγέθους.

Με την πρόταση 34 ολοκληρώνεται η θεωρία για τα παραλληλεπίπεδα, αφού με χρήση της μπορεί να αποδειχθεί ότι σε ένα παραλληλεπίπεδο το γινόμενο της βάσης και του ύψους που αντιστοιχεί σ' αυτή είναι σταθερό.

Πρόταση 29 (XI. 29)

Αν δύο παραλληλεπίπεδα έχουν μια βάση κοινή, το ίδιο ύψος και οι ακμές που διέρχονται από τις κορυφές αυτής της βάσης καταλήγουν στις ίδιες ευθείες, τότε είναι ίσα (: ισοδύναμα).

Απόδειξη



Σχήμα 29

Θεωρούμε τα παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και ΑΒΓΔ - Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄, που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Τότε από τα παραλληλόγραμμα ΑΒΒ΄Α΄ και ΑΒΒ΄΄Α΄΄ έχουμε:
Α΄Β΄ = ΑΒ = Α΄΄Β΄΄ (Ι.34), οπότε Α΄Α΄΄ = Β΄Β΄΄ και αφού ΑΑ΄= = ΒΒ΄, ΑΑ΄΄ = ΒΒ΄΄ τα τρίγωνα ΑΆΆ΄΄ , ΒΒ΄Β΄΄ θα είναι ίσα (έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία).

Ομοίως τα τρίγωνα ΔΔ΄Δ΄΄, ΓΓ΄Γ΄΄ είναι ίσα, καθώς και τα παραλληλόγραμμα ΑΔΔ΄΄Α΄΄, ΑΓΓ΄΄Β΄΄.

Τέλος, τα τετράπλευρα Α΄Δ΄Δ΄΄Α΄΄ και Β΄Γ΄Γ΄΄Β΄΄ είναι ίσα (έχουν τις πλευρές ίσες μία προς μία, καθώς και τις γωνίες τους).

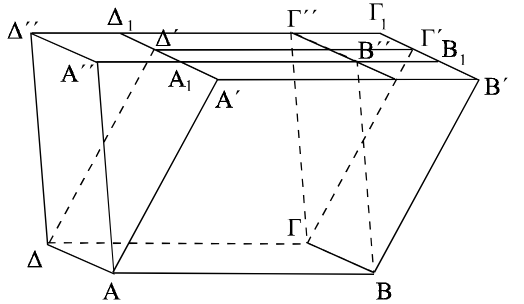
Τα πρίσματα λοιπόν ΑΆΆ΄΄ - ΔΔ΄Δ΄΄ και ΒΒ΄Β΄΄ - ΓΓ΄Γ΄΄ είναι ίσα. Αν προστεθεί σ' αυτά το στερεό που περικλείεται από τις έδρες ΑΒΓΔ, Α΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄, ΑΔΔ΄Α΄, ΒΓΓ΄΄Β΄΄, θα προκύψει η ισότητα (ισοδυναμία) των αρχικών παραλληλεπιπέδων.

Πρόταση 30 (XI.30)

Αν δύο παραλληλεπίπεδα έχουν κοινή βάση, το ίδιο ύψος και οι ακμές που διέρχονται από τις κορυφές αυτής της βάσης δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες, τότε είναι ίσα (: ισοδύναμα).

Απόδειξη

Θεωρούμε τα παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔ-Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και ΑΒΓΔ - Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄, που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Έστω $Γ_1$ το σημείο τομής των Δ΄΄Γ΄΄ και Β΄Γ΄, $Β_1$ το σημείο τομής των Α΄΄Β΄΄ και Β΄Γ΄ αντίστοιχα. Ορίζονται τα σημεία $Α_1$ και $Δ_1$, οπότε προκύπτει το στερεό ΑΒΓΔ – $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$.



Σχήμα 30

Σύμφωνα με την πρόταση 29 έχουμε (ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = = (ΑΒΓΔ - $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$), αφού οι ακμές τους που διέρχονται από τις κορυφές της βάσης ΑΒΓΔ καταλήγουν στις ίδιες ευθείες Α΄Δ΄, Β΄Γ΄ .

Επίσης, (ΑΒΓΔ - Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄) = (ΑΒΓΔ - $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$), αφού οι ακμές τους που διέρχονται από τις κορυφές της βάσης ΑΒΓΔ καταλήγουν στις ίδιες ευθείες Α΄΄Β΄΄, Γ΄΄Δ΄΄.

Άρα (ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = (ΑΒΓΔ - Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄).

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 31 (XI. 31)

Αν δύο παραλληλεπίπεδα έχουν ίσες βάσεις και τα ύψη που αντιστοιχούν σ’ αυτές ίσα, τότε αυτά είναι ίσα (:ισοδύναμα).

Απόδειξη

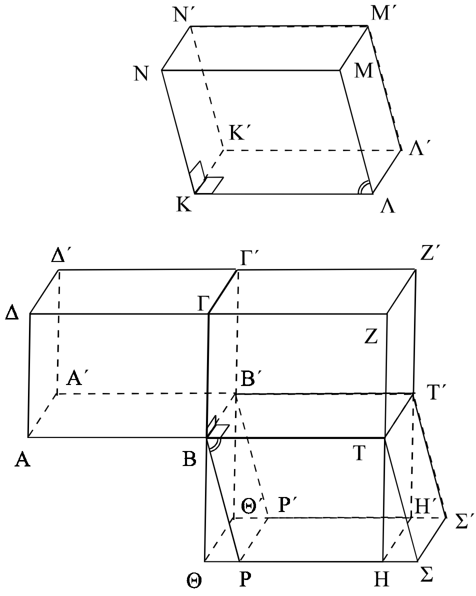
Θεωρούμε τα παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ με βάσεις ΑΒΓΔ = ΚΛΜΝ και τα επ’ αυτών ύψη ίσα. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι τα παραλληλεπίπεδα αυτά είναι ισοδύναμα.

α) Υποθέτουμε αρχικά ότι τα παραλληλεπίπεδα είναι ορθά, δηλαδή ΑΑ΄⊥ ΑΒΓΔ και ΚΚ΄ ⊥ ΚΛΜΝ και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

ΑΒ // ΚΛ. Έστω ΒΤΣΡ παραλληλόγραμμο με το σημείο Τ στην προέκταση της ημιευθείας ΒΑ τέτοιο, ώστε $Τ\hat{Β}Ρ = Κ\hat{Ν}Μ$ και ΒΤ = ΚΛ.

Τότε τα παραλληλόγραμμα ΒΤΣΡ και ΚΛΜΝ είναι ίσα και όμοια. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο, ΒΤΣΡ-Β΄Τ΄Σ΄Ρ΄.

Αφού $Β'\hat{Β}Τ = Κ'\hat{Κ}Λ$ (= 1 ορθή) και ΒΒ΄= ΚΚ΄ (ως ύψη των αρχικών παραλληλεπιπέδων), τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΒΤΤ΄Β΄, ΚΛΛ΄Κ΄ θα είναι ίσα και όμοια (συμπτώσιμα).



Σχήμα 31

Για τον ίδιο λόγο τα ΒΒ΄Ρ΄Ρ , ΝΝ΄Κ΄Κ είναι ίσα και όμοια.

Τα παραλληλεπίπεδα λοιπόν ΒΡΣΤ - Β΄Ρ΄Σ΄Τ΄ και ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ είαι ίσα και όμοια, αφού όλες οι έδρες τους είναι ίσες και όμοιες και τα επίπεδα τους παράλληλα ένα προς ένα (αφού ΑΒ // ΚΛ και ΑΑ΄ // ΚΚ΄).

Έστω Θ το σημείο τομής των ΒΓ, ΡΣ και το παραλληλόγραμμο ΒΤΗΘ. Αν Ζ το σημείο τομής της ΓΔ με την ΤΗ, τότε τα παραλληλεπίπεδα ΒΘΗΤ - Β΄ΘΗ΄Τ΄ και ΒΡΣΤ - Β΄Ρ΄Σ΄Τ΄ είναι ίσα (πρόταση 29) , οπότε θα είναι και

(ΒΘΗΤ - Β΄Θ΄΄Η΄Τ΄) = (ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄) (i)

Αλλά είναι (ΒΡΣΤ) = (ΒΘΗΤ) (πρόταση Ι.35), άρα θα έχουμε και (ΒΘΗΤ) = (ΑΒΓΔ).

Όμως ισχύει (πρόταση V.7) $$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΒΓΖΤ)} = \frac{(ΒΘΗΤ)}{(ΒΓΖΤ)} \qquad (1)$$

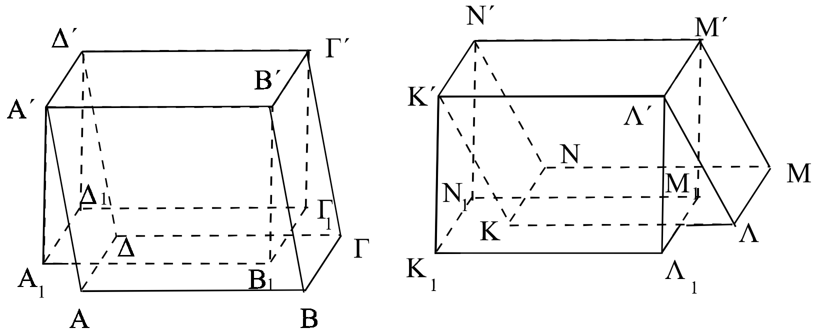
Επίσης, αφού το επίπεδο ΒΒ΄Γ΄Γ είναι παράλληλο στις βάσεις του παραλληλεπίπεδου ΑΑ΄Δ΄Δ - ΤΤ΄Ζ΄Ζ , σύμφωνα με την πρόταση 25, θα είναι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΒΓΖΤ})} = \frac{(\text{ΑΒΓΔ - Α}'\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}')}{(\text{ΒΓΖΤ} - \text{Β}'\text{Γ}'\text{Ζ}'\text{Τ}')} \qquad (2)$$

Εντελώς όμοια, αφού το επίπεδο ΒΒ΄Τ΄Τ είναι παράλληλο στις βάσεις του παραλληλεπίπεδου ΘΗΗ΄Θ΄- ΓΖΖ΄Γ΄, θα έχουμε:

$$\frac{(\text{ΒΘΗΤ})}{(\text{ΒΓΖΤ})} = \frac{(\text{ΒΘΗΤ} - \text{Β}'\text{Θ}'\text{Η}'\text{Τ}')}{(\text{ΒΓΖΤ} - \text{Β}'\text{Γ}'\text{Ζ}'\text{Τ}')} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι
(ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = (ΒΘΗΤ - Β΄Θ΄Η΄Τ΄), επομένως θα έχουμε και
(ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = (ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄), λόγω της (i).



Σχήμα 31 α

β) Αν τα παραλληλεπίπεδα δεν ήταν και τα δύο ορθά, δηλαδή: ΑΑ΄ δεν είναι κάθετη στο ΑΒΓΔ ή ΚΚ΄ δεν είναι κάθετη στο ΚΛΜΝ, τότε προβάλλοντας ορθά τις έδρες Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ επί των ΚΛΜΝ, ΑΒΓΔ αντίστοιχα, δημιουργούμε τα ορθά παραλληλεπίπεδα $Κ_1Λ_1Μ_1Ν_1$ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ και $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Όμως, ($Κ_1Λ_1Μ_1Ν_1$ -Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄) = (ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄) και
($Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = (ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) (πρόταση 30) και
($Κ_1Λ_1Μ_1Ν_1$ - ΚΛΜΝ) = ($Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ - ΑΒΓΔ) σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση των ορθών παραλληλεπιπέδων.

Άρα και πάλι θα έχουμε

(ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄) = (ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄).

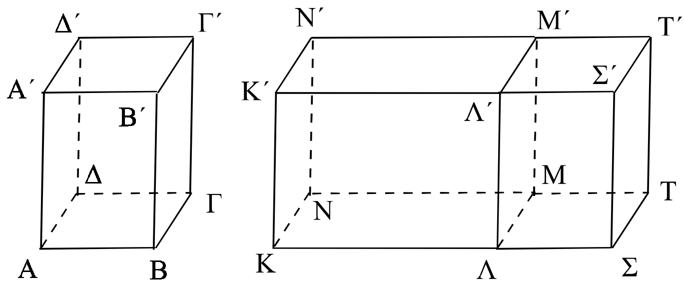
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 32 (XI. 32)

Δύο παραλληλεπίπεδα με ίσα ύψη είναι ανάλογα των βάσεών τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ με ίσα ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις ΑΒΓΔ, ΚΛΜΝ. Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ανάλογα των βάσεων τους ΑΒΓΔ, ΚΛΜΝ.



Σχήμα 32

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΜΛΣΤ ίσο με το ΑΒΓΔ, όπου το Σ ανήκει στην προέκταση της ημιευθείας ΛΚ (πρόταση Ι.45), και συμπληρώνουμε το σχήμα ώστε να προκύψει παραλληλεπίπεδο ΜΛΣΤ - Μ΄Λ΄Σ΄Τ΄ ίσο (ισοδύναμο) με το ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄, σύμφωνα με την πρόταση 31 (έχουν ισοδύναμες βάσεις και ίσα ύψη).

Αφού το επίπεδο ΜΛΛ΄Μ΄ είναι παράλληλο στις βάσεις του παραλληλεπιπέδου ΚΝΝ΄Κ΄ - ΣΤΤ΄Σ΄, θα έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{K\Lambda MN - K'\Lambda'M'N'})}{(\mathrm{M\Lambda\Sigma T - M'\Lambda'\Sigma'T'})} = \frac{(\mathrm{K\Lambda MN})}{(\mathrm{M\Lambda\Sigma T})} \quad \text{(πρόταση 25).}$$

Αλλά έχουμε (ΜΛΣΤ) = (ΑΒΓΔ) και

(ΜΛΣΤ - Μ΄Λ΄Σ΄Τ΄) = (ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄).

Άρα θα ισχύει $\frac{(\mathrm{K\Lambda MN})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \frac{(\mathrm{K\Lambda MN - K'\Lambda'M'N'})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta - A'B'\Gamma'\Delta'})}$

ὅ.ἔ.δ.

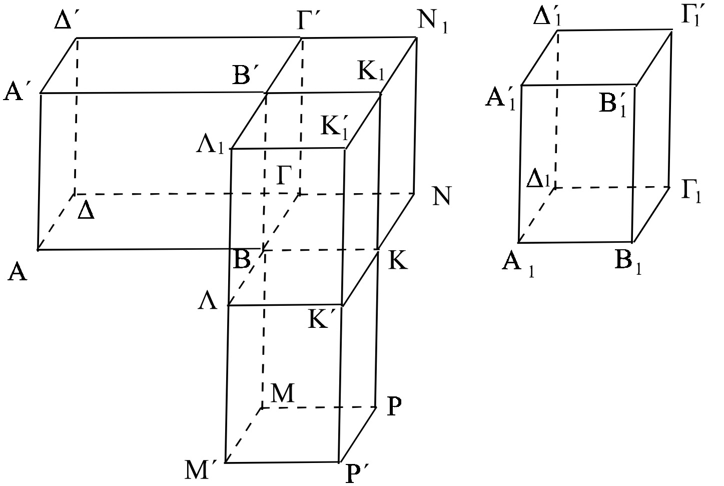
Πρόταση 33 (XI. 33)

Ο λόγος δύο ομοίων παραλληλεπιπέδων ισούται με το λόγο των κύβων των ομόλογων ακμών τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα όμοια παραλληλεπίπεδα V = ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και V_1 = $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ - $Α_1΄Β_1΄Γ_1΄Δ_1΄$, όπου (ΑΒ, $Α_1Β_1$) , (ΑΔ, $Α_1Δ_1$) , (ΑΑ΄, $Α_1Α_1΄$) είναι τα ζεύγη των ομολόγων ακμών τους.

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\frac{V}{V_1} = \frac{(AB)^3}{(A_1B_1)^3}$



Σχήμα 33

Προεκτείνουμε τις ημιευθείες των ακμών ΒΑ, ΒΓ, ΒΒ΄ κατά ΒΚ= = $Α_1Β_1$, ΒΛ = $Α_1Δ_1$, ΒΜ = $Α_1$ $Α_1΄$, οπότε δημιουργούνται τα παραλληλεπίπεδα ΒΚΡΜ - ΛΚ΄Ρ΄Μ΄ και $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ - $Α_1΄Β_1΄Γ_1΄Δ_1΄$, τα οποία είναι ίσα και όμοια (συμπτώσιμα), σύμφωνα με την πρόταση 24, αφού τα ζεύγη (ΒΚΚ΄Λ, $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$) , (ΒΛΜ΄Μ , $Α_1$ $Α_1΄Δ_1΄Δ_1$) και (ΒΚΡΜ, $Α_1Β_1Β_1΄Α_1΄$) τα οποία κείνται επί επιπέδων που είναι ανά δύο παράλληλα, αποτελούνται από ίσα παραλληλόγραμμα.

Θεωρούμε τα παραλληλεπίπεδα ΒΚΚ΄Λ - Β΄$Κ_1Κ_1΄Λ_1$ και ΓΒΚΝ - Γ΄Β΄$Κ_1Ν_1$.

Αφού ισχύει $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AΔ}{A_1Δ_1} = \frac{AA'}{A_1A_1'}$ (πρόταση VI.1) και

$ΒΚ = Α_1Β_1$, $ΒΛ = Α_1\ Δ_1$, $ΒΜ = Α_1Α_1'$, θα έχουμε και

$$\frac{ΑΒ}{ΒΚ} = \frac{ΑΔ}{ΒΛ} = \frac{ΑΑ'}{ΒΜ}, \text{ δηλαδή } \frac{ΒΑ}{ΒΚ} = \frac{ΒΓ}{ΒΛ} = \frac{ΒΒ'}{ΒΜ}.$$

Αλλά $\dfrac{ΒΑ}{ΒΚ} = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΓΒΚΝ)}$, $\dfrac{ΒΓ}{ΒΛ} = \dfrac{(ΓΒΚΝ)}{(ΒΛΚ'Κ)}$, $\dfrac{ΒΒ'}{ΒΜ} = \dfrac{(ΒΚΚ_1Β')}{(ΒΚΡΜ)}$.

Επομένως θα ισχύει $\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΓΒΚΝ)} = \dfrac{(ΓΒΚΝ)}{(ΒΛΚ'Κ)} = \dfrac{(ΒΚΚ_1Β')}{(ΒΚΡΜ)}$.

Επιπλέον έχουμε $\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΓΒΚΝ)} = \dfrac{(ΑΒΓΔ - Α'Β'Γ'Δ')}{(ΓΒΚΝ - Γ'Β'Κ_1Ν_1)}$,

$$\frac{(ΓΒΚΝ)}{(ΒΛΚ'Κ)} = \frac{(ΓΒΚΝ - Γ'Β'Κ_1Ν_1)}{(ΒΛΚ'Κ - Β'Λ_1Κ_1'Κ)},$$

$$\frac{(ΒΚΚ_1Β')}{(ΒΚΡΜ)} = \frac{(ΒΛΚ'Κ - Β'Λ_1Κ_1'Κ_1)}{(ΒΛΚ'Κ - ΜΜ'Ρ'Ρ)}.$$

Αν όμως τέσσερα μεγέθη α, β, γ, δ βρίσκονται σε συνεχή αναλογία, δηλαδή ισχύει $\dfrac{α}{β} = \dfrac{β}{γ} = \dfrac{γ}{δ}$, τότε ο λόγος του πρώτου προς τον τέταρτο ισούται με το λόγο των κύβων του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή $\dfrac{α}{δ} = \dfrac{α^3}{β^3}$ (V, ορισμός 10).

[Πράγματι, αν $\dfrac{α}{β} = \dfrac{β}{γ} = \dfrac{γ}{δ} = λ$, τότε $α = λβ = λ^2γ = λ^3δ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{α}{δ} = λ^3 = \left(\frac{α}{β}\right)^3 = \frac{α^3}{β^3}].$$

Άρα $\dfrac{(ΑΒΓΔ - Α'Β'Γ'Δ')}{(ΒΛΚ'Κ - ΜΜ'Ρ'Ρ)} = \dfrac{(ΑΒΓΔ - Α'Β'Γ'Δ')^3}{(ΓΒΚΝ - Γ'Β'Κ_1Ν_1)^3} =$

$$= \frac{(ΑΒΓΔ)^3}{(ΓΒΚΝ)^3} = \frac{(ΑΒ)^3}{(ΒΚ)^3}, \text{ οπότε } \frac{V}{V_1} = \frac{(ΑΒ)^3}{(Α_1Β_1)^3}.$$

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 34 (XI. 34)

Αν δύο παραλληλεπίπεδα είναι ίσα (:ισοδύναμα), τότε οι βάσεις τους είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών τους.
Αν οι βάσεις δύο παραλληλεπιπέδων είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών τους, τότε τα παραλληλεπίπεδα είναι ίσα (:ισοδύναμα).

Απόδειξη

Θεωρούμε τα παραλληλεπίπεδα $V_1 = ΑΒΓΔ - Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ και $V_2 = ΚΛΜΝ – Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2$ με ύψη $υ_1$, $υ_2$, που αντιστοιχούν στις βάσεις ΑΒΓΔ, ΚΛΜΝ.

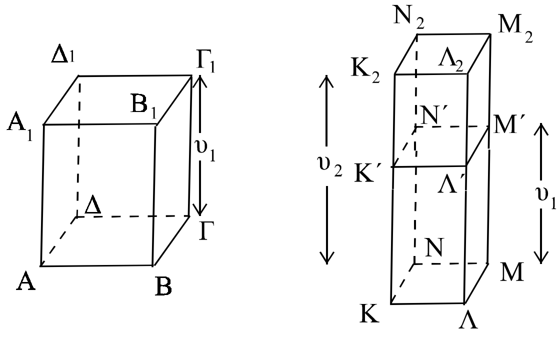
(i) Υποθέτουμε αρχικά ότι τα παραλληλεπίπεδα είναι ορθά, δηλαδή $ΑΑ_1 \perp ΑΒΓΔ$ και $ΚΚ_2 \perp ΚΛΜΝ$.

α) Δεχόμαστε ότι $V_1 = V_2$ και θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{ΑΒΓΔ}{ΚΛΜΝ} = \frac{υ_2}{υ_1}$$

Αν $υ_1 = υ_2$, τότε: $\dfrac{ΑΒΓΔ}{ΚΛΜΝ} = \dfrac{V_1}{V_2} = 1 = \dfrac{υ_2}{υ_1}$

Αν $υ_1 \neq υ_2$, π.χ. $υ_1 < υ_2$, τότε θα υπάρχει μεταξύ των Κ, $Κ_2$ σημείο Κ΄ τέτοιο ώστε $ΚΚ΄= υ_1$. (Σχ. 34).



Σχήμα 34

Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο $V_1΄ = ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄$.

Αφού $V_1 = V_2$, θα έχουμε $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{V_2}{V_1'}$ (1)

Επίσης, αφού $\upsilon_1 = ΚΚ'$ θα έχουμε $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)}$ (2)

Εξάλλου $\dfrac{V_2}{V_1'} = \dfrac{(ΚΚ_2Ν_2Ν)}{(ΚΚ'Ν'Ν)} = \dfrac{ΚΚ_2}{ΚΚ'} = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)} = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$.

β) Δεχόμαστε ότι $\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)} = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$V_1 = V_2.$$

Αν $\upsilon_1 = \upsilon_2$, τότε $ΑΒΓΔ = ΚΛΜΝ$, οπότε $V_1 = V_2$.

Αν $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$ π.χ. $\upsilon_1 < \upsilon_2$, τότε θεωρώντας το πρίσμα V_1', όπως τα κατασκευάσαμε προηγουμένως, θα έχουμε

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)} = \frac{ΚΚ_2}{ΚΚ'} \qquad (4)$$

Αλλά $$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)} = \frac{V_1}{V_1'} \qquad (5)$$

αφού έχουν ίσα ύψη (πρόταση 32).

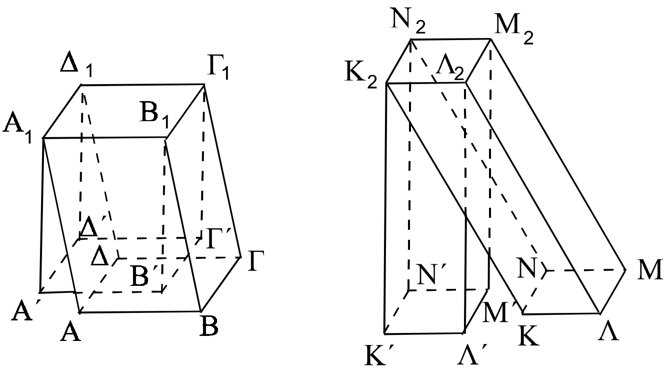
Επίσης, (πρόταση 25)

$$\frac{V_2}{V_1'} = \frac{ΚΚ_2}{ΚΚ'} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (4), (5), (6) προκύπτει ότι $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{V_2}{V_1'}$, οπότε $V_1 = V_2$.

(ii) Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν είναι και τα δύο παραλληλεπίπεδα ορθα, δηλαδή είτε ότι η ακμή $ΑΑ_1$ δεν είναι κάθετη στη βάση ΑΒΓΔ, είτε ότι η ακμή $ΚΚ_2$ δεν είναι κάθετη στη βάση ΚΛΜΝ.

Θεωρούμε τότε τις ορθές προβολές Α΄Β΄Γ΄Δ΄, Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ των $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ και $Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2$ στις απέναντι έδρες αντίστοιχα (Σχ. 34 α).



Σχήμα 34 α

Έχουμε $V_1 = Α΄Β΄Γ΄Δ΄ - Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ και $V_2 = Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ - Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2$ (προτάσεις 29 και 30).

α) Δεχόμαστε ότι $V_1 = V_2$ και θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)} = \frac{υ_2}{υ_1}, \text{ όπου } υ_1 = Α_1Α΄ \text{ και } υ_2 = Κ_2Κ΄.$$

Για τα ορθά πρίσματα $Α΄Β΄Γ΄Δ΄ - Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ και $Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ - Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2$ σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση (ευθύ), θα έχουμε:

$$\frac{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}{(Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2)} = \frac{Κ_2Κ'}{Α_1Α'} = \frac{υ_2}{υ_1}, \text{ οπότε και } \frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΚΛΜΝ)} = \frac{υ_2}{υ_1}.$$

β) Δεχόμαστε ότι: $\frac{ΑΒΓΔ}{ΚΛΜΝ} = \frac{υ_2}{υ_1}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$V_1 = V_2.$$

Για τα ορθά πρίσματα $Α΄Β΄Γ΄Δ΄ - Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ και $Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ - Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2$ θα έχουμε $\frac{(Α'Β'Γ'Δ')}{(Κ'Λ'Μ'Ν')} = \frac{υ_2}{υ_1}$, οπότε

$$(Α΄Β΄Γ΄Δ΄ - Α_1Β_1Γ_1Δ_1) = (Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ - Κ_2Λ_2Μ_2Ν_2)$$

(σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση, (i) β).

Άρα και $V_1 = V_2$.
ὅ.ἔ.δ.

Παρατηρήσεις στις προτάσεις 28 - 34

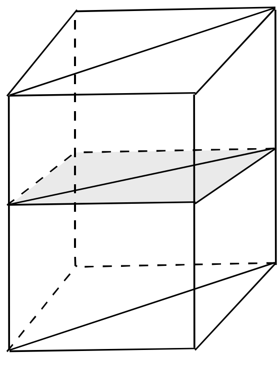
Με την πρόταση 34 ολοκληρώθηκε η συνθετική παρουσίαση της θεωρίας του όγκου για τα παραλληλεπίπεδα. Αρχίζοντας με τη θεμελιώδη παρατήρηση της πρότασης 28 για την διαίρεση παραλληλεπιπέδου από ένα διαγώνιο επίπεδό του και συνεχίζοντας με επιχειρήματα διαμέρισης και συμπλήρωσης ενός παραλληλεπιπέδου, καταλήγουμε στην πρόταση 34, από την οποία με σύγχρονη ορολογία μπορεί να απόδειχθεί ότι: *Σε ένα παραλληλεπίπεδο το γινόμενο μιας βάσης και του ύψους που αντιστοιχεί σ' αυτή είναι σταθερό.*

Η διαδικασία και η σειρά που ακολουθήθηκε είναι άψογη, όμως δεν προσφέρεται σε υπολογισμούς. Ο Legendre εισηγήθηκε τη σύγχρονη θεωρία του όγκου, αλλάζοντας τη σειρά της παρουσίασης ως εξής:

Ακολουθώντας το γενικό ορισμό της ισότητας στερεών σχημάτων, μπορεί να αποδειχθεί ότι δύο πρίσματα τα οποία έχουν τις έδρες μιας μόνον στερεάς τους γωνίας ίσες και ομοίως κείμενες είναι ίσα (συμπτώσιμα), οπότε ορθά (ή κολοβά) πρίσματα με ίσες βάσεις και ίσα ύψη είναι ίσα.

Ακολούθως, ένα πλάγιο πρίσμα είναι ισοδύναμο με ένα ορθό πρίσμα που έχει ως βάση μια κάθετη τομή του πρίσματος και ύψος μια παράλληλη ακμή του.

Χρησιμοποιώντας αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα διαγώνιο επίπεδο διαιρεί το παραλληλεπίπεδο σε δύο ισοδύναμα πρίσματα. Πράγματι, κάθε ένα από τα πρίσματα που προκύπτουν είναι ισοδύναμο με ένα τριγωνικό πρίσμα που έχει ως ύψος την παράπλευρη ακμή του παραλληλεπιπέδου και ως βάση ένα από τα (ίσα) τρίγωνα, στα οποία η διαγώνιος διαιρεί το παραλληλόγραμμο της κάθετης τομής. Έτσι φτάνουμε στη θεμελιώδη πρόταση 28.



Σχήμα 34 β

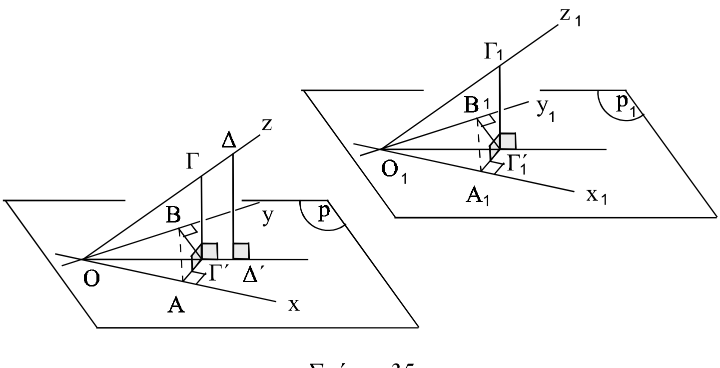
Πρόταση 35 (XI. 35)

Αν δύο επίπεδες γωνίες είναι ίσες και από τις κορυφές τους αχθούν δύο ευθείες εκτός των επιπέδων τους που σχηματίζουν με τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες γωνίες, κι αν προβληθούν δύο τυχαία σημεία των ευθειών που βρίσκονται εκτός των επιπέδων στα επίπε-

δα των αρχικών γωνιών, τότε οι ευθείες που ορίζονται από τις προβολές των σημείων αυτών και τις κορυφές των γωνιών σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ευθείες οι οποίες διέρχονται από τις κορυφές τους και κείνται εκτός των επιπέδων τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις ίσες γωνίες $x\hat{O}y, x_1\hat{O}_1y_1$ πάνω στα επίπεδα (P), (P_1) αντίστοιχα, και τις ευθείες Oz, O_1z_1 εκτός των επιπέδων αυτών, τέτοιες ώστε $x\hat{O}z = x_1\hat{O}_1z_1$, $y\hat{O}z = y_1\hat{O}_1z_1$. Θεωρούμε επιπλέον τα σημεία Δ_1, Γ_1 πάνω στις Oz, O_1z_1 αντίστοιχα και τις προβολές τους Δ', Γ_1' πάνω στα (P), (P_1). Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\Delta\hat{O}\Delta' = \Gamma_1\hat{O}_1\Gamma_1'$.



Σχήμα 35

Πάνω στην Oz θεωρούμε σημείο Γ, τέτοιο ώστε $O\Gamma = O_1\Gamma_1$ και την $\Gamma\Gamma' \,//\, \Delta\Delta'$.

Αφού $\Delta\Delta' \perp (P)$, θα είναι και $\Gamma\Gamma' \perp (P)$.

Αν $\Gamma'A \perp Ox$ και $\Gamma_1'A_1 \perp O_1x_1$, τότε: $(O\Gamma')^2 = (OA)^2 + (A\Gamma')^2$ και $(A\Gamma)^2 = (A\Gamma')^2 + (\Gamma\Gamma')^2$, οπότε $(O\Gamma)^2 = (O\Gamma')^2 + (\Gamma\Gamma')^2 =$

$= (OA)^2 + (A\Gamma')^2 + (\Gamma\Gamma')^2 = (OA)^2 + (A\Gamma)^2$. Άρα $O\hat{A}\Gamma = 1$ ορθή.

Ομοίως βρίσκουμε $O_1\hat{A}_1\Gamma_1 = 1$ ορθή, οπότε $O\hat{A}\Gamma = O_1\hat{A}_1\Gamma_1$.

Τα τρίγωνα λοιπόν $OA\Gamma$, $O_1A_1\Gamma_1$ έχουν $O\Gamma = O_1\Gamma_1$ και $A\hat{O}\Gamma =$

$= A_1\hat{O}_1\Gamma_1$, $O\hat{A}\Gamma = O_1\hat{A}_1\Gamma_1$ (=1 ορθή). Άρα είναι ίσα, οπότε $OA = O_1A_1$.

Εντελώς όμοια, αν $\Gamma'B \perp OY$, $\Gamma_1'B_1 \perp O_1Y_1$, θα έχουμε:

$\hat{OBΓ} = \hat{O_1B_1Γ_1} = 1$ ορθή και $OB = O_1B_1$. Τα τρίγωνα λοιπόν OAB, $O_1A_1B_1$ είναι ίσα, αφού $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$ και $A\hat{O}B = A_1\hat{O}_1B_1$.

Άρα $AB=A_1B_1$, $O\hat{A}B = O_1\hat{A}_1B_1$ και $O\hat{B}A = O_1\hat{B}_1A_1$ οπότε και

$Γ'\hat{A}B = Γ_1'\hat{A}_1B_1$, $Γ'\hat{B}A = Γ_1'\hat{B}_1A_1$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα $ABΓ'$ και $A_1B_1Γ_1'$ έχουν πλέον $AB = A_1B_1$,

$Γ'\hat{A}B = Γ_1'\hat{A}_1B_1$, $Γ'\hat{B}A = Γ_1'\hat{B}_1A_1$. Άρα είναι ίσα, οπότε $Γ'A = Γ_1'A_1$, $Γ'B = Γ_1'B_1$ (πρόταση Ι. 26)

Τα τρίγωνα $OAΓ'$ και $O_1A_1Γ_1'$ έχουν $OA = O_1A_1$, $Γ'A = Γ_1'A_1$ και

$O\hat{A}Γ' = O_1\hat{A}_1Γ_1'$ (= 1 ορθή). Άρα είναι ίσα, οπότε $OΓ' = O_1Γ_1$.

Αλλά $OΓ' = O_1Γ_1 \Rightarrow (OΓ')^2 = (O_1Γ_1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (OΓ)^2 - (ΓΓ')^2 = (O_1Γ_1)^2 - (Γ_1Γ_1')^2 \Rightarrow (ΓΓ')^2 = (Γ_1Γ_1')^2 \Rightarrow ΓΓ' = Γ_1Γ_1'$ (αφού $OΓ = O_1Γ_1$). Τα τρίγωνα λοιπόν $OΓΓ'$ και $OΓ_1Γ_1'$ έχουν $OΓ = O_1Γ_1$, $OΓ' = O_1Γ_1'$ και $ΓΓ' = Γ_1Γ_1'$. Θα είναι επομένως ίσα, οπότε

$$Γ\hat{O}Γ' = Γ_1\hat{O}_1Γ_1'.$$

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Η απόδειξη θα μπορούσε να συντομευτεί αισθητά με τη χρήση του θεωρήματος των τριών καθέτων. Εξάλλου, με τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων μπορούμε να αποφύγουμε την επαναλαμβανόμενη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Τέλος, κατά την εκφώνηση οι ευθείες πρέπει να εκληφθούν ως ημιευθείες που κείνται προς το ίδιο μέρος του επιπέδου των γωνιών.

Πόρισμα

Αν δύο επίπεδες γωνίες είναι ίσες και αχθούν από τις κορυφές τους εκτός των επιπέδων τους δύο ίσα πλάγια τμήματα, που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές των αρχικών γωνιών αντίστοιχα τότε τα άκρα αυτών των πλαγίων τμημάτων ισαπέχουν από τα επίπεδα των γωνιών.

Απόδειξη

Πράγματι, στην προηγούμενη πρόταση, όπου είχαμε και $OΓ = O_1Γ_1$, δείξαμε ότι: $ΓΓ' = Γ_1Γ_1'$.

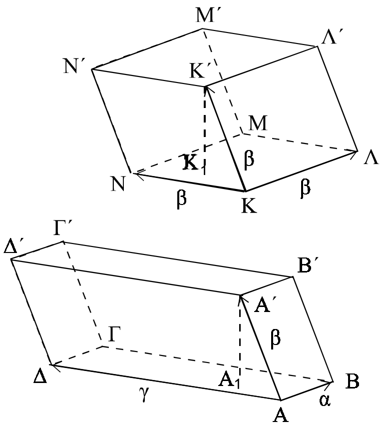
Πρόταση 36 (XI. 36)

Αν τρία τμήματα είναι ανάλογα, δηλαδή συνιστούν συνεχή αναλογία, τότε το παραλληλεπίπεδο με πλευρές αυτά τα τρία τμήματα είναι ίσο (:ισοδύναμο) με το ισόπλευρο παραλληλεπίπεδο με πλευρά τη μέση ανάλογο και ισογώνιο προς το πρώτο.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρία τμήματα α, β, γ τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ (1)

Θέλουμε να δείξουμε ότι δύο ισογώνια παραλληλεπίπεδα, από τα οποία το πρώτο έχει πλευρές α, β, γ και το δεύτερο είναι ισόπλευρο με πλευρά β, είναι ισοδύναμα.



Σχήμα 36

Ας υποθέσουμε ότι τα παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και ΚΛΜΝ - Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄ έχουν ΑΒ = α, ΑΔ = γ, ΑΑ΄= β και ΚΛ = ΚΝ = ΚΚ΄= β, ενώ

$B\hat{A}\Delta = \Lambda\hat{K}N$, $B\hat{A}A' = \Lambda\hat{K}K'$

και $\Delta\hat{A}A' = N\hat{K}K'$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{KN}{A\Delta}$, δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ είναι αντιστρόφως ανάλογα των ΚΛ, ΚΝ.

Αφού τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ , ΚΛΜΝ έχουν τις γωνίες $B\hat{A}\Delta$, $\Lambda\hat{K}N$ ίσες και τις πλευρές τους αντιστρόφως ανάλογες, θα είναι ισοδύναμα (ισεμβαδικά) (πρόταση VI. 14).

Και σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, αφού τα τμήματα ΑΑ΄, ΚΚ΄ σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές των γωνιών $B\hat{A}\Delta$, $\Lambda\hat{K}N$ αντίστοιχα, οι αποστάσεις $A'A_1$, $K'K_1$ των σημείων Α΄, Κ΄ από τα επίπεδα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ θα είναι ίσες.

Τα παραλληλεπίπεδα λοιπόν ΑΓ΄ και ΚΜ΄ έχουν ισοδύναμες βάσεις και ίσα ύψη. Άρα είναι ισοδύναμα.

ὅ.ἔ.δ.

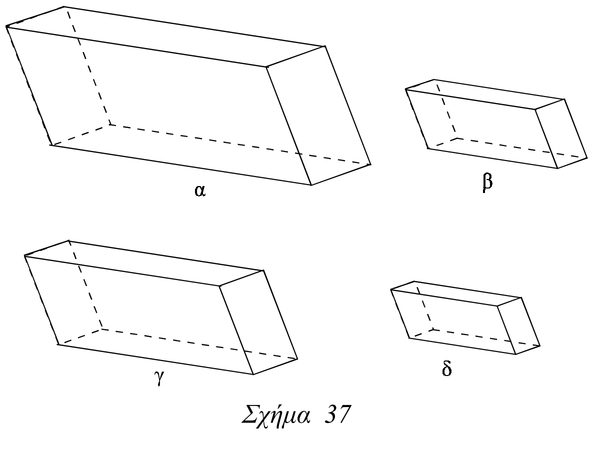
Πρόταση 37 (XI. 37)

Αν τέσσερα τμήματα είναι ανάλογα, τότε και τα επ' αυτών όμοια και ομοίως αναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα (δηλαδή τα παραλληλεπίπεδα που έχουν τα τμήματα αυτά ως ομόλογες ακμές) είναι ανάλογα.

Αν τα επί τεσσάρων τμημάτων όμοια και ομοίως αναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα είναι ανάλογα, τότε και τα τέσσερα τμήματα είναι ανάλογα.

Απόδειξη

α) Έστω ότι τα τμήματα α, β, γ, δ είναι ανάλογα, δηλαδή συνιστούν την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Θεωρούμε τα όμοια παραλληλεπίπεδα V_1, V_2, V_3, V_4 με ομόλογες ακμές τις α, β, γ, δ αντίστοιχα. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4}$.



Σχήμα 37

Πράγματι, αφού τα V_1, V_2 είναι όμοια, θα έχουμε $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$ (πρόταση 33). Επίσης, αφού τα V_3 και V_4 είναι όμοια, θα έχουμε $\frac{V_3}{V_4} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^3$.

Αλλά $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4}$.

β) Έστω ότι ισχύει $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Έχουμε και πάλι τις σχέσεις $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$, $\frac{V_3}{V_4} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^3$. Οπότε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^3 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

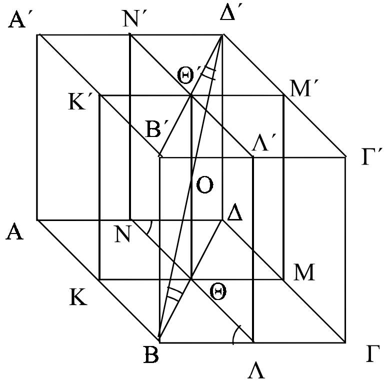
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 38 (XI. 38)

Αν οι πλευρές δυο απέναντι εδρών κύβου διχοτομηθούν και από τις τομές διέλθουν επίπεδα, τότε η τομή των επιπέδων και μία διαγώνιος του κύβου διχοτομούνται.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών της έδρας ΑΒΓΔ ενός κύβου και τα αντίστοιχα μέσα Κ΄,Λ΄,Μ΄,Ν΄ των πλευρών της απέναντι έδρας του Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Τα επίπεδα των παραλληλογράμμων ΚΜΜ΄Κ΄ και ΛΝΝ΄Λ΄ τέμνονται κατά την ευθεία ΘΘ΄. Αν Ο το σημείο τομής της ΘΘ΄ με τη διαγώνιο Δ΄Β του κύβου, θα δείξουμε ότι ΟΘ = ΟΘ΄ και ΟΒ = = ΟΔ΄.



Σχήμα 38

Τα τρίγωνα ΘΔΝ, ΘΒΛ έχουν ΔΝ = ΒΛ, ΝΘ = ΘΛ και $\Delta\hat{N}\Theta = \Theta\hat{\Lambda}B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, που τέμνονται από την ΝΛ (πρόταση Ι.29). Άρα είναι ίσα , οπότε $N\hat{\Theta}\Delta = B\hat{\Theta}\Lambda$. Επομένως:

$$\Delta\hat{\Theta}B = \Delta\hat{\Theta}N + N\hat{\Theta}B = B\hat{\Theta}\Lambda + N\hat{\Theta}B = N\hat{\Theta}\Lambda = 2\text{ορθές},$$

οπότε τα σημεία Δ, Θ, Β είναι συνευθειακά.

Ομοίως τα σημεία Δ΄, Θ΄, Β΄ είναι συνευθειακά.

Αλλά το ΑΑ΄ είναι ίσο και παράλληλο προς τα ΒΒ΄, ΔΔ΄, οπότε τα ΒΒ΄ και ΔΔ΄ είναι ίσα και παράλληλα (πρόταση 9) και από αυτό προκύπτει ότι τα ΔΒ και Δ΄Β΄ είναι ίσα και παράλληλα (πρόταση Ι.33).

Τα τρίγωνα λοιπόν ΟΒΘ και ΟΔ΄Θ΄ έχουν ΒΘ = Δ΄Θ΄ (ως μισά ίσων τμημάτων), $O\hat{B}\Theta = O\hat{\Delta}'\Theta'$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΒ, Δ΄Β΄ που τέμνονται από την ΒΔ΄) και $\Theta\hat{O}B = \Theta'\hat{O}\Delta'$ (ως κατά κορυφήν), (πρόταση Ι.15).

Άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και τις άλλες πλευρές τους ίσες μια προς μία (πρόταση Ι.26), δηλαδή ΟΘ = ΟΘ΄ και ΟΒ = ΟΔ΄.

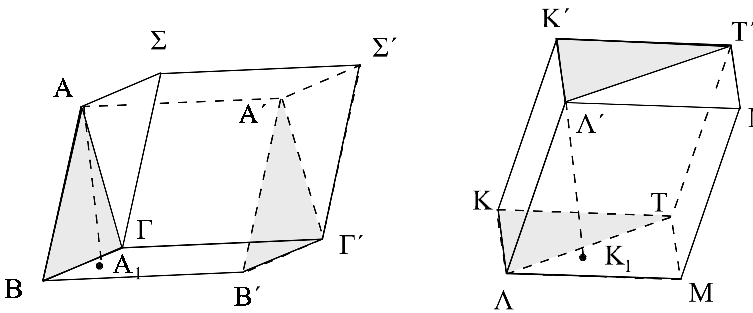
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 39 (XI. 39)

Αν σε δύο τριγωνικά πρίσματα μια παράπλευρη έδρα του πρώτου είναι διπλάσια από τη βάση του δεύτερου, και η απόσταση της απέναντι ακμής από αυτή την παράπλευρη έδρα του πρώτου είναι ίση με το ύψος του δεύτερου, τότε τα πρίσματα είναι ίσα (:ισοδύναμα).

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τριγωνικά πρίσματα ΑΒΓ - Α΄Β΄Γ΄ και ΚΛΜ - Κ΄Λ΄Μ΄, τέτοια ώστε η έδρα ΒΓΓ΄Β΄ του πρώτου να είναι διπλάσια από τη βάση ΚΛΜ του δεύτερου και το ύψος KK_1 του δεύτερου να είναι ίσο με την απόσταση AA_1 της ακμής ΑΑ΄ από την έδρα ΒΓΓ΄Β΄ του πρώτου. Θα αποδείξουμε ότι τα τριγωνικά πρίσματα είναι ισοδύναμα.



Σχήμα 39

Συμπληρώνουμε τα πρίσματα αυτά δημιουργώντας τα διπλάσιά τους παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΣ - Α΄Β΄Γ΄Σ΄ και ΚΛΜΤ - Κ΄Λ΄Μ΄Τ΄ αντίστοιχα.

Στο δεύτερο παραλληλεπίπεδο η βάση ΚΛΜΤ είναι διπλάσια από τη βάση ΚΛΜ του αντίστοιχου πρίσματος, άρα ίση με τη βάση ΒΓΓ΄Β΄ του πρώτου παραλληλεπιπέδου. Τα παραλληλεπίπεδα λοιπόν έχουν ισοδύναμες βάσεις και ίσα ύψη, άρα είναι ισοδύναμα (πρόταση 31).

Επομένως και τα αρχικά πρίσματα θα είναι ισοδύναμα ως μισά αυτών των παραλληλεπιπέδων.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Η διατύπωση της προηγούμενης πρότασης (πρόταση 39) στα *Στοιχεία* αποδίδεται ως εξής: *"Αν δύο πρίσματα είναι ισοϋψή και το ένα έχει βάση παραλληλόγραμμο ενώ το άλλο τρίγωνο, και είναι το παραλληλόγραμμο διπλάσιο από το τρίγωνο, τότε τα πρίσματα είναι ίσα".*

Όμως ένα πρίσμα με βάση παραλληλόγραμμο είναι παραλληλεπίπεδο. Έτσι φαίνεται να ισχυριζόμαστε το εξής: *"Αν ένα παραλληλεπίπεδο* (: το πρώτο πρίσμα) *έχει βάση διπλάσια από τη βάση του δεύτερου τριγωνικού πρίσματος και τα δύο πρίσματα είναι ισοϋψή, τότε θα είναι ίσα".* Είναι όμως προφανές ότι ένα τέτοιο παραλληλεπίπεδο είναι διπλάσιο από το δεύτερο τριγωνικό πρίσμα.

Για την αποφυγή μιας τέτοιας παρανόησης, επιλέχθηκε η προηγούμενη διατύπωση.

7. Σχόλια στη μέτρηση των πρισμάτων

7.1 Το "μη στοιχειώδες" της θεωρίας του όγκου

Στις προτάσεις 28 μέχρι 39 αναφερθήκαμε σχεδόν αποκλειστικά σε στερεά που είναι παραλληλεπίπεδα και η σύγκριση αυτών των σχημάτων έγινε χρησιμοποιώντας διαδικασίες διαμέρισης ή συμπλήρωσης, με αποτέλεσμα να μπορούμε να μιλάμε για ισοδύναμα σχήματα.

Τα ισοδύναμα σχήματα (πλην των παραλληλεπιπέδων) στο χώρο μπορεί να μην είναι πάντα ισοδιαχωρίσιμα. Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη παρατήρηση του Cauchy, ότι κάθε κυρτό πολύεδρο μπορεί να διαιρεθεί σε τετράεδρα τα οποία έχουν μια κορυφή κοινή και οι υπόλοιπες κορυφές είναι κορυφές του αρχικού πολύεδρου, κάθε πολύεδρο διαμερίζεται σε τετράεδρα. Τα ισοδύναμα πολύεδρα μπορούν όμως να διαμερισθούν στον αυτό αριθμό τετραέδρων που μπορούν να αντιστοιχηθούν, ώστε να δημιουργούνται ζεύγη τετραέδρων που να έχουν ισοδύναμες βάσεις και ίσα ύψη!

Στοιχειωδώς μπορεί να αποδειχθεί ότι για δύο πολύεδρα, με δίεδρες γωνίες $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, που είναι ισοσυμπληρώσιμα (ή ισοδιαχωρίσιμα) υπάρχουν ακέραιοι $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, p, p' , q, q' τέτοιοι, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$p_1\alpha_1 + \ldots + p_n\alpha_n + (p + 2p')\,\pi = q_1\beta_1 + \ldots + q_m\,\beta_m + (q + 2q')\,\pi.$$

Αν λοιπόν υπάρχουν πολύεδρα ισοδύναμα (ίσων όγκων) για τα οποία αυτή η σχέση δεν ισχύει, αυτά δεν μπορεί να είναι ισοδιαχωρίσιμα (ή ισοσυμπληρώσιμα). Επομένως, η θεωρία του όγκου στο χώρο παύει να είναι στοιχειώδης. Αυτό ακριβώς αποδεικνύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα (Dehn, 1902).

Ένα κανονικό τετράεδρο και ένας ισοδύναμος (ίσου όγκου) προς αυτό κύβος δεν μπορεί να είναι ούτε ισοδιαχωρίσιμα ούτε ισοσυμπληρώσιμα.

Σύντομη σκιαγράφηση της Απόδειξης.

Αν θ είναι η δίεδρη γωνία του τετραέδρου, αφού η γωνία του κύβου είναι ίση με π/2, η αναγκαία συνθήκη γράφεται:

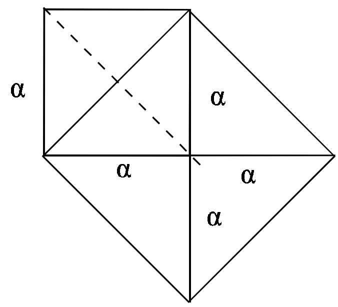
$$\sum_{i=1}^{6} p_i\,\theta + (p + 2p')\,\pi = \sum_{i=1}^{12} q_i \left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(q + 2q'\right)\pi$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι: $r\theta = s\pi$ (όπου r,s πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι). Όμως, $\text{συν}\theta = \dfrac{1}{3}$ και, όπως μπορεί να αποδειχθεί, δεν υπάρχουν ακέραιοι r, s τέτοιοι ώστε $r\,\text{τοξσυν}\left(\dfrac{1}{3}\right) = s\pi$.

7.2 Παραλληλεπίπεδα και κατασκευαστικά προβλήματα

Η πρόταση 33 αποτελεί για το χώρο την αντίστοιχη της πρότασης VI. 23, όπου αποδεικνύεται ότι "*ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων παραλληλογράμμων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας*".

Έτσι, κατά τη μετάβαση από το επίπεδο στο χώρο και από το εμβαδόν στον όγκο, αναβιβάζεται η δύναμη του λόγου κατά ένα (από δύο σε τρία). Όμως, όπως τονίστηκε και στο εισαγωγικό σημείωμα, η όλη κατάσταση στο χώρο είναι περισσότερο σύνθετη.



Σχήμα 7.2α

Μια περίπτωση που σχετίζεται με την πρόταση 34 έχει ως εξής:

Στο βιβλίο VI και αμέσως μετά την πρόταση 23 τίθεται και λύνεται το εξής πρόβλημα (πρόταση VI. 25).

"*Να κατασκευασθεί επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα όμοιο προς κάποιο δοθέν και ισεμβαδικό προς κάποιο άλλο*".

Στους Πυθαγορείους αποδίδεται η διαπίστωση ότι, αν δοθεί ένα τετράγωνο πλευράς α, τότε είναι δυνατόν να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη ένα νέο τετράγωνο διπλάσιου εμβαδού (σχ. 7.2α). Λογικά, επειδή οι Πυθαγόρειοι ασχολούνταν και με τη μελέτη στερεών, είναι πιθανό να έθεσαν το ανάλογο πρόβλημα και για τον ***κύβο***.Το πρόβλημα αυτό βέβαια είναι ειδική περίπτωση της απαίτησης: "*Να κατασκευασθεί στερεό παραλληλεπίπεδο όμοιο προς κάποιο δοθέν και ίσου όγκου προς κάποιο άλλο*", που θα αποτελούσε και τη φυσιολογική επέκταση της πρότασης VI. 25 στο χώρο.

Η λύση αυτού του προβλήματος δεν είναι άμεση, όπως του αντίστοιχου προβλήματος της Επιπεδομετρίας, και οι αλλεπάλληλες προσπάθειες και αποτυχίες οδήγησαν στη δημιουργία θρύλων για την αιτία που δημιούργησε αυτό το πρόβλημα για τον κύβο.

"Λύσεις" για το διπλασιασμό του κύβου δόθηκαν από πολλούς γεωμέτρες της αρχαιότητας, του Μεσαίωνα, και των Νέων χρόνων. Κατά χρονολογική σειρά αναφέρονται λύσεις : του Ιπποκράτους, του Αρχύτα, του Ευδόξου, του Μεναίχμου, του Πλάτωνα, του Ερατοσθένους, του Νικομήδους, του Απολλωνίου, του Διοκλέους, του Ήρωνος, του Πάππου, του Descartes, του Longchamps και άλλων.

Ο Ευτόκιος (6ος μ.Χ. αιώνας), που υπήρξε σχολιαστής των έργων του Αρχιμήδη, αναφέρει αρκετές από τις λύσεις των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών για το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Στην ιστορική αυτή παρουσίαση των λύσεων, όταν ο Ευτόκιος μιλά για τη λύση του Ερατοσθένους (276-195 π.Χ.), αναφέρει ότι ο Ερατοσθένης υπέβαλε τη λύση του στον βασιλιά της Αιγύπτου Πτολεμαίο τον ΙΙΙ (246 π.Χ.), με επιστολή στην οποία παρουσίασε και τις διάφορες εκδοχές της γέννησης του προβλήματος. Κατά μία εκδοχή ο Μίνωας είχε διατάξει να κατασκευασθεί για το γιο του "Γλαύκο" τάφος σχήματος κύβου. Όταν όμως τον είδε, έκρινε ότι "*ήταν πολύ μικρός για ένα βασιλιά*" και διέταξε να διπλασιασθεί. Κατά άλλη εκδοχή ένας χρησμός επέβαλε στους κατοίκους της νήσου Δήλου να διπλασιάσουν ένα κυβικό βωμό του θεού Απόλλωνα, εξ ου και το πρόβλημα πήρε την ονομασία ***Δήλιο Πρόβλημα***.

Στη σύγχρονη μαθηματική διατύπωση, αυτό που συνδέεται με το *Δήλιο Πρόβλημα* είναι η διαπίστωση ότι: *Ο λόγος δύο κύβων είναι ίσος με τον κύβο του λόγου δύο ακμών τους,* που προκύπτει άμεσα από την πρόταση ΧΙ.33.

Όλες οι λύσεις του "*Δηλίου προβλήματος*" στο πέρασμα του χρόνου ουσιαστικά στηρίζονταν στην πρώτη ιδέα που έδωσε ο Ιπποκράτης ο Χίος. Σύμφωνα με τον Ιπποκράτη, το πρόβλημα του υπολογισμού της πλευράς κύβου που θα έχει διπλάσιο όγκο από ένα δοθέντα κύβο πλευράς α, ανάγεται στην εύρεση και κατασκευή δύο μέσων αναλόγων σε συνεχή αναλογία, μεταξύ των δύο δοθέντων μεγεθών α και 2α.

Οι λύσεις προσανατολίσθηκαν άλλοτε στην "αριθμητική" ή "μηχανική" κατασκευή των δύο μέσων αναλόγων x και y και άλλοτε στην "αναλυτική", με τη χρήση των τομών δύο καμπύλων.

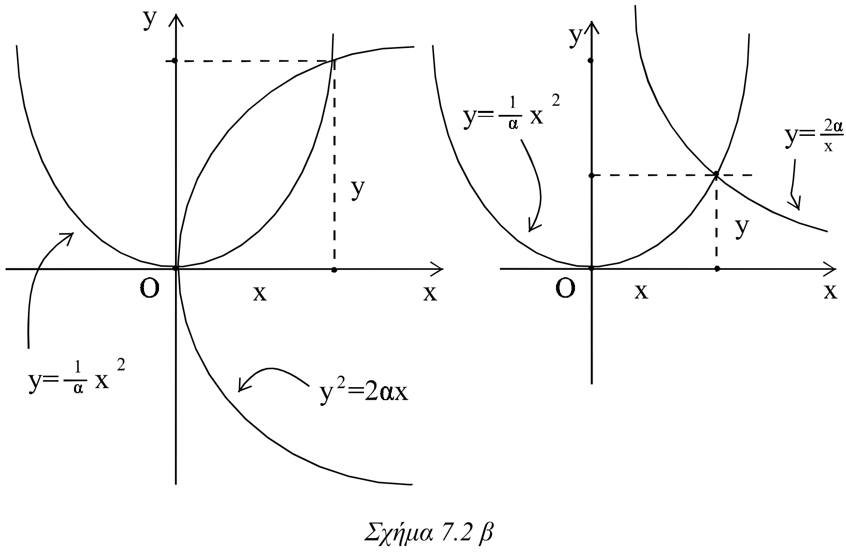
Η λύση όμως που εναρμονίζει την απλότητα με τη σύγχρονη αναλυτική γνώση των καμπύλων σχετίζεται με τη διπλή λύση που έδωσε ο Μέναιχμος (μαθητής του Ευδόξου και του Πλάτωνα). Ο Ευτόκιος αναφέρει ότι ο Μέναιχμος επέτυχε τη λύση με τη βοήθεια δύο διαφορετικών κατασκευών, που βασίζονται στις κωνικές τομές (παραβολή και υπερβολή).

Με σύγχρονη ορολογία, η εξίσωση $x^2 = 2α^3$ προκύπτει, αν από τη συνεχή αναλογία $\frac{α}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2α}$ θεωρήσουμε τις ισότητες $\frac{α}{x} = \frac{x}{y}$ και $\frac{x}{y} = \frac{y}{2α}$ και γίνει απαλοιφή του y μεταξύ των δύο σχέσεων $αy = x^2$ και $2αx = y^2$ που προκύπτουν από αυτές.

Έτσι, από τη μορφή $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$ του Ιπποκράτη έχουμε ισοδύναμα τα ακόλουθα δύο συστήματα:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \alpha y \\ y^2 &= 2\alpha x \end{aligned}\right\} (1) \qquad \text{και} \qquad \left.\begin{aligned} x^2 &= \alpha y \\ xy &= 2\alpha^2 \end{aligned}\right\} (2)$$

Επομένως, οι δύο μέσοι ανάλογοι όροι x και y, μεταξύ των μεγεθών α και 2α, μπορούν να προκύψουν ως "οι συντεταγμένες" του σημείου τομής, είτε των δύο παραβολών (σύστημα (1)), είτε της παραβολής και της υπερβολής (σύστημα (2)).



Σχήμα 7.2 β

Όπως έχει αναλυτικά αναφερθεί και σχολιασθεί, η γεωμετρική κατασκευή αυτών των λύσεων με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη.

Κεφάλαιο 2

ΒΙΒΛΙΟ XII

Όγκοι και η μέθοδος της εξάντλησης

1. Εισαγωγή

Στο Βιβλίο XII διατυπώνονται και αποδεικνύονται 18 συνολικά προτάσεις, τα βασικά συμπεράσματα των οποίων έχουν συνοπτικά ως εξής:

Αρχικά, στην πρόταση 2, αποδεικνύεται ότι δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Ας σημειωθεί ότι, με σημερινούς όρους, το εμβαδόν κύκλου λαμβάνεται ως όριο της ακολουθίας (E_{2^n}), που ορίζουν τα εμβαδά των εγγεγραμμένων στον κύκλο κανονικών πολυγώνων με 2^n πλευρές.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι δύο πυραμίδες (τριγωνικές αρχικά και μετά πολυγωνικές) με ίσα ύψη είναι ανάλογες των βάσεών τους, για να καταλήξουμε στην πρόταση 7, από όπου προκύπτει το θεμελιώδες συμπέρασμα, σύμφωνα με το οποίο κάθε τριγωνικό πρίσμα διαιρείται σε τρεις ίσες (ισοδύναμες) τριγωνικές πυραμίδες. Έτσι, ο λόγος δύο όμοιων τριγωνικών πυραμίδων ανάγεται σε λόγο παραλληλεπιπέδων, για να αποδειχθεί τελικά ότι ισούται με τον κύβο του λόγου των ομόλογων ακμών τους (πρόταση 8).

Ακολουθεί η σύγκριση κώνου και κυλίνδρου με ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Αρχικά αποδεικνύεται ότι, αν δύο κώνοι (ή κύλινδροι) έχουν ίσα ύψη, τότε είναι ανάλογοι των βάσεών τους (πρόταση 11). Ακολούθως αποδεικνύεται ότι δύο όμοιοι κώνοι (ή κύλινδροι) είναι ανάλογοι των κύβων των διαμέτρων των βάσεών τους (πρόταση 12).

Με αναφορά στην ισότητα των λόγων κατά τον Εύδοξο, αποδεικνύεται ότι δύο κύλινδροι (ή κώνοι) με ίσες βάσεις είναι ανάλογοι των υψών τους, καταλήγοντας στο ότι δύο ίσοι κύλινδροι (ή κώνοι) έχουν ύψη αντιστρόφως ανάλογα των βάσεών τους αλλά και αντίστροφα (πρόταση 15).

Με σημερινούς όρους, ο όγκος V ενός κυλίνδρου και ο όγκος V', ενός κώνου λαμβάνονται ως όρια των ακολουθιών (V_{2^n}) και (V'_{2^n}), που ορίζονται από τους όγκους των εγγεγραμμένων πρισμάτων και πουραμίδων αντιστοίχως, με βάσεις κανονικά πολύγωνα με 2^n πλευρές.

Το κεφάλαιο τελειώνει με την πρόταση 18, στην οποία αποδεικνύεται ότι δύο σφαίρες είναι ανάλογες των κύβων των διαμέτρων τους. Της απόδειξης αυτής προηγείται η αρκετά δύσκολη και ενδιαφέρουσα πρόταση 17, σύμφωνα με την οποία, αν δοθούν δύο ομόκεντρες σφαίρες, τότε υπάρχει δυνατότητα να εγγράψουμε στη μεγάλη σφαίρα πολύεδρο που να μην έχει κοινά σημεία με τη μικρή σφαίρα.

2. Η μέθοδος της εξάντλησης

Στο βιβλίο XI οι συγκρίσεις παραλληλεπιπέδων και πρισμάτων έγιναν με βάση τη συμπλήρωση ή την διαμέριση των σχημάτων αυτών, ώστε να προκύψουν ίσα στερεά.

Στο βιβλίο XII παρουσιάζεται η ανάγκη να ορισθεί το εμβαδόν του κύκλου με βάση το εμβαδόν πολυγώνου ή ο όγκος κυλίνδρου (και κώνου) με βάση τον όγκο πρίσματος (πυραμίδας). Επίσης παρουσιάζεται η ανάγκη να συγκριθούν πυραμίδα και πρίσμα που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις καταφεύγουμε στην αξιοθαύμαστη μέθοδο του Εύδοξου, τη *"μέθοδο της εξάντλησης"*.

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν συνειδητά εξοβελίσει την έννοια του ορίου και του απείρου από τις αποδεικτικές τους διαδικασίες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να καταφεύγουν σε αξιοθαύμαστες μεν, αλλά αρκετά δύσκαμπτες μεθόδους, πέραν της εντυπωσιακής πράγματι διαδικασίας που ακολουθούσαν για να υποψιαστούν εκ των προτέρων την τιμή B κάποιας, κατά κανόνα γεωμετρικής, ποσότητας Α, την οποία προσπαθούσαν να υπολογίσουν.

Βάση αυτής της προσπάθειας προς την τελική απόδειξη της ισότητας αποτελεί η *μέθοδος της εξάντλησης*, που εισήγαγε ο Εύδοξος, και εφάρμοσε με εξαιρετική επιτυχία ο Αρχιμήδης, αν και ενίοτε με κάποιες παραλλαγές.

Η μέθοδος, με σημερινή προσέγγιση έχει κατά βάση ως εξής:

Βρίσκουμε μια αύξουσα ακολουθία (α_ν) και μια φθίνουσα ακολουθία (β_ν), έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $\alpha_\nu \leq A \leq \beta_\nu$, $\alpha_\nu \leq B \leq \beta_\nu$, $\forall\ \nu \in N^*$ και

$$\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} \leq \frac{1}{2}(\beta_\nu - \alpha_\nu),\ \forall\ \nu \in N^* \quad (1)$$

Στο βιβλίο Χ των *Στοιχείων* αποδεικνύεται, με σημερινούς όρους διατυπωμένη, η εξής πρόταση:

Αν για δύο ακολουθίες (t_ν), (ω_ν) ***θετικών όρων ισχύει:*** $t_{\nu+1} = t_\nu - \omega_\nu$ ***με*** $\omega_\nu \geq \frac{t_\nu}{2}$, $\forall\ \nu \in N^*$, (***δηλαδή*** $t_{\nu+1} \leq \frac{1}{2} t_\nu$, $\forall \nu \in N^*$), ***τότε*** $\forall\ \varepsilon > 0$,

$\exists\, \rho \in N$ ***τέτοιο, ώστε να ισχύει*** $t_\rho < \varepsilon$.

Με βάση αυτή την πρόταση, προφανώς γνωστή στον Εύδοξο, η σχέση (1) μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\, \rho \in N^*$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $\beta_\rho - \alpha_\rho < \varepsilon$. Αλλά,

$$\alpha_\nu \leq A \leq \beta_\nu \text{ και } \alpha_\nu \leq B \leq \beta_\nu\ \forall\ \nu \in N^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu - \beta_\nu \leq A - B \leq \beta_\nu - \alpha_\nu,\ \forall\ \nu \in N^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A - B| \leq \beta_\nu - \alpha_\nu,\ \forall\ \nu \in N^*$$

Αν λοιπόν δεχτούμε ότι $A \neq B$, τότε για $\varepsilon = \frac{|A - B|}{2} > 0$, θα υπάρχει $\rho \in N^*$ τέτοιο, ώστε $|A - B| \leq \beta_\rho - \alpha_\rho < \frac{|A - B|}{2}$, οπότε $|A - B| < \frac{|A - B|}{2}$, δηλαδή $|A - B| < 0$, που είναι άτοπο. Άρα θα έχουμε $A = B$.

3. Σύγκριση δύο κύκλων

Όταν στα επόμενα αναφερόμαστε σε άθροισμα, διαφορά ή λόγο δύο σχημάτων Σ_1, Σ_2 (συμβολικά $\Sigma_1 + \Sigma_2$, $\Sigma_1 - \Sigma_2$, $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$), με σύγχρονη ορολογία εννοούμε άθροισμα, διαφορά ή λόγο των αντίστοιχων εμβαδών, αν τα σχήματα είναι επίπεδα, ή των αντίστοιχων όγκων, αν είναι στερεά σχήματα.

Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για την ισότητα $\Sigma_1 = \Sigma_2$, ενώ με $\nu\Sigma_1$ θα εννοούμε το άθροισμα ν-όρων, $(\Sigma_1+\Sigma_1+ \ldots +\Sigma_1)$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Γενικότερα, με $\lambda \cdot \Sigma_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ εννοούμε το $\lambda.(\Sigma_1)$, όπου (Σ_1) είναι το εμβαδόν ή ο όγκος του αντιστοίχου σχήματος.

Στα πλαίσια αυτά η πρόταση που ακολουθεί οφείλει να εννοηθεί ως εξής:

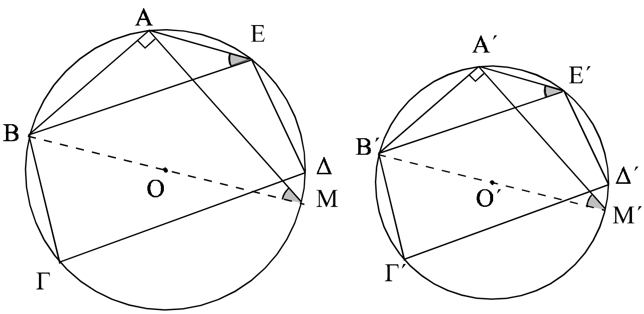
"Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλους ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών".

Πρόταση 1 (XII. 1)

Δύο όμοια πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τα εγγεγραμμένα όμοια πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ στους κύκλους (Ο,ρ) και (Ο΄,ρ΄) αντίστοιχα,



Σχήμα 1

με ομόλογα ζεύγη κορυφών (Α, Α΄), (Β, Β΄), (Γ, Γ΄), (Δ, Δ΄), (Ε, Ε΄) και τις αντίστοιχες διαμέτρους ΒΜ, Β΄Μ΄. Θα αποδειχθεί ότι

$$\frac{(\mathrm{BM})^2}{(\mathrm{B'M'})^2}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta E})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'})}$$

Αφού $\mathrm{B\hat{A}E}=\mathrm{B'\hat{A}'E'}$ και $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A'E'}}$ (VI, ορισμός 1), τα τρίγωνα ΑΒΕ, Α΄Β΄Ε΄ θα είναι ισογώνια (πρόταση VI. 6). Άρα $\mathrm{A\hat{E}B} = \mathrm{A'\hat{E}'B'}$.

Αλλά $\mathrm{A\hat{E}B} = \mathrm{A\hat{M}B}$ και $\mathrm{A'\hat{E}'B'} = \mathrm{A'\hat{M}'B'}$, διότι βαίνουν σε ίσα τόξα. Είναι δε και $\mathrm{B\hat{A}M} = \mathrm{B'\hat{A}'M'}$ (=90°). Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΜ, Α΄Β΄Μ΄ είναι ισογώνια, οπότε $\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{B'M'}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}}$ (πρόταση VI. 4).

Όμως $\left(\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{B'M'}}\right)^2=\frac{(\mathrm{BM})^2}{(\mathrm{B'M'})^2}$ και $\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}}\right)^2=\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta E})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'})}$ (πρόταση VI. 20). Άρα $\frac{(\mathrm{BM})^2}{(\mathrm{B'M'})^2}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta E})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'})}$.

Ανάλογη απόδειξη μπορεί να γίνει όταν τα πολύγωνα έχουν οποιοδήποτε αριθμό πλευρών.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 2 (XII. 2)

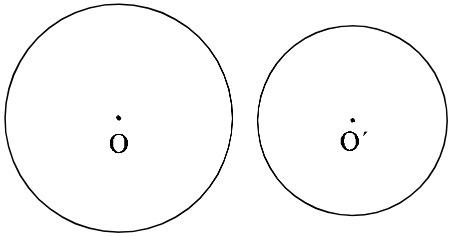
Δύο κύκλοι είναι ανάλογοι των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τους κύκλους Κ, Κ΄ με ακτίνες ρ, ρ΄ και κέντρα Ο, Ο΄ αντίστοιχα.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{K}{K'}=\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

Έστω $\frac{K}{K'}\neq\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$. Τότε $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2=\frac{K}{S}$ όπου $S\neq K'$.



Σχήμα 2

α) Έστω αρχικά $S < K'$.

Αν θεωρήσουμε τον αριθμό, $\varepsilon = K' - S > 0$ τότε, σύμφωνα με το Γενικό Λήμμα που αναφέρεται στο τέλος της απόδειξης, θα υπάρχει πολύγωνο E'_ν εγγεγραμμένο στον κύκλο K' τέτοιο, ώστε, $K' - E'_\nu < \varepsilon$. Άρα $K' - E'_\nu < K' - S$, οπότε

$$E'_\nu > S \qquad (1)\ ,$$

Αν E_ν είναι το αντίστοιχο κανονικό πολύγωνο το εγγεγραμμένο στον κύκλο K, τότε, λόγω της πρότασης 1, θα έχουμε $\frac{E_\nu}{E'_\nu} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$.

Όμως ισχύει $\frac{S}{E'_\nu} = \frac{K}{E_\nu} > 1$, αφού $K > E_\nu$. Άρα θα έχουμε

$$S > E'_\nu \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) οδηγούν σε άτοπο, δηλαδή δεν μπορεί να ισχύει $S < K'$.

β) Έστω τώρα ότι $S > K'$. Τότε από τη σχέση $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$ παίρνουμε $\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 = \frac{S}{K}$. Αν ισχύει $\frac{S}{K} = \frac{K'}{T}$, τότε θα έχουμε και $\frac{K}{T} = \frac{S}{K'} > 1$, αφού $S > K'$. Άρα $K > T$ (βλέπε και το λήμμα που ακολουθεί). Επομένως $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K'}{T}$ με $T < K$.

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση (α) και με τους ίδιους όπως πριν συλλογισμούς οδηγεί στις σχέσεις $E_\nu > T$ και $E_\nu < T$, που αντιφάσκουν. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει $S > K'$.

Τελικά, ισχύει $S = K'$, οπότε $\frac{K}{K'} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

ὅ.ἔ.δ.

Λήμμα

Αν ένα χωρίο S είναι μεγαλύτερο ενός κύκλου K, τότε ο λόγος του S προς έναν άλλο κύκλο K' είναι ίσος με το λόγο του K προς ένα χωρίο T μικρότερο του κύκλου K'. Δηλαδή, αν $S > K$ και $\frac{S}{K'} = \frac{K}{T}$, τότε $T < K'$.

Πράγματι, από την $\frac{S}{K'} = \frac{K}{T}$ προκύπτει $\frac{K'}{T} = \frac{S}{K} > 1$, αφού $S > K$.

Άρα $T < K'$.

Παρατήρηση. Με μια ισοδύναμη διατύπωση το λήμμα αυτό έχει ως εξής:

"Αν $S > K$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει χωρίο $T < K'$ τέτοιο, ώστε $\frac{S}{K'} = \frac{K}{T}$".

Πράγματι, έχουμε $\frac{S}{K} > 1$ και $\frac{S}{K} = \lambda = \frac{K'}{\frac{K}{\lambda}} = \frac{K'}{T}$, όπου $T = \frac{K'}{\lambda}$.

Άρα $\frac{K'}{T} > 1$, οπότε $T\alpha < K'$ και αφού $\frac{S}{K} = \frac{K'}{T}$, θα έχουμε και $\frac{S}{K'} = \frac{K}{T}$.

Κατά την απόδειξη της πρότασης 3 βασικό ρόλο έπαιξε η ακόλουθη θεμελιώδης παρατήρηση, που θα αναφέρεται στα επόμενα ως ***Γενικό Λήμμα.***

Γενικό Λήμμα:

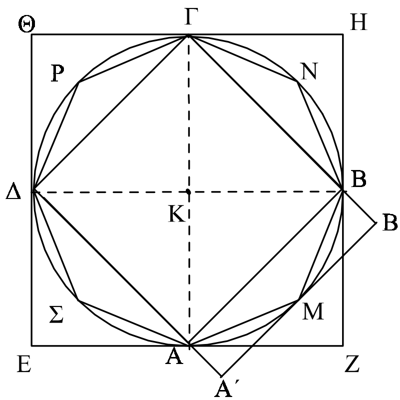
Αν δοθεί αριθμός $\varepsilon > 0$ και κύκλος Κ, τότε υπάρχει εγγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο E_ν , ώστε η διαφορά του από τον κύκλο να είναι μικρότερη του ε, δηλαδή $K - E_\nu < \varepsilon$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ και το περιγεγραμμένο τετράγωνο ΕΖΗΘ στον κύκλο Κ. Προφανώς το ΑΒΓΔ είναι ίσο με το μισό του ΕΖΗΘ, άρα μεγαλύτερο από $\frac{K}{2}$. Αφαιρώντας λοιπόν από τον κύκλο το τετράγωνο ΑΒΓΔ, ουσιαστικά του αφαιρούμε ποσότητα μεγαλύτερη από το $\frac{K}{2}$.

Αν θεωρήσουμε το εγγεγραμμένο κανονικό οκτάγωνο ΑΜΒΝΓΡΔΣΑ και το αφαιρέσουμε από τον κύκλο, τότε αφαιρούμε ουσιαστικά από το προηγούμενο υπόλοιπο, $\upsilon_1 = K - E_4$, τα τρίγωνα ΑΜΒ, ΒΝΓ, ΓΡΔ, ΔΣΑ.

Όμως, σχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο ΑΑ΄Β΄Β με την πλευρά Α΄Β΄ εφαπτόμενη του κύκλου στο Μ, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου ΑΒΒ΄Α΄, κατά συνέπεια μεγαλύτερο από το κυκλικό τμήμα ΑΜΒΑ.



Σχήμα 2.1

Αφαιρώντας λοιπόν τα τρίγωνα ΜΑΒ, ΝΒΓ, ΡΓΔ, ΣΔΑ από το υπόλοιπο, υ_1 , αφαιρούμε ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του υ_1 και βρίσκουμε υπόλοιπο $\upsilon_2 = K - E_8$. Η διαδικασία αυτή, σύμφωνα με την πρόταση Χ.1, θα μας οδηγήσει σε υπόλοιπο $\upsilon_\mu = K - E_{2^{\mu+1}}$ μικρότερο από τον αριθμό ε.

4. Σχόλια στο θεώρημα σύγκρισης κύκλων.

Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και στην πρόταση 2 που προηγήθηκε, για να αποδειχθεί η σχέση $\frac{K}{K'}=\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$, αποδείχθηκε ότι οι σχέσεις $\frac{K}{K'}<\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$ και $\frac{K}{K'}>\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$ οδηγούν σε άτοπο.

Η πορεία όμως της απόδειξης που ακολουθείται στην περίπτωση $\frac{K}{K'}<\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$ και βασίζεται στο Λήμμα, δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση $\frac{K}{K'}>\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

Για το λόγο αυτό, η σχέση $\frac{K}{K'}>\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$ γράφεται ως $\frac{K'}{K}<\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2$ και τότε εφαρμόζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε πάνω στο κύκλο K αντί του K΄.

Η εύσχημη αυτή αποφυγή της ευθείας απόδειξης για την περίπτωση $\frac{K}{K'}>\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$ προκάλεσε διάφορα σχόλια, αναγκάζοντας τον Heath να προτάξει ένα ακόμα λήμμα, προκειμένου να επιτύχει ευθεία απόδειξη. Το λήμμα που λείπει γίνεται άμεσα φανερό, αν αναγνώσουμε προσεκτικά την προηγούμενη περίπτωση $\frac{K}{K'}<\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

Εκεί θέσαμε $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2=\frac{K}{S}$, οπότε K΄> S΄ και διαπιστώσαμε ότι υπάρχει $\nu \in N$ ώστε

$$K' - E_\nu' < K' - S' \qquad (1)$$

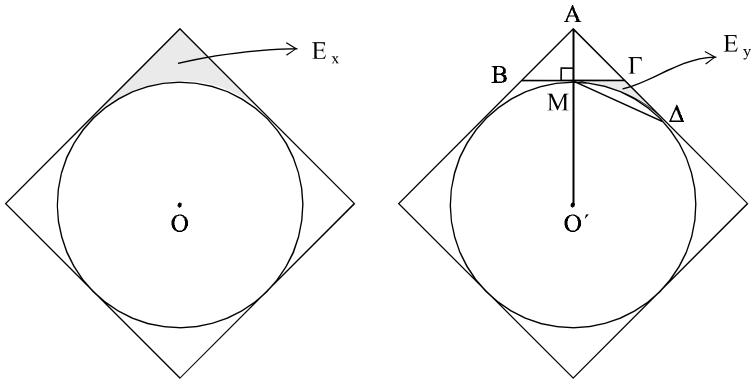
δηλαδή $E_\nu' > S'$.

Τώρα έχουμε $\frac{K}{K'} > \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$, οπότε αν θέσουμε $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$, θα είναι $S > K'$. Για να απαλειφθεί όμως το K' αρκεί να βρεθεί σχέση ανάλογη της (1), που θα έχει φυσικά τη μορφή $X - K' < S - K'$. Είναι λοιπόν εύλογο, το X να παριστάνει το εμβαδόν κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου στον κύκλο K'.

Αν συμβολίσουμε με E_ν , E_ν' τα εμβαδά των κανονικών πολυγώνων που είναι περιγεγραμμένα στους κύκλους K, K', τότε το λήμμα στο οποίο θα καταφύγουμε και το οποίο πράγματι έκανε ο Heath, είναι το εξής:

"Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu \in N$ ώστε $E_\nu - K < \varepsilon$, (αντίστοιχα $E_\nu' - K' < \varepsilon$)".

Η απόδειξή του όμως είναι πιο δύσκολη από το προηγούμενο Λήμμα.



Σχήμα 2.2

Αρχικά παρατηρούμε και πάλι ότι $\frac{1}{2}$ $E_4 = E_8 < K$, οπότε $E_4 - K < \frac{1}{2}$ E_4.

Στη συνέχεια έχουμε $E_8 - K = E_4 - K - (E_4 - E_8)$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι:

$$E_4 - E_8 > \frac{E_4 - K}{2} \qquad (2)$$

Προφανώς $E_4 - K = 4E_x$, $E_8 - K = 8E_y$ και $E_4 - E_8 = 4\,(AB\Gamma)$ (βλέπε σχήμα 2.2). Αρκεί λοιπόν αντί της (2) να δείξουμε ότι:

$$4\,(AB\Gamma) > 2\,E_x\,,\ \text{ή}\ 2\,(AB\Gamma) > E_x\,,\ \text{ή}\ 2\,(AB\Gamma) > (AB\Gamma) + 2E_y$$

ή $(ΑΒΓ) > 2\,E_y$, ή $2(ΑΜΓ) > 2\,E_y$, ή $(ΑΜΓ) > E_y$.

Πράγματι, προφανώς έχουμε ΓΔ = ΓΜ < ΑΓ και επειδή τα τρίγωνα ΑΜΓ, ΔΜΓ έχουν κοινό ύψος από το Μ , θα ισχύει

$\frac{(ΑΜΓ)}{(ΔΜΓ)} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ} > 1$, οπότε $(ΑΜΓ) > (ΔΜΓ) > E_y$.

Εντελώς ανάλογα, έχουμε $E_{16} - K = E_8 - K - (E_8 - E_{16})$ και τις σχέσεις:

$E_8 - E_{16} > \frac{E_8 - K}{2}$ κ.λπ. Η ισχύς του Λήμματος είναι πλέον φανερή.

Η αντιμετώπιση της περίπτωσης $\frac{K}{K'} > \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$, χωρίς αναγωγή στην προηγούμενη περίπτωση $\frac{K}{K'} < \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$, μπορεί να γίνει ως εξής:

Έστω $\frac{K}{K'} > \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S}$. Τότε $S > K'$, οπότε $S - K' > 0$.

Για $\varepsilon = S - K'$ θα υπάρχει, σύμφωνα με το λήμμα, $\nu \in N$ τέτοιο ώστε: $E_\nu' - K' < S - K'$. Άρα

$$E_\nu' < S \qquad \text{(i)}.$$

Όμως, αφού $K < E_\nu$, $\frac{E_\nu}{E_\nu'} > \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K}{S} \Rightarrow \frac{S}{E_\nu'} = \frac{K}{E_\nu} < 1$,

Επομένως,

$$S < E_\nu' \qquad \text{(ii)}.$$

Οι σχέσεις (i) , (ii) οδηγούν σε άτοπο.

Μια άλλη απόδειξη της πρότασης 2 έγινε από τον Legendre. Η βασική ιδέα της απόδειξης αυτής υπάρχει στα *Στοιχεία*, βιβλίο XII, κατά την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για σφαίρες (δηλαδή του ότι οι όγκοι δύο σφαιρών είναι ανάλογοι των κύβων των ακτίνων τους). Εκεί λοιπόν αποδεικνύεται το εξής:

"Αν δοθούν δύο ομόκεντρες σφαίρες, τότε υπάρχει πολύεδρο εγγεγραμμένο στην εξωτερική σφαίρα, του οποίου οι έδρες δεν έχουν κοινά σημεία με την εσωτερική σφαίρα".

Ο Ευκλείδης πιθανώς κατέφυγε σ' αυτή την επιλογή, επειδή ακριβώς η εφαρμογή αντίστοιχων διαδικασιών με αυτές της απόδειξης της πρότασης 2, θα απαιτούσε εγγραφή (σε σφαίρα) κανονικών πολυέδρων. Όμως, δεν υπάρχει δυνατότητα εγγραφής απείρων κανονικών πολυέδρων σε σφαίρα, αφού τα κανονικά πολύεδρα είναι μόνο πέντε (τετράεδρο, εξάεδρο, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο).

Ο Legendre λοιπόν απέδειξε ότι για δύο ομόκεντρους κύκλους ισχύει το εξής:

"Υπάρχει κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο στο μεγάλο κύκλο που βρίσκεται εκτός του μικρού, καθώς και κανονικό πολύγωνο περιγεγραμμένο στο μικρό κύκλο που βρίσκεται εντός του μεγάλου".

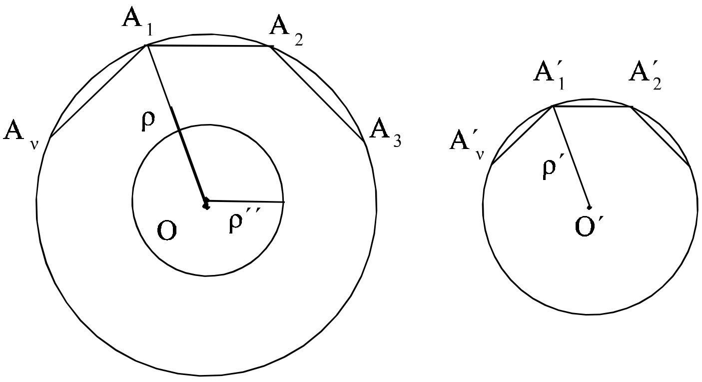
Η κανονικότητα βέβαια των πολυγώνων είναι εμφανές ότι δεν είναι απαραίτητη. Αρκεί να θεωρήσουμε αντίστοιχα με αυτά όμοια πολύγωνα στο δεύτερο κύκλο (Κ΄) κατά τον αποκλεισμό της περίπτωσης $\frac{K}{K'} \neq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

Η απόδειξη του Legendre έχει πλέον ως εξής: Έστω

$$\frac{K}{K'} > \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \frac{K''}{K'} \qquad (3)\text{, οπότε } K > K''.$$

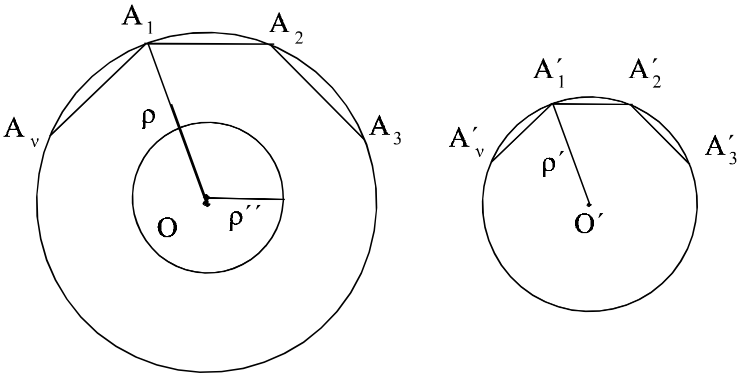
Εδώ, σε αντίθεση με τον Ευκλείδη ο Legndre δέχεται ότι το Κ΄΄ είναι εμβαδόν κύκλου, ενώ ο Ευκλείδης το θεωρεί τυχαίο εμβαδόν S.

Το αν μπορεί να κατασκευαστεί κύκλος Κ΄΄ ομόκεντρος του Κ με ακτίνα $\rho'' < \rho$ που να ικανοποιεί την σχέση (3), δεν είναι καθόλου προφανές.



Σχήμα 2.3

Αν δεχτούμε λοιπόν την ύπαρξη ενός τέτοιου κύκλου Κ´´ εντός του Κ, μπορούμε να θεωρήσουμε κανονικό πολύγωνο $Α_1\, Α_2 \ldots Α_ν$ εγγεγραμμένο στον Κ εκτός του Κ´´ και το όμοιό του κανονικό πολύγωνο $Α_1´\, Α_2´\ldots Α_ν´$ εγγεγραμμένο στον κύκλο Κ´.



Σχήμα 2.4

Αν $Ε_ν$, $Ε_ν´$ τα αντίστοιχα εμβαδά τους, θα έχουμε:

$$\frac{Ε_ν}{Ε_ν'} = \left(\frac{ρ}{ρ'}\right)^2 = \frac{Κ''}{Κ'} \qquad (4)$$

Αλλά $Ε_ν´ < Κ´ \Rightarrow \dfrac{1}{Ε_ν'} > \dfrac{1}{Κ'}$ και αφού $Ε_ν > Κ´´$, θα έχουμε:

$$\frac{Ε_ν}{Ε_ν'} > \frac{Κ''}{Κ'} \qquad (5).$$

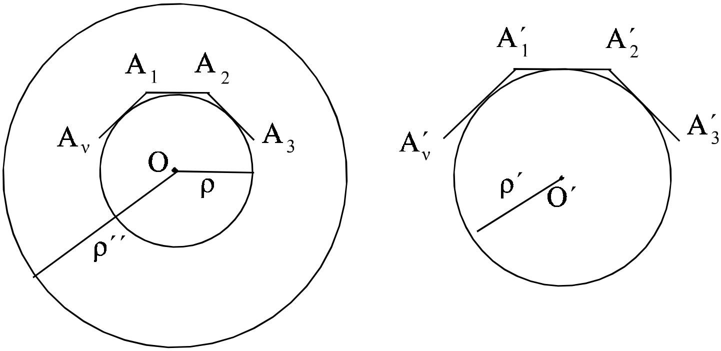
Οι σχέσεις (4), (5) οδηγούν σε άτοπο.

Έστω τώρα $\dfrac{Κ}{Κ'} < \left(\dfrac{ρ}{ρ'}\right)^2 = \dfrac{Κ''}{Κ'}$. Τότε Κ´´ > Κ.

Θεωρούμε λοιπόν κύκλο Κ´´ ομόκεντρο του Κ με ακτίνα ρ´´.
Τότε ρ´´> ρ.

Θεωρούμε κανονικό πολύγωνο $Ε_ν = Α_1\, Α_2 \ldots\ Α_ν$ περιγεγραμμένο στον Κ´´ και εκτός του Κ και το όμοιό του κανονικό πολύγωνο $Ε_ν´ =$

$= Α_1´\, Α_2´\ldots Α_ν´$ περιγεγραμμένο στον κύκλο Κ´.



Σχήμα 2.5

Τότε θα έχουμε $\dfrac{E_\nu}{E_\nu} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2 = \dfrac{K''}{K'}$ (6)

Αλλά $E'_\nu > K \Rightarrow \dfrac{1}{E'_\nu} < \dfrac{1}{K'}$ και $E_\nu < K''$, οπότε

$$\frac{E_\nu}{E'_\nu} < \frac{K''}{K'} \qquad (7).$$

Οι σχέσεις (6), (7) οδηγούν σε άτοπο.

Τελικά λοιπόν θα έχουμε $\dfrac{K}{K'} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)^2$.

5. Τριγωνικές πυραμίδες και πρίσματα

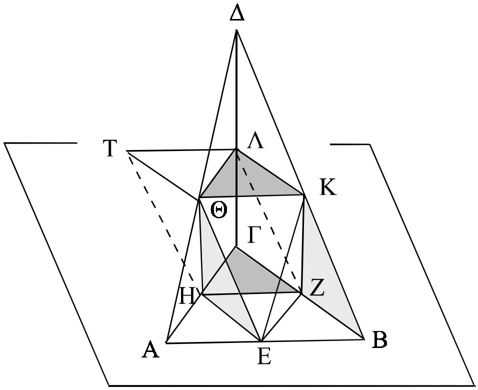
Πρόταση 3 (XII. 3)

Κάθε τριγωνική πυραμίδα διαιρείται σε δύο πυραμίδες ίσες και όμοιες προς την αρχική και σε δυο ίσα (:ισοδύναμα) πρίσματα. Το άθροισμα των δύο αυτών πρισμάτων υπερβαίνει το μισό της πυραμίδας.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ των ακμών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ της πυραμίδας Δ. ΑΒΓ.

Προφανώς, ΕΘ // ΔΒ και ΘΚ // ΑΒ (πρόταση VI.2). Το ΘΕΒΚ είναι λοιπόν παραλληλόγραμμο, οπότε (πρόταση Ι. 34) ΘΚ = = ΕΒ = ΕΑ. Είναι όμως



Σχήμα 3

ΘΑ = ΘΔ και $\hat{\Theta A E} = \hat{\Delta \Theta K}$ (πρόταση Ι.29), οπότε τα τρίγωνα ΑΕΘ, ΘΚΔ είναι ίσα. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσα και τα τρίγωνα ΑΘΗ, ΘΔΛ. Οι γωνίες $\hat{H\Theta E}$, $\hat{\Lambda\Delta K}$, έχουν πλευρές παράλληλες άρα είναι ίσες (πρόταση ΧΙ.10). Είναι όμως και ΔΛ = ΘΗ, ΔΚ = ΘΕ, οπότε τα τρίγωνα ΗΘΕ, ΛΔΚ είναι ίσα (πρόταση Ι. 4)

Για τον ίδιο λόγο θα είναι ίσα και τα τρίγωνα ΑΗΕ, ΘΛΚ. Η πυραμίδα λοιπόν Θ.ΑΗΕ είναι ίση και όμοια με την πυραμίδα Δ.ΘΛΚ (πρόταση ΧΙ.10). Οι στερεές γωνίες τους είναι προφανώς ίσες, αφού σχηματίζονται από παράλληλα επίπεδα.

Αφού ΘΚ // ΑΒ, τα τρίγωνα ΔΑΒ, ΔΘΚ είναι ισογώνια (πρόταση Ι. 29), άρα είναι όμοια (VI, ορισμός 1).

Για τον ίδιο λόγο είναι όμοια τα τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΛΚ, καθώς και τα ΔΑΓ, ΔΘΛ.

Επίσης οι γωνίες $\hat{B A \Gamma}$, $\hat{K\Theta\Lambda}$ είναι ίσες, αφού έχουν πλευρές παράλληλες.

Είναι όμως και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{2\Theta K}{2\Theta\Lambda} = \frac{\Theta K}{\Theta\Lambda}$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΚΛ είναι όμοια (πρόταση VI. 6).

Η πυραμίδα λοιπόν Δ. ΑΒΓ είναι όμοια προς την Δ.ΘΛΚ, άρα και προς την Θ.ΑΗΕ . Οι στερεές γωνίες τους είναι προφανώς ίσες, αφού σχηματίζονται παράλληλα επίπεδα.

Αφού ΒΖ = ΖΓ, το παραλληλόγραμμο ΕΒΖΗ είναι διπλάσιο από το τρίγωνο ΗΖΓ (πρόταση Ι. 41)

Αν θεωρήσουμε και το παραλληλόγραμμο ΘΚΛΤ, τότε το πρίσμα ΘΗΕ.ΚΖΒ είναι το μισό του πρίσματος ΗΕΘΤ.ΖΒΚΛ = ΕΒΖΗ.ΘΚΛΤ, άρα ίσο με το πρίσμα ΗΓΖ . ΘΚΛ (πρόταση XI. 39). Προφανώς, το πρίσμα ΘΗΕ . ΚΖΒ είναι μεγαλύτερο από την πυραμίδα Κ. ΕΒΖ, που είναι ίση με την πυραμίδα Θ. ΑΗΕ, αφού έχουν τις έδρες τους ίσες μια προς μια, καθώς και τις στερεές γωνίες τους.

Έτσι λοιπόν η πυραμίδα Δ. ΑΒΓ διαιρέθηκε σε δύο πυραμίδες Δ.ΘΛΚ, Θ.ΑΗΕ ίσες και όμοιες προς την αρχική και στα δύο ισοδύναμα πρίσματα ΘΗΕ.ΚΖΒ, ΗΓΖ.ΘΛΚ.

Αφού κάθε ένα από αυτά τα πρίσματα είναι μεγαλύτερο από κάθε πυραμίδα, τα δύο πρίσματα μαζί υπερβαίνουν τις δύο πυραμίδες, άρα υπερβαίνουν το μισό της αρχικής πυραμίδας.

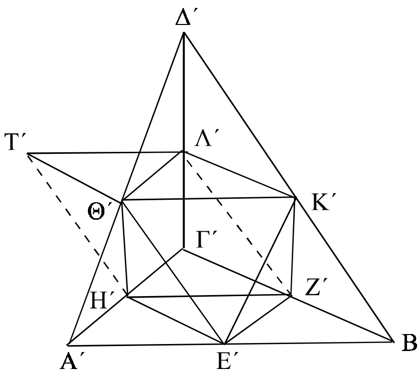
ὅ.ἔ.δ.

Λήμμα

Αν θεωρήσουμε και δεύτερη πυραμίδα ισοϋψή της Δ.ΑΒΓ, την Δ΄.Α΄Β΄Γ΄, και θεωρήσουμε τα αντίστοιχα μέσα των ακμών της, τότε τα πρίσματα ΚΛΘ - ΖΓΗ και Κ΄Λ΄Θ΄- Ζ΄Γ΄Η΄ είναι ανάλογα των βάσεων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄.

Απόδειξη

Αφού το επίπεδο ΚΛΘ διχοτομεί την ΔΑ και είναι παράλληλο στη βάση ΑΒΓ, θα διχοτομεί και το ύψος $ΔΔ_1$ της πυραμίδας Δ.ΑΒΓ. Ομοίως, το Κ΄Λ΄Θ΄ θα διχοτομεί το ύψος $Δ΄Δ΄_1$ της πυραμίδας Δ΄.Α΄Β΄Γ΄.



Σχήμα 4.1

Τα πρίσματα λοιπόν ΚΛΘ-ΖΓΗ και Κ΄Λ΄Θ΄- Ζ΄Γ΄Η΄ θα είναι ισοϋψή, καθώς και τα παραλληλεπίπεδα ΚΛΤΘ-ΒΖΗΕ και Κ΄Λ΄Τ΄Θ΄- Β΄Ζ΄Η΄Ε΄. Τα παραλληλεπίπεδα λοιπόν αυτά θα είναι ανάλογα των βάσεων ΚΛΤΘ και Κ΄Λ΄Τ΄Θ΄, που είναι διπλάσιες των ΚΛΘ και Κ΄Λ΄Θ΄ αντίστοιχα. Αλλά και τα παραλληλεπίπεδα αυτά είναι διπλάσια των πρισμάτων ΚΛΘ - ΖΓΗ και Κ΄Λ΄Θ΄- Ζ΄Γ΄Η΄ αντίστοιχα.

Άρα ισχύει $\frac{2(\text{ΚΛΘ-ΖΓΗ})}{2(\text{Κ}'\text{Λ}'\text{Θ}'-\text{Ζ}'\text{Γ}'\text{Η}')}=\frac{2(\text{ΚΛΘ})}{2(\text{Κ}'\text{Λ}'\text{Θ}')}$, οπότε έχουμε

$$\frac{(\text{ΚΛΘ-ΖΓΗ})}{(\text{Κ}'\text{Λ}'\text{Θ}'-\text{Ζ}'\text{Γ}'\text{Η}')}=\frac{(\text{ΚΛΘ})}{(\text{Κ}'\text{Λ}'\text{Θ}')}=\frac{(\text{ΖΓΗ})}{(\text{Ζ}'\text{Γ}'\text{Η}')}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})}{\frac{1}{4}(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')} .$$

Πρόταση 4 (XII. 4)

Το άθροισμα των πρισμάτων στα οποία διαιρέθηκε η πυραμίδα Δ.ΑΒΓ και το άθροισμα των πρισμάτων στα οποία διαιρέθηκε η ισοϋψής της πυραμίδα Δ΄. Α΄Β΄Γ΄, σύμφωνα με την πρόταση 3 και το Λήμμα που την ακολούθησε, είναι ανάλογα των βάσεών τους.

Απόδειξη

Όπως δείξαμε, τα πρίσματα ΕΗΘ - ΒΖΚ και Ε΄Η΄Θ΄- Β΄Ζ΄Κ΄ είναι αντιστοίχως ίσα με τα πρίσματα ΚΛΘ - ΖΓΗ και Κ΄Λ΄Θ΄- Ζ΄Γ΄Η΄ (βλέπε σχήμα 4.1).

Αφού όμως ισχύει $\frac{(\text{ΚΛΘ-ΖΓΗ})}{(\text{Κ}'\text{Λ}'\text{Θ}'-\text{Ζ}'\text{Γ}'\text{Η}')}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')}$, θα είναι και

$$\frac{(\text{ΕΗΘ-ΒΖΚ})}{(\text{Ε}'\text{Η}'\text{Θ}'-\text{Β}'\text{Ζ}'\text{Κ}')}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')} .$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{(\text{ΚΛΘ-ΖΓΗ})+(\text{ΕΗΘ}-\text{ΒΖΚ})}{(\text{Κ}'\text{Λ}'\text{Θ}'-\text{Ζ}'\text{Γ}'\text{Η}')+(\text{Ε}'\text{Η}'\text{Θ}'-\text{Β}'\text{Ζ}'\text{Κ}')}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')} .$$

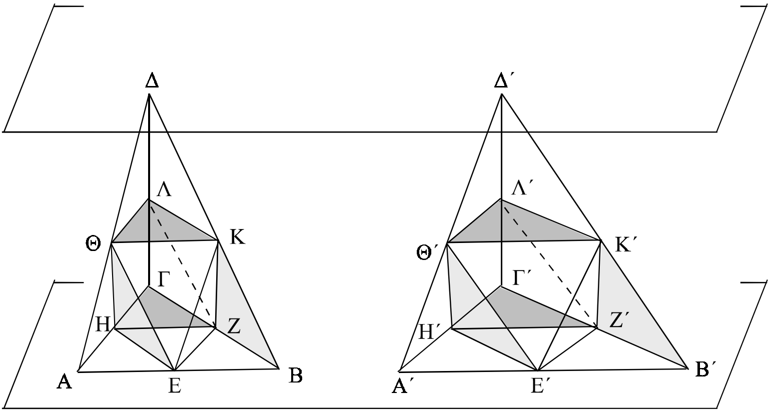
Πρόταση 5 (XII. 5)

Αν δύο τριγωνικές πυραμίδες έχουν ίσα ύψη, τότε είναι ανάλογες των βάσεών τους.

Απόδειξη

Συμβολίζουμε με V, V΄ τις ισοϋψείς τριγωνικές πυραμίδες Δ. ΑΒΓ και Δ΄. Α΄Β΄Γ΄ και με b, b΄ τις βάσεις στους ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα.

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\frac{V}{V'}=\frac{b}{b'}$.



Σχήμα 5

Έστω ότι είναι $\frac{V}{V'}\neq\frac{b}{b'}$. Τότε θα ισχύει $\frac{b}{b'}=\frac{V}{X}$ με $X\neq V'$.

α) Αρχικά υποθέτουμε ότι: X < V΄. Τότε, όπως δείξαμε, αφαιρώντας από την πυραμίδα V΄ δύο πρίσματα ίσα με το Η΄Γ΄Ζ΄–Θ΄Λ΄Κ΄, αφαιρούμε ουσιαστικά ποσότητα μεγαλύτερη από $\frac{V'}{2}$. Αν εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία στις πυραμίδες Θ΄.Α΄Η΄Ε΄ και Δ΄.Θ΄Κ΄Λ΄ που απέμειναν, τότε θα αφαιρέσουμε από αυτές ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό τους.

Επομένως, σύμφωνα με το Γενικό Λήμμα (που διατυπώθηκε μετά την πρόταση 2), για ε = V΄– X > 0 και για P_1', P_2', . . . , P_ν' τα πρίσματα που αφαιρέσαμε από την V΄, θα υπάρξει κάποιο υπόλοιπο

$$V' - (P_1' + P_2' + \ldots + P_\nu') < \varepsilon.$$

Δηλαδή $V' - (P_1' + P_2' + \ldots + P_\nu') < V' - X$, άρα

$$X < P_1' + P_2' + \ldots + P_\nu' \qquad (1)$$

Αν P_1, P_2, ..., P_ν είναι τα αντίστοιχα πρίσματα που αφαιρούμε από την V, τότε τα πρίσματα P_κ, P_κ', $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$, που είναι τριγωνικά και έχουν βάσεις όμοιες με τις b, b′, έχουν ίσα ύψη, οπότε θα ισχύει $\frac{P_\kappa}{P_\kappa'} = \frac{b}{b'}$, για $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$.

Έτσι, τελικά θα έχουμε: $\frac{P_1}{P_1'} = \frac{P_2}{P_2'} = \cdots = \frac{P_\nu}{P_\nu'} = \frac{b}{b'}$. Άρα θα είναι και

$$\frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_\nu}{P_1' + P_2' + \cdots + P_\nu'} = \frac{b}{b'} = \frac{V}{X}, \text{ οπότε } \frac{X}{P_1' + P_2' + \cdots + P_\nu'} =$$

$$= \frac{V}{P_1 + P_2 + \cdots + P_\nu} > 1,$$

αφού $V > P_1 + P_2 + \ldots + P_\nu$.

Επομένως θα ισχύει η σχέση

$$X > P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_\nu \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) όμως οδηγούν σε άτοπο, άρα δεν μπορεί να ισχύει $X < V'$.

β) Έστω $X > V'$. Τότε $\frac{b'}{b} = \frac{X}{V}$. Αν $\frac{X}{V} = \frac{V'}{T}$, τότε $\frac{V}{T} = \frac{X}{V'} > 1$, αφού $X > V'$. Άρα $V > T$.

Επομένως $\frac{b'}{b} = \frac{V'}{T}$ με $T < V$. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση και οδηγεί στις σχέσεις $T < P_1 + P_2 + \ldots + P_\nu$ και $T > P_1 + P_2 + \ldots + P_\nu$, οι οποίες αντιφάσκουν. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει ούτε η σχέση $X > V'$.

Άρα έχουμε $\frac{b}{b'} = \frac{V}{V'}$. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $X = V'$.

ὅ.ἔ.δ.

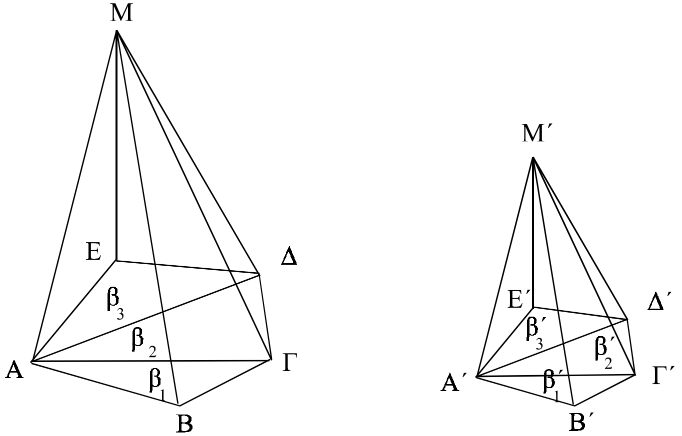
Πρόταση 6 (XII. 6)

Δύο ισοϋψείς πυραμίδες με βάσεις πολύγωνα είναι ανάλογες των βάσεών τους.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τις ισοϋψείς πυραμίδες Μ.ΑΒΓΔΕ και Μ΄.Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ με βάσεις πεντάγωνα. Θα αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{\mathrm{M.AB\Gamma\Delta E}}{\mathrm{M'.A'B'\Gamma'\Delta'E'}}=\frac{\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta E}\right)}{\left(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'}\right)}.$$



Σχήμα 6

Συμβολίζουμε με Π_1 , Π_2 , Π_3 τις τριγωνικές πυραμίδες με κορυφή Μ και βάσεις β_1 = ΑΒΓ, β_2 = ΑΓΔ, β_3 = ΑΔΕ και με Π_1' , Π_2', Π_3', β_1', β_2', β_3' τα αντίστοιχα σχήματα που αναφέρονται στην πυραμίδα Μ΄.Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄. Τότε (σύμφωνα με την πρόταση 5) θα έχουμε $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$,

δηλαδή

$$\frac{\Pi_1+\Pi_2}{\Pi_2}=\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_2} \qquad (1)$$

Ομοίως θα ισχύει

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_3}=\frac{\beta_2}{\beta_3} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{\Pi_1+\Pi_2}{\Pi_3}=\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_3}$ (πρόταση V. 22). Άρα:

$$\frac{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3}{\Pi_3}=\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{\beta_3} \qquad (3)$$

Ομοίως, στην πυραμίδα Μ΄. Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ έχουμε:

$\frac{\Pi_1'+\Pi_2'+\Pi_3'}{\Pi_3'}=\frac{\beta_1'+\beta_2'+\beta_3'}{\beta_3'}$, οπότε

$$\frac{\Pi_3'}{\Pi_1'+\Pi_2'+\Pi_3'}=\frac{\beta_3'}{\beta_1'+\beta_2'+\beta_3'} \qquad (4)$$

Αλλά οι τριγωνικές πυραμίδες Π_3 , Π_3' είναι ισοϋψείς, οπότε:

$$\frac{\Pi_3}{\Pi_3'}=\frac{\beta_3}{\beta_3'} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) , (5) (σύμφωνα με την πρόταση V.22) προκύπτει

$$\frac{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3}{\Pi_3'}=\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{\beta_3'} \qquad (6)$$

Από τις (4) , (6) προκύπτει ότι: $\frac{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3}{\Pi_1'+\Pi_2'+\Pi_3'}=\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{\beta_1'+\beta_2'+\beta_3'}$,

δηλαδή $$\frac{\mathrm{M.AB\Gamma\Delta E}}{\mathrm{M'.A'B'\Gamma'\Delta'E'}}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta E})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'})}$$

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 7 (XII. 7)

Κάθε τριγωνικό πρίσμα διαιρείται σε τρεις ίσες (:ισοδύναμες) πυραμίδες.

Απόδειξη

Θεωρούμε το πρίσμα ΑΒΓ . ΔΕΖ Φέρουμε τις ΕΑ, ΕΓ, ΔΓ, οπότε το πρίσμα διαιρείται σε τρεις πυραμίδες Ε.ΑΒΓ, Ε.ΑΓΔ, Ε.ΔΓΖ. Θα δείξουμε ότι αυτές είναι ισοδύναμες, δηλαδή έχουν ίσους όγκους.

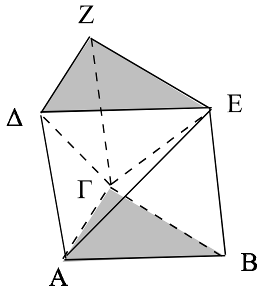
Αφού τα σχήματα ΑΒΕΔ, ΑΓΖΕ είναι παραλληλόγραμμα, οι διαγώνιές τους ΑΕ, ΓΔ τα διαιρούν σε δύο ίσα τρίγωνα (πρόταση Ι. 34), δηλαδή ΑΒΕ = ΑΔΕ, ΑΓΔ = ΖΓΔ. Άρα:

Ε.ΑΒΓ = Γ.ΑΒΕ = Γ.ΑΔΕ = Ε.ΑΓΔ = Ε.ΔΓΖ

Αφού οι πυραμίδες Ε.ΑΒΓ, Ε.ΑΓΔ, Ε.ΔΓΖ είναι ίσες, κάθε μία θα είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ του πρίσματος ΑΒΓ – ΔΕΖ,

$$\text{π.χ. } (\Delta.\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{1}{3}(\mathrm{AB}\Gamma.\Delta\mathrm{EZ})$$

ὅ.ἔ.δ.



Σχήμα 7

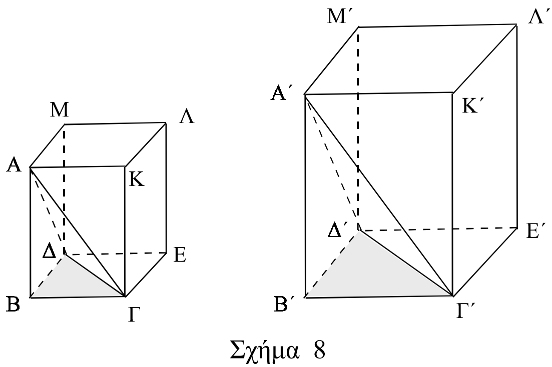
Πόρισμα

Κάθε τριγωνική πυραμίδα είναι ίση (:ισοδύναμη) με το $\frac{1}{3}$ του τριγωνικού πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος.

Πρόταση 8 (XII. 8)

Δύο όμοιες τριγωνικές πυραμίδες είναι ανάλογες των κύβων των ομολόγων πλευρών τους.

Απόδειξη



Σχήμα 8

Θεωρούμε δύο όμοιες τριγωνικές πυραμίδες Α.ΒΓΔ και Α΄.Β΄Γ΄Δ΄. Θεωρούμε επίσης τα παραλληλεπίπεδα με βάσεις ΒΓΕΔ, Β΄Γ΄Ε΄Δ΄ και ύψη ίσα με τα αντίστοιχα ύψη των πυραμίδων από τις κορυφές Α, Α΄. Θα αποδειχθεί ότι $\dfrac{(\text{Α.ΒΓΔ})}{(\text{Α}'.\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}')} = \left(\dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{Β}'\text{Γ}'}\right)^3$.

Τότε δημιουργούνται τα ζεύγη των ομοίων παραλληλογράμμων ΑΒΓΚ ~ Α΄Β΄Γ΄Κ΄, ΑΒΔΜ ~ Α΄Β΄Δ΄Μ΄ και ΒΓΕΔ ~ Β΄Γ΄Ε΄Δ΄, αφού λόγω της ομοιότητας των πυραμίδων τα παραλληλόγραμμα αυτά έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

Για τον ίδιο λόγο και τα απέναντι των ΑΒΓΚ, ΑΒΔΜ, ΒΓΕΔ παραλληλόγραμμα είναι όμοια προς τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται απέναντι των Α΄Β΄Δ΄Κ΄, Α΄Β΄Δ΄Μ΄, Β΄Γ΄Ε΄Δ΄ αντίστοιχα, αφού ανά δύο είναι ίσα.

Τα στερεά ΒΔ - ΚΛ και Β΄Δ΄ - Κ΄Λ΄ έχουν τις στερεές γωνίες τους ίσες και περιέχονται από το ίδιο πλήθος ομοίων πολυγώνων, άρα θα είναι όμοια. Οπότε, σύμφωνα με την πρόταση XI. 33, θα ισχύει

$$\frac{(\text{ΒΔ-ΚΛ})}{(\text{Β}'\text{Δ}'\text{-Κ}'\text{Λ}')} = \left(\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β}'\text{Γ}'}\right)^3 .$$

Επιπλέον, η πυραμίδα Α.ΒΓΔ είναι το $\frac{1}{3}$ του πρίσματος ΒΓΔ.ΑΚΜ και το πρίσμα ΒΓΔ.ΑΚΜ είναι το $\frac{1}{2}$ του παραλληλεπιπέδου ΒΔ.ΚΛ. Τελικά λοιπόν θα έχουμε (Α.ΒΓΔ) = $\frac{1}{6}$ (ΒΔ.ΚΛ), ή (ΒΔ.ΚΛ) = = 6 (Α.ΒΓΔ)

Επομένως θα ισχύει: $\dfrac{6(\text{Α.ΒΓΔ})}{6(\text{Α}'.\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}')} = \left(\dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{Β}'\text{Γ}'}\right)^3$, δηλαδή

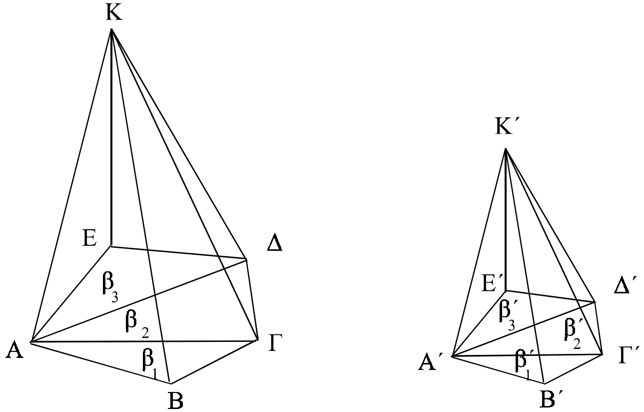
$$\frac{(\text{Α.ΒΓΔ})}{(\text{Α}'.\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}')} = \left(\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β}'\text{Γ}'}\right)^3$$

ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα

Δύο όμοιες πολυγωνικές πυραμίδες είναι ανάλογες των κύβων δύο ομόλογων ακμών τους.

Απόδειξη



Σχήμα 8.1

Ας θεωρήσουμε, δύο όμοιες πυραμίδες Κ.ΑΒΓΔΕ και Κ΄.Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ με βάσεις πεντάγωνα.

Συμβολίζουμε με Π_1, Π_2, Π_3 τις πυραμίδες με βάσεις β_1 = ΑΒΓ, β_2 = ΑΓΔ, β_3 = ΑΔΕ και με Π_1', Π_2', Π_3', β_1',β_2', β_3' τα αντίστοιχα σχήματα που αναφέρονται στην πυραμίδα Κ΄. Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄.

Σύμφωνα με την πρόταση 7 έχουμε $\dfrac{\Pi_1}{\Pi_1'} = \dfrac{\Pi_2}{\Pi_2'} = \dfrac{\Pi_3}{\Pi_3'} = \lambda^3$, όπου λ είναι ο λόγος δύο ομολόγων πλευρών (δηλαδή, $\lambda = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{KA}{K'A'} = \cdots$).

Επομένως, θα ισχύει $\dfrac{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3}{\Pi_1'+\Pi_2'+\Pi_3'} = \lambda^3$, άρα θα έχουμε:

$$\frac{(K.AB\Gamma\Delta E)}{(K'.A'B'\Gamma'\Delta'E')} = \lambda^3 = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^3 = \frac{(AB)^3}{(A'B')^3}.$$

Πρόταση 9 (XII. 9)

Αν δύο τριγωνικές πυραμίδες είναι ίσες (:ισοδύναμες), τότε οι βάσεις τους είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών και αντί-

στροφα, αν οι βάσεις δύο τριγωνικών πυραμίδων είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών, τότε οι πυραμίδες είναι ίσες (:ισοδύναμες).

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τις πυραμίδες Α.ΒΓΔ και Α΄.Β΄Γ΄Δ΄ με ύψη υ, υ΄, βάσεις ΒΓΔ, Β΄Γ΄Δ΄ και τα ισοϋψή προς αυτές παραλληλεπίπεδα ΒΔ-ΚΛ και Β΄Δ΄-Κ΄Λ΄ αντιστοίχως (βλέπε σχήμα στην πρόταση 8).

(α) Έστω ότι οι πυραμίδες (Α.ΒΓΔ) , (Α΄.Β΄Γ΄Δ΄) είναι ισοδύναμες, δηλαδή ισχύει (Α.ΒΓΔ) = (Α΄.Β΄Γ΄Δ΄). Θα αποδείξουμε ότι $\frac{(\text{ΒΓΔ})}{(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}$.

Αφού (ΒΔ - ΚΛ) = 6(Α.ΒΓΔ) και (Β΄Δ΄- Κ΄Λ΄) = 6(Α΄.Β΄Γ΄Δ΄), τα παραλληλεπίπεδα (ΒΔ-ΚΛ) , (Β΄Δ΄-Κ΄Λ΄) είναι ισοδύναμα, δηλαδή ισχύει (ΒΔ-ΚΛ) = (Β΄Δ΄-Κ΄Λ΄). Σύμφωνα με την πρόταση XI. 34, για τις βάσεις των παραλληλεπιπέδων αυτών (που είναι παραλληλόγραμμα) θα έχουμε $\frac{(\text{ΒΓΔΕ})}{(\text{Β}'\Gamma'\Delta'\text{Ε}')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}$, οπότε $\frac{2(\text{ΒΓΔ})}{2(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}$ (πρόταση Ι. 34).

Τελικά λοιπόν ισχύει $\frac{(\text{ΒΓΔ})}{(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}$.

(β) Έστω τώρα ότι οι βάσεις των πυραμίδων είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών, $\frac{(\text{ΒΓΔ})}{(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}$. Θα αποδείξουμε ότι οι πυραμίδες (Α.ΒΓΔ) , (Α΄.Β΄Γ΄Δ΄) είναι ισοδύναμες, δηλαδή (Α.ΒΓΔ) = (Α΄.Β΄Γ΄Δ΄).

Αφού $\frac{(\text{ΒΓΔ})}{(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}$, σύμφωνα με την πρόταση Ι. 34, θα έχουμε:

$$\frac{(\text{ΒΓΕΔ})}{(\text{Β}'\Gamma'\text{Ε}'\Delta')} = \frac{2(\text{ΒΓΔ})}{2(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{(\text{ΒΓΔ})}{(\text{Β}'\Gamma'\Delta')} = \frac{\upsilon'}{\upsilon}.$$

Επομένως (ΒΔ.-ΚΛ) = (Β΄Δ΄-Κ΄Λ΄) (πρόταση XI. 34), δηλαδή 6(Α.ΒΓΔ) = 6(Α΄. Β΄Γ΄Δ΄), οπότε (Α. ΒΓΔ) = (Α΄.Β΄Γ΄Δ΄).

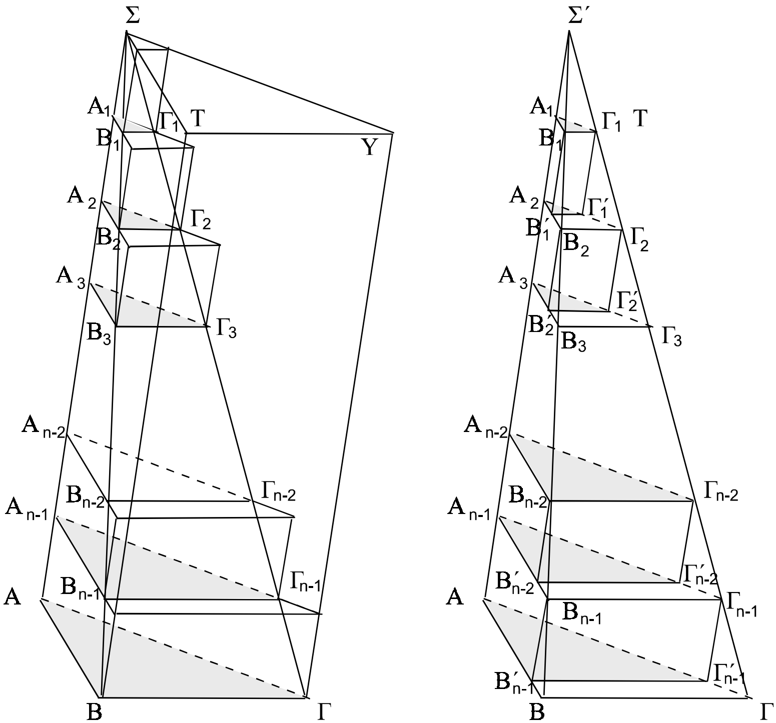
ὅ.ἔ.δ.

6. Σχόλια στη μέτρηση πυραμίδων και πρισμάτων

6.1. Μέτρηση πυραμίδας

Μπορούμε να αποδείξουμε απ’ ευθείας ότι δύο πυραμίδες με ίσα ύψη και ισεμβαδικές βάσεις έχουν ίσους όγκους, με μέθοδο που πλησιάζει περισσότερο στη σύγχρονη διαδικασία ολοκλήρωσης.

Πράγματι, θεωρούμε τις πυραμίδες V = Σ - ΑΒΓ, V΄ = Σ΄- Α΄Β΄Γ΄ με ύψος υ και βάσεις εμβαδού β (βλέπε σχήμα 6.1). Αρκεί να δείξουμε ότι αποκλείονται οι σχέσεις V > V΄ και V < V΄.



Σχήμα 6.1.1

Χωρίζουμε την ακμή ΣΑ σε n ίσα τμήματα με σημεία διαίρεσης τα σημεία $Α_1$, $Α_2$,…, $Α_{n-1}$ και από τα σημεία αυτά φέρουμε τα παράλληλα στη βάση ΑΒΓ επίπεδα. Ονομάζουμε $Β_1 Γ_1$, $Β_2 Γ_2$,…, $Β_{n-1} Γ_{n-1}$ τις τομές των επιπέδων αυτών με την έδρα ΣΒΓ και $Β_1΄ Γ_1΄$, $Β_2΄ Γ_2΄$,…, $Β_{n-1}΄ Γ_{n-1}΄$ τις παράλληλες προς την ΣΑ προβολές των $Β_1 Γ_1$, $Β_2 Γ_2$,…, $Β_{n-1} Γ_{n-1}$ επί των εδρών $Α_2\ Β_2\ Γ_2$, $Α_3\ Β_3\ Γ_3$,…, $Α_{n-1}\ Β_{n-1}\ Γ_{n-1}$, ΑΒΓ αντίστοιχα.

Στην πυραμίδα Σ-ΑΒΓ, θεωρούμε τα πρίσματα $Π_1$, $Π_2$,…, $Π_n$ με βάσεις $β_1 = Α_1Β_1Γ_1$, $β_2 = Α_2Β_2Γ_2$,…, $β_{n-1} = Α_{n-1}Β_{n-1}Γ_{n-1}$, $β = ΑΒΓ$ αντίστοιχα, που το καθένα τους έχει ύψος $\frac{υ}{n}$ και τα αντίστοιχα ισοϋψή πρίσματα P_1, P_2 , …, P_{n-1} με βάσεις $β_1, β_2, …, β_{n-1}$.

Αν θέσουμε $S_n = Π_1 + Π_2 + … + Π_n$ και $s_n = P_1 + P_2 + … + P_{n-1}$, τότε προφανώς ισχύει: $s_n < V < S_n$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία στην πυραμίδα Σ΄-Α΄Β΄Γ΄ και χρησιμοποιώντας αντίστοιχους συμβολισμούς, θα έχουμε $s_n' < V' < S_n'$, όπου $S_n' = Π_1' + Π_2' + … + Π_n'$, $s_n' = P_1' + P_2' + … + P'_{n-1}$.

Όμως $Π_i = Π_i'$, για κάθε $i \in \{1, 2, …, n\}$ και $P_i = P_i'$, για κάθε $i \in \{1, 2, …, (n-1)\}$, αφού έχουν ίσα ύψη και βάσεις ισεμβαδικές, εφόσον $\frac{β_i}{β} = \left(\frac{i}{n}\right)^2$, για κάθε $i \in \{1, 2, …, (n-1)\}$.

Άρα $S_n = S_n'$ και $s_n = s_n'$, οπότε $s_n < V' < S_n$.

Έστω ότι ισχύει $V > V'$. Τότε, ονομάζοντας W το πρίσμα ΑΒΓ - ΣΤΥ με ύψος υ και εμβαδόν βάσης β και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις $P_i = Π_i$, για κάθε $i \in \{1, 2, . . .(n-1)\}$, θα έχουμε

$$V < S_n,\ -V' < -s_n \Rightarrow V - V' < S_n - s_n =$$

$$= (Π_1 + Π_2 + . . . + Π_n) - (P_1 + P_2 + . . . + P_{n-1}) = Π_n = \frac{W}{n} \quad (1).$$

Σύμφωνα όμως με το αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη, υπάρχει $n \in N$ τέτοιο, ώστε $n (V – V') > W$, οπότε $V – V' > \frac{W}{n}$ και λόγω της (1), $\frac{W}{n} > V – V'$ που είναι άτοπο. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει $V > V'$.

Έστω τώρα ότι ισχύει $V < V'$. Τότε ομοίως θα έχουμε

$$V' - V < S_n - s_n = Π_n = \frac{W}{n} \qquad (2),$$

και αφού $V' – V > 0$, σύμφωνα με το αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη, θα υπάρχει $n \in N$ τέτοιο, ώστε $n(V' - V) > W$. Οπότε $V' - V > \frac{W}{n}$ και λόγω της (2), $\frac{W}{n} > V' - V$, που είναι άτοπο.

Επομένως δεν μπορεί να ισχύει $V < V'$.

Τελικά λοιπόν θα έχουμε $V = V'$.

Παρατήρηση:

Με βάση τις σχέσεις $\frac{\beta_i}{\beta} = \left(\frac{i}{n}\right)^2$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$ και θεωρώντας γνωστό ότι για τον όγκο του πρίσματος W με βάση β και ύψος υ έχουμε $W = \beta \cdot \upsilon$ (βλέπε και σχόλιο που ακολουθεί), μπορούμε να υπολογίσουμε απ’ ευθείας τα όρια των ακολουθιών (S_n), (s_n) και να δείξουμε ότι είναι ίσα με $\frac{W}{3}$ ως εξής:

Έχουμε $S_n = \Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_n = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} + \beta) \cdot \frac{\upsilon}{n} =$

$$= \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \beta + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \beta + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \beta + \beta\right] \cdot \frac{\upsilon}{n} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^2} \cdot \beta \cdot \frac{\upsilon}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} \cdot \beta \cdot \frac{\upsilon}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\beta \cdot \upsilon}{6}, \text{ οπότε } \lim S_n = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\beta \cdot \upsilon}{6} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{3} = \frac{W}{3}$$

Επίσης $s_n = P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1}) \frac{\upsilon}{n} =$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^2} \cdot \beta \cdot \frac{\upsilon}{n} = \frac{(n-1)n \cdot (2n-1)}{6n^2} \cdot \beta \cdot \frac{\upsilon}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\beta \cdot \upsilon}{6}$$

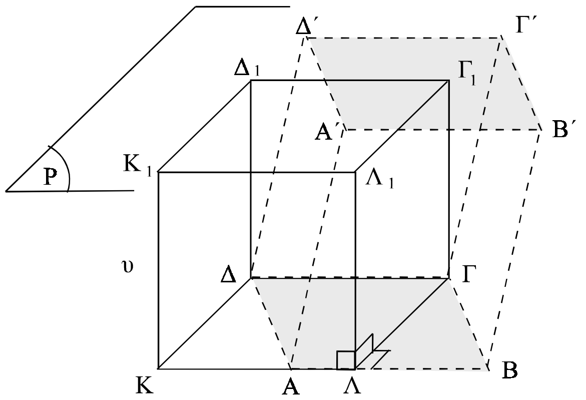
Έχουμε λοιπόν $\lim s_n = 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{6} = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{3} = \dfrac{W}{3}$. Το κοινό όριο των (S_n), (s_n) θεωρούμε πλέον ως όγκο της πυραμίδας.

6.2 Μέτρηση πρίσματος

Αν θεωρήσουμε τον κύβο, του οποίου η ακμή είναι μονάδα μέτρησης μήκους ως μονάδα μέτρησης όγκου, δηλαδή με όγκο $V_o = 1$, τότε εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ο όγκος παραλληλεπιπέδου με βάση β και ύψος υ είναι ίσος με $V = \beta \cdot \upsilon$.

Κατά την απόδειξη θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεών του, το οποίο προκύπτει με συλλογισμούς αντίστοιχους με αυτούς που ακολουθούν και από την ανάπτυξη που προηγήθηκε στο βιβλίο ΙΙ.

Πράγματι, έστω ο κύβος V = ΑΒΓΔ - Α΄Β΄Γ΄Δ΄ (βλέπε σχήμα 6.2).



Σχήμα 6.2

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΓΔ ισεμβαδικό με το ΑΒΓΔ και στη συνέχεια ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο V_1 = ΚΛΓΔ - $K_1\Lambda_1\Gamma_1\Delta_1$ με την έδρα $K_1\Lambda_1\Gamma_1\Delta_1$ επί του επιπέδου Ρ = Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση XI.32, θα έχουμε: $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΚΛΓΔ})} = 1$, οπότε $V = V_1$.

Θέτουμε ΚΛ = x, ΚΔ = y και θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο V΄ με διαστάσεις x, 1, 1.

Σύμφωνα πάλι με την πρόταση XI. 32 θα έχουμε $\dfrac{V_1}{V'} = \dfrac{y \cdot \upsilon}{1 \cdot 1} = y \cdot \upsilon$,

$\dfrac{V'}{V_0} = \dfrac{x \cdot 1}{1 \cdot 1} = x$. Άρα $\dfrac{V_1}{V_0} = x \cdot y \cdot \upsilon$, οπότε

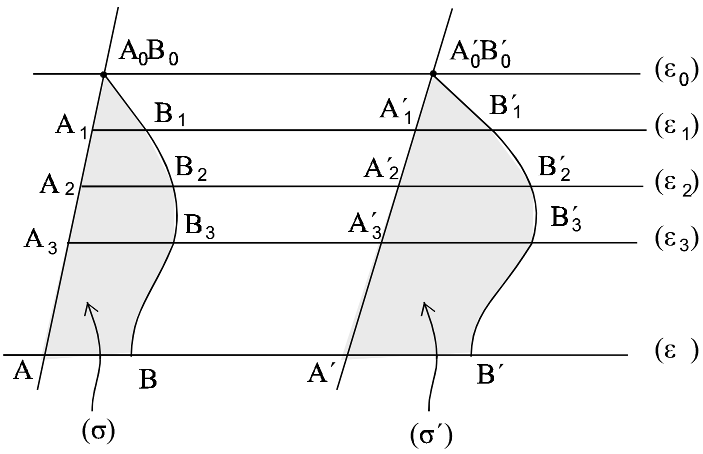
$$V = V_1 = x\ y\ \upsilon \cdot V_0 = x\ y\ \upsilon = (\text{ΚΛΓΔ}) \cdot \upsilon = (\text{ΑΒΓΔ})\ \upsilon = \beta \cdot \upsilon .$$

Κάθε τριγωνικό πρίσμα με βάση β μπορεί να θεωρηθεί ως το μισό παραλληλεπιπέδου με το ίδιο ύψος υ και βάση 2β. Επομένως, ο όγκος του ισούται με $V = \dfrac{1}{2}\, 2\beta \cdot \upsilon = \beta \cdot \upsilon$.

Τέλος, κάθε πρίσμα με βάση β και ύψος υ μπορεί να αναλυθεί σε τριγωνικά πρίσματα, οπότε ο όγκος του και πάλι θα βρεθεί ίσος με $V = \beta \cdot \upsilon$.

6.3 Η Αρχή του Καβαλιέρι

Η σύγκριση των εμβαδών δύο επίπεδων σχημάτων ή των όγκων δύο στερεών σχημάτων με ίσα ύψη μπορεί να γίνει εύκολα με βάση την αναπόδεικτη μεν αλλά με επιτυχία εφαρμοζόμενη ***αρχή του Καβαλιέρι,*** στην οποία και θα αναφερθούμε παρακάτω.



Σχήμα 6.3.1

"Αν δύο επίπεδα σχήματα (σ), (σ΄) ***τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες*** (ε_0), (ε_1), (ε_2), (ε_3) , . . . ,(ε) ***κατά τα αντίστοιχα ζεύγη ευθύγραμμων τμημάτων*** $(A_0 B_0, A_0΄B_0΄)$, $(A_1 B_1, A_1΄B_1΄)$, $(A_2B_2, A_2΄B_2΄)$, $(A_3 B_3, A_3΄B_3΄)$, …, (ΑΒ, Α΄Β΄) ***έτσι ώστε:*** $(A_0΄B_0΄) = \lambda\,(A_0B_0)$, $(A_1΄B_1΄) = \lambda\,(A_1B_1)$, $(A_2΄B_2΄) = \lambda\,(A_2 B_2)$, $(A_3 B_3) = \lambda\,(A_3 B_3)$, . . . , $(A΄B΄) = \lambda(AB)$, ***τότε ισχύει*** $(\sigma΄) = \lambda \cdot (\sigma)$".

Μοιάζει έτσι σαν να θεωρούνται τα σχήματα (σ), (σ΄) ως σύνολα ευθύγραμμων τμημάτων, δηλαδή σχημάτων με μηδενικό εμβαδόν.

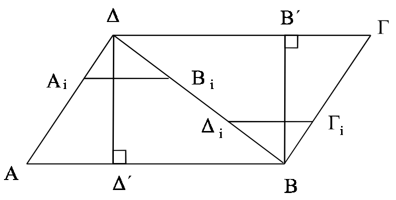
Έτσι λοιπόν θα έχουμε $(\sigma) = \sum \left(A_iB_i\right)$ και

$$(\sigma΄) = \sum \left(A_i΄B_i΄\right) = \sum \lambda\left(A_iB_i\right) = \lambda \sum \left(A_iB_i\right) = \lambda \cdot (\sigma).$$

Κάτι τέτοιο βέβαια εμπεριέχει το ίδιο παράδοξο που εμφανίζεται στα παράδοξα του Ζήνωνα, όπου μια κίνηση θεωρείται ως ένα σύνολο από ακινησίες ή ένα ευθύγραμμο τμήμα ως σύνολο σημείων, δηλαδή ποσοτήτων με μηδενικό μήκος.

Παρόλη την παραδοξολογία του φαινομένου η αρχή αυτή δίνει ορθά συμπεράσματα, κάτι μάλιστα το οποίο ο Leibniz εφάρμοσε σε πάρα πολλές περιπτώσεις αποδεχόμενος την αρχή χωρίς καμία αμφισβήτηση.

Πολύ πριν από τον Καβαλιέρι, ο Αρχιμήδης είχε χρησιμοποιήσει παρόμοια συλλογιστική προκειμένου να τετραγωνίσει το παραβολικό χωρίο, θεωρώντας εκεί το χωρίο ως σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων. Το θεώρησε δηλαδή ως μία επίπεδη πλάκα με συγκεκριμένο βάρος, η οποία απαρτίζεται από ευθύγραμμα τμήματα, που το καθένα τους έχει επίσης ένα συγκεκριμένο βάρος. Όμως, σε αντίθεση με τον Leibniz, ο Αρχιμήδης τονίζει ότι αυτή είναι απλώς μια μέθοδος για να υποψιαστεί τη σχέση του εμβαδού του παραβολικού χωρίου με το εμβαδόν ενός τριγώνου και δεν αποτελεί απόδειξη. Για να δώσει αυστηρή απόδειξη εγκλώβισε το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου μεταξύ δύο αθροισμάτων που αποτελούνται από άπειρα τρίγωνα το καθένα.



Σχήμα 6.3.2

Μία απλή επαλήθευση της αρχής του Καβαλιέρι έχουμε στην περίπτωση των δύο τριγώνων στα οποία χωρίζεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ από τη διαγώνιό του ΒΔ.

Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, τα οποία έχουν ίσα ύψη ΔΔ΄, ΒΒ΄, μπορεί να θεωρηθούν ως αποτελούμενα από ίσα ευθύγραμμα τμήματα A_iB_i και $\Gamma_i\,\Delta_i$ παράλληλα στις βάσεις τους ΑΒ, ΓΔ και σε ίσες αποστάσεις από αυτές.

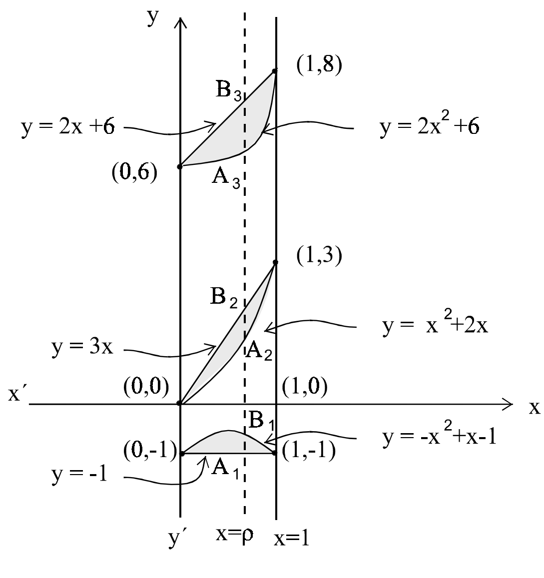
Έτσι λοιπόν, αφού $A_iB_i = \Gamma_i\Delta_i$, θα είναι και $\Sigma(A_iB_i) = \Sigma(\Gamma_i\,\Delta_i)$, δηλαδή (ΑΒΔ) = (ΒΓΔ).

Αν θεωρήσουμε βέβαια γνωστή την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, τότε για εμβαδά σχημάτων που περικλείονται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων αυτό είναι εύκολα αποδείξιμο.

Για παράδειγμα, αν (στο σχήμα 6.3.3) θεωρήσουμε τα επίπεδα σχήματα (σ_1), (σ_2), (σ_3) που ορίζονται από τα ζεύγη των συναρτήσεων:

$$\left.\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-x^2+x-1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=3x \\ y=x^2+2x \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y=2x+6 \\ y=2x^2+6 \end{array}\right\}.$$

και είναι τοποθετημένα μεταξύ των παραλλήλων ευθειών $x = 0$ και $x = 1$ τότε, κάθε ευθεία $x = \rho$ με $0 \le \rho \le 1$ τέμνει τα σχήματα σ_1, σ_2, σ_3 κατά τα τμήματα $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_3$ και ισχύει $A_2\,B_2 = A_1\,B_1$, $A_3\,B_3 = 2A_1\,B_1$.



Σχήμα 6.3.3

Εύκολα λοιπόν διαπιστώνουμε ότι $(\sigma_2) = (\sigma_1)$ και $(\sigma_3) = 2(\sigma_1)$, αφού

$$(\sigma_1) = \int_0^1 \left|-x^2 + x - 1 - (-1)\right| dx = \int_0^1 \left|-x^2 + x\right| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \quad \text{και}$$

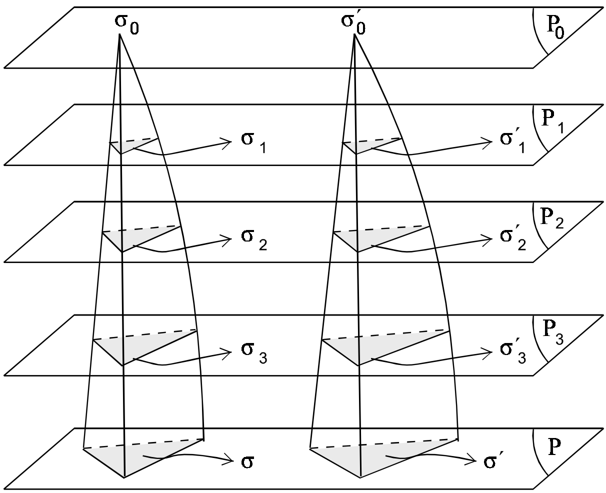
$$(\sigma_2) = \int_0^1 \left|3x - (x^2 + 2x)\right| dx = \int_0^1 \left|x - x^2\right| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \ ,$$

$$(\sigma_3) = \int_0^1 \left|2x + 6 - (2x^2 + 6)\right| dx = \int_0^1 \left|2x - 2x^2\right| dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left|x - x^2\right| dx = 2\int_0^1 (x - x^2) dx$$

Η αντίστοιχη *αρχή Καβαλιέρι* στο χώρο μπορεί να εφαρμοστεί σε στερεά σχήματα με ίσα ύψη ως εξής:

"Αν δύο στερεά V, V΄ ***τέμνονται από τα παράλληλα επίπεδα*** (P_0), (P_1), (P_2), (P_3), . . . , (P) ***κατά τα αντίστοιχα ζεύγη επιπέδων σχημάτων*** (σ_0, σ_0'), (σ_1, σ_1'), (σ_2, σ_2'), (σ_3, σ_3'), . . .(σ, σ') ***έτσι ώστε:*** $(\sigma_0') = \lambda\,(\sigma_0)$, $(\sigma_1') = \lambda\,(\sigma_1)$, $(\sigma_2') = \lambda\,(\sigma_2)$, $(\sigma_3') = \lambda\,(\sigma_3)$, . . . , $(\sigma') = \lambda\,(\sigma)$ ***τότε ισχύει:*** $(V') = \lambda \cdot (V)$ ".



Σχήμα 6.3.4

Και πάλι λοιπόν φαίνεται να θεωρούνται τα σχήματα V, V΄ ως σύνολα επίπεδων σχημάτων, δηλαδή σχημάτων με μηδενικό όγκο.

Έτσι λοιπόν (βλέπε σχήμα 6.3.4) θα έχουμε: $(V) = \Sigma\left(\sigma_i\right)$ και

$$(V') = \Sigma\ \left(\sigma_i'\right) = \sum \lambda\left(\sigma_i\right) = \lambda\ \sum\left(\sigma_i\right) = \lambda\ (V).$$

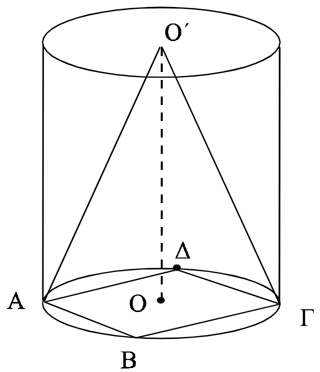
7. Σύγκριση κυλίνδρων και κώνων

Πρόταση 10 (XII.10)

Κάθε κώνος είναι ίσος (:ισοδύναμος) με το $\frac{1}{3}$ κυλίνδρου ο οποίος έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κύλινδρο V και τον κώνο V΄ τον εγγεγραμμένο στον κύλινδρο. Θέλουμε να δείξουμε ότι $V' = \frac{1}{3}V$, δηλαδή $V = 3V'$.



Σχήμα 10

α) Έστω ότι $V > 3V'$, οπότε θα έχουμε $V - 3V' = \varepsilon > 0$. Αποκόπτοντας από τη βάση κανονικά πολύγωνα E_ν, $\nu = 4, 8, 16, \ldots$ εγγεγραμμένα στον κύκλο, αφαιρούμε από τη βάση κάθε φορά, ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπολοίπου, όπως αποδείχθηκε στο Γενικό Λήμμα.

Αποκόπτοντας ακολούθως από τον κύλινδρο τα πρίσματα ισοϋψή προς αυτόν και με βάσεις τα πολύγωνα E_ν, $\nu = 4, 8, 16, \ldots$, αφαιρούμε από τον κύλινδρο κάθε φορά, ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπολοίπου.

Σύμφωνα και πάλι με το Γενικό Λήμμα, θα προκύψουν κάποια στιγμή ως υπόλοιπο μερικά κυλινδρικά τμήματα, που το άθροισμά τους x είναι μικρότερο από το $\varepsilon = V - 3V'$, δηλαδή $x < V - 3V'$, οπότε $3V' < V - x$.

Όμως τότε το στερεό $y = V - x$ είναι το εγγεγραμμένο στον κύλινδρο πρίσμα, οπότε θα έχουμε $3V' < y$.

Το πρίσμα όμως αυτό έχει όγκο τριπλάσιο από τον όγκο V_o της πυραμίδας με την ίδια βάση και ίσο ύψος (πρόταση 7, πόρισμα), δηλαδή $y = 3\,V_o$, οπότε $3V' < 3V_o$, άρα $V' < V_o$.

Όμως $V_o < V'$, αφού η πυραμίδα αυτή είναι εγγεγραμμένη στον κώνο. Αυτό όμως είναι άτοπο, επομένως δεν μπορεί να ισχύει $V > 3V'$.

β) Έστω τώρα ότι $V < 3\,V'$. Τότε $V' > \frac{1}{3}V$, οπότε $V' - \frac{1}{3}V = \varepsilon > 0$.

Αποκόπτοντας από τον κώνο τις ισοϋψείς προς αυτόν πυραμίδες με βάσεις τα κανονικά πολύγωνα E_ν, $\nu = 4, 8, 16 \ldots$, αφαιρούμε από τον κώνο κάθε φορά ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπολοίπου.

Σύμφωνα με το Γενικό Λήμμα, θα προκύψουν κάποια στιγμή ως υπόλοιπο μερικά κωνικά τμήματα με άθροισμα x, μικρότερο από το $\varepsilon = V' - \frac{1}{3}V$, δηλαδή $x < V' - \frac{1}{3}V$, οπότε $V' - x > \frac{1}{3}V$. Όμως $V' - x =$ $= V_o = \frac{1}{3}y$, όπου τώρα V_o είναι η εγγεγραμμένη στον κώνο πυραμίδα και y το εγγεγραμμένο στον κύλινδρο πρίσμα. Άρα $\frac{1}{3}y > \frac{1}{3}V$, οπότε $y > V$. Αλλά $y < V$, αφού το πρίσμα είναι εγγεγραμμένο στον κύλινδρο. Αυτό όμως είναι άτοπο, οπότε δεν μπορεί να ισχύει $V < 3V'$.

Άρα θα ισχύει $V = 3V'$.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 11 (XII.11)

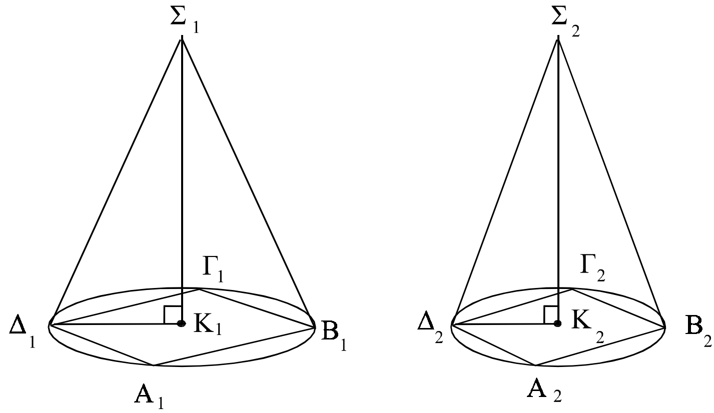
Δύο ισοϋψείς κώνοι ή κύλινδροι είναι ανάλογοι των βάσεών τους.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δύο ισοϋψείς κώνους V_1 , V_2 με βάσεις τους κύκλους K_1, K_2. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{V_1}{V_2}=\frac{K_1}{K_2}$.

Έστω $\frac{K_1}{K_2}\neq\frac{V_1}{V_2}$. Τότε $\frac{K_1}{K_2}=\frac{V_1}{S}$ με $S\neq V_2$.

α) Έστω ότι ισχύει $S < V_2$. Τότε θα έχουμε $V_2 - S = \varepsilon > 0$.



Σχήμα 11

Όπως διαπιστώσαμε στο Γενικό Λήμμα, αποκόπτοντας από τη βάση K_2 τα εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα E_ν , ν = 4, 8, 16, . . ., αφαιρούμε από τον κύκλο K_2 κάθε φορά ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπολοίπου.

Ομοίως, αποκόπτοντας από τον κώνο V_2 τις πυραμίδες με βάσεις E_ν , ν = 4, 8, 16, . . ., και ίδιο ύψος με τον κώνο, αφαιρούμε από τον κώνο V_2 κάθε φορά ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπολοίπου.

Σύμφωνα και πάλι με το Γενικό Λήμμα θα προκύψουν κάποια στιγμή ως υπόλοιπο, τμήματα του κώνου με άθροισμα X, μικρότερο του θετικού αριθμού $\varepsilon = V_2 - S$, δηλαδή $X < V_2 - S$, οπότε $S < V_2 - X$.

Η διαφορά όμως $V_2 - X$ παριστάνει την πυραμίδα Π_2 που απομένει και είναι εγγεγραμμένη στον κώνο V_2 , δηλαδή $\Pi_2 = V_2 - X$.

Αν θεωρήσουμε την αντίστοιχη πυραμίδα Π_1, την εγγεγραμμένη στον κώνο V_1, τότε οι βάσεις των πυραμίδων Π_1, Π_2 είναι ανάλογες προς τα τετράγωνα των διαμέτρων των κύκλων K_1, K_2 (πρόταση 1) , άρα και ανάλογες των κύκλων K_1, K_2 (πρόταση 2), δηλαδή $\dfrac{\Pi_1}{\Pi_2} = \dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{V_1}{S}$.

Άρα $\dfrac{S}{\Pi_2} = \dfrac{V_1}{\Pi_1} > 1$, αφού $V_1 > \Pi_1$. Επομένως θα ισχύει $S > \Pi_2 =$ $= V_2 - X$, ενώ έχουμε $S < V_2 - X$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Έτσι δεν μπορεί να ισχύει $S < V_2$.

β) Έστω τώρα ότι ισχύει $S > V_2$. Τότε $\dfrac{K_2}{K_1} = \dfrac{S}{V_1}$. Έστω $\dfrac{S}{V_1} = \dfrac{V_2}{S'}$, οπότε $\dfrac{S'}{V_1} = \dfrac{V_2}{S} < 1$, αφού $V_2 < S$, άρα $S' < V_1$ (βλέπε λήμμα μετά την πρόταση 2). Επομένως $\dfrac{K_2}{K_1} = \dfrac{V_2}{S'}$ με $S' < V_1$.

Εφαρμόζοντας τώρα στον κώνο V_1 τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην περίπτωση (α) στον κώνο V_2, με παρόμοιους συλλογισμούς καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε δεν μπορούμε να έχουμε $S > V_2$.

Αν λοιπόν ισχύει $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{V_1}{S}$ τότε, από τα (α) και (β) προκύπτει ότι $S = V_2$, δηλαδή $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{V_1}{V_2}$.

Αν θεωρήσουμε τους αντίστοιχους κυλίνδρους V_1', V_2', τότε (από την πρόταση 10) και πάλι θα έχουμε $\dfrac{V_1'}{V_2'} = \dfrac{3V_1}{3V_2} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{K_1}{K_2}$.

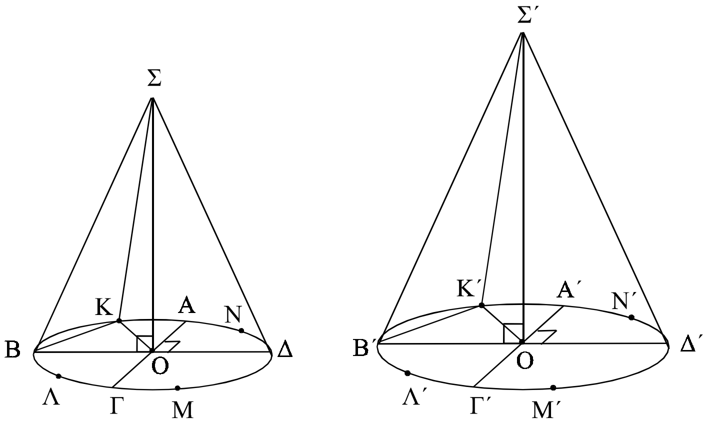
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 12 (XII. 12)

Δύο όμοιοι κώνοι ή κύλινδροι είναι ανάλογοι των κύβων των διαμέτρων των βάσεών τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο όμοιους κώνους V, V' με κορυφές τα σημεία Σ, Σ' και τα εγγεγραμμένα στις βάσεις τους τετράγωνα ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες, ΑΒ // Α΄Β΄,... . Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{(B\Delta)^3}{(B'\Delta')^3}$.



Σχήμα 12

Έστω $\dfrac{(\mathrm{B\Delta})^3}{(\mathrm{B'\Delta'})^3} = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{S}}$ με $\mathrm{S} \neq \mathrm{V'}$.

α) Έστω S < V΄. Τότε V΄- S = ε > 0.

Αποκόπτοντας από τον κύκλο (Ο΄), που είναι βάση του κώνου V΄ τα εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα E_ν , ν = 4, 8, 16, . . . , αφαιρούμε (σύμφωνα με τον Γενικό Λήμμα) από τον κύκλο αυτό κάθε φορά ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπόλοιπου.

Αποκόπτοντας ακολούθως από τον κώνο V΄ τις πυραμίδες με βάσεις τα πολύγωνα E_ν, ν = 4, 8, 16, . . . και ύψος ίδιο με του κώνου, αφαιρούμε από τον κώνο αυτό κάθε φορά ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό του προηγούμενου υπόλοιπου.

Σύμφωνα και πάλι με το Γενικό Λήμμα, θα προκύψουν κάποια στιγμή ως υπόλοιπο τμήματα του κώνου με άθροισμα Χ, μικρότερο του θετικού αριθμού ε = V΄- S, δηλαδή

$$\mathrm{X} < \mathrm{V'} - \mathrm{S},$$

οπότε $$\mathrm{S} < \mathrm{V'} - \mathrm{X}. \qquad (1)$$

Η διαφορά όμως V΄– Χ παριστάνει την πυραμίδα Π΄ που απομένει και η οποία είναι εγγεγραμμένη στον κώνο V΄, δηλαδή Π΄ = V΄– Χ.

Έστω Π η αντίστοιχη πυραμίδα η εγγεγραμμένη στον κώνο V.

Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας), ότι η σχέση (1) προκύπτει π.χ. για ν = 8, δηλαδή όταν πάρουμε τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$ και τα αντίστοιχα μέσα Κ΄, Λ΄, Μ΄, Ν΄ των τόξων $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'\Gamma'}$, $\overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$, $\overset{\frown}{\Delta'A'}$.

Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα που περικλείουν και καθορίζουν αυτές τις πυραμίδες είναι αντιστοίχως όμοια ένα προς ένα. Για παράδειγμα, θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΣΚΒ, Σ΄Κ΄Β΄ είναι όμοια.

Φέρουμε τις ΟΚ, Ο΄Κ΄. Επειδή οι κώνοι είναι όμοιοι, αν ρ και ρ΄ είναι οι ακτίνες των βάσεων τους, θα έχουμε:

$$\frac{O\Sigma}{O'\Sigma'} = \frac{B\Delta}{B'\Delta'} = \frac{2\rho}{2\rho'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OK}{O'K'}.$$

Αφού $\frac{O\Sigma}{O'\Sigma'} = \frac{OB}{O'B'}$ και $B\hat{O}\Sigma = B'\hat{O}'\Sigma'$ (= 1 ορθή), σύμφωνα με την πρόταση VI. 16, θα έχουμε ότι τα τρίγωνα ΒΟΣ , Β΄Ο΄Σ΄ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{\Sigma B}{\Sigma' B'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{\rho}{\rho'} \qquad (2)$$

Επίσης αφού $\frac{O\Sigma}{O'\Sigma'} = \frac{OK}{O'K'}$ και $K\hat{O}\Sigma = K'\hat{O}'\Sigma'$ (= 1 ορθή), τα τρίγωνα ΚΟΣ, Κ΄Ο΄Σ΄ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{\Sigma K}{\Sigma' K'} = \frac{OK}{O'K'} = \frac{\rho}{\rho'} \qquad (3)$$

Τέλος, αφού $\frac{OB}{O'B'} = \frac{OK}{O'K'} \left(= \frac{\rho}{\rho'} \right)$ και

$B\hat{O}K = B'\hat{O}'K'$ $\left(= \frac{1}{8} \cdot 4 \right.$ ορθές), τα τρίγωνα ΒΟΚ, Β΄Ο΄Κ΄ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{KB}{K'B'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{\rho}{\rho'} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3), (4) προκύπτει: $\frac{\Sigma B}{\Sigma' B'} = \frac{\Sigma K}{\Sigma' K'} = \frac{KB}{K'B'}$, οπότε τα τρίγωνα ΣΚΒ, Σ΄Κ΄Β΄ θα είναι και ισογώνια (πρόταση VI.5), δηλαδή όμοια (πρόταση VI, ορισμός 1).

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό XI.9, οι πυραμίδες Σ.ΟΒΚ και

Σ΄.Ο΄Β΄Κ΄ είναι όμοιες, αφού περιέχονται από όμοια και ίσου πλήθους πολύγωνα. Άρα $\frac{(\Sigma \cdot \mathrm{OBK})}{(\Sigma'\cdot \mathrm{O'B'K'})} = \frac{(\mathrm{OB})^3}{(\mathrm{O'B'})^3} = \frac{(\mathrm{B}\Delta)^3}{(\mathrm{B'}\Delta')^3}$.

Το ίδιο συμβαίνει σε όλες τις πυραμίδες με κορυφές Σ, Σ΄ και βάσεις τα ισοσκελή τρίγωνα που έχουν κορυφές τα κέντρα των κύκλων Ο, Ο΄ και βάσεις τις πλευρές των οκταγώνων των εγγεγραμμένων στους κύκλους.

Επειδή όμως σε ίσα κλάσματα ο λόγος ενός των ηγουμένων προς έναν από τους επόμενους ισούται με το λόγο όλων των ηγουμένων προς όλους τους επόμενους (πρόταση V.12), προκύπτει:

$$\frac{(\Sigma \cdot \mathrm{AKB}\Lambda\Gamma\mathrm{M}\Delta\mathrm{N})}{(\Sigma'\cdot \mathrm{A'K'B'}\Lambda'\Gamma'\mathrm{M'}\Delta'\mathrm{N'})} = \frac{(\Sigma \cdot \mathrm{OBK})}{(\Sigma' \cdot \mathrm{O'B'K'})} = \frac{(\mathrm{B}\Delta)^3}{(\mathrm{B'}\Delta')^3}$$

Αλλά $\frac{V}{S} = \frac{(\mathrm{B}\Delta)^3}{(\mathrm{B'}\Delta')^3}$, οπότε $\frac{V}{S} = \frac{\Pi}{\Pi'}$. Άρα $\frac{S}{\Pi'} = \frac{V}{\Pi} > 1$, αφού η πυραμίδα Π είναι εγγεγραμμένη στον κώνο V και ισχύει V > Π.

Άρα S > Π΄ = V΄– X. Όμως, λόγω της σχέσης (1), έχουμε S < V΄– X, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει S < V΄.

β) Έστω τώρα ότι είναι S > V΄. Επομένως έχουμε $\frac{S}{V} = \frac{(\mathrm{B'}\Delta')^3}{(\mathrm{B}\Delta)^3}$ και αν $\frac{S}{V} = \frac{V'}{S'}$, τότε (σύμφωνα με το πόρισμα της πρότασης V. 7), θα είναι $\frac{V}{S'} = \frac{S}{V'} > 1$, αφού S > V΄. Άρα V > S΄ (λήμμα μετά την πρόταση XII. 2). Επομένως $\frac{(\mathrm{B'}\Delta')^3}{(\mathrm{B}\Delta)^3} = \frac{V'}{S'}$ με S΄ < V και το οποίο με συλλογισμούς παρόμοιους με αυτούς της περίπτωσης (α) οδηγεί σε άτοπο.

Αποκλείεται λοιπόν να ισχύει $\frac{V}{S} = \frac{(\mathrm{B}\Delta)^3}{(\mathrm{B'}\Delta')^3}$ με S $\neq$ V΄.

Επομένως ισχύει $\frac{V}{V'} = \frac{(\mathrm{B}\Delta)^3}{(\mathrm{B'}\Delta')^3}$.

Αν V_1, V_1' είναι οι αντίστοιχοι κύλινδροι, τότε θα έχουμε: $V_1 = 3$ V, $V_1' = 3$ V′, (πρόταση XII.10), οπότε:

$$\frac{V_1}{V_1'} = \frac{3V}{3V'} = \frac{V}{V'} = \frac{(B\Delta)^3}{(B'\Delta')^3}.$$

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση:

Στα *Στοιχεία* καταλήγουμε στη διαπίστωση ότι τα τρίγωνα ΣΚΒ, Σ΄Κ΄Β΄ είναι όμοια με μια πολυπλοκότερη διαδικασία, εφαρμόζοντας την *ιδιότητα δι' ίσου* (πρόταση V. 22), χρησιμοποιώντας βέβαια τα ίδια ζεύγη ομοίων τριγώνων.

Συγκεκριμένα, από τις ομοιότητες των τριγώνων ΒΟΣ, Β΄Ο΄Σ΄ και ΒΟΚ, Β΄Ο΄Κ΄ προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\Sigma B}{OB} = \frac{\Sigma' B'}{O' B'} \qquad (5) \qquad \text{και}$$

$$\frac{OB}{BK} = \frac{O'B'}{B'K'} \qquad (6)$$

από τις οποίες με εφαρμογή της *ιδιότητας δι' ίσου* παίρνουμε

$$\frac{\Sigma B}{\Sigma' B'} = \frac{OB}{O'B'},\ \frac{OB}{O'B'} = \frac{BK}{B'K'}.\ \text{Άρα}\ \frac{\Sigma B}{\Sigma' B'} = \frac{BK}{B'K'},\ \text{οπότε}$$

$$\frac{\Sigma B}{BK} = \frac{\Sigma' B'}{B'K'} \ \text{ή}\ \frac{BK}{\Sigma B} = \frac{B'K'}{\Sigma' B'} \qquad (7)$$

Η σχέση (7) θα μπορούσε να προκύψει άμεσα με πολλαπλασιασμό των (5), (6) κατά μέλη. Τέτοια ιδιότητα όμως δεν αναφέρεται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Από τις ομοιότητες των τριγώνων ΣΟΚ, Σ΄Ο΄Κ΄ και ΒΟΚ, Β΄Ο΄Κ΄ προκύπτουν οι σχέσεις: $\frac{\Sigma K}{OK} = \frac{\Sigma' K'}{O'K'}$ και $\frac{OK}{KB} = \frac{O'K'}{K'B'}$ από τις οποίες με τον ίδιο όπως πριν τρόπο καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\Sigma K}{KB} = \frac{\Sigma' K'}{K'B'} \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{ΣΚ}{ΣΒ} = \frac{Σ'Κ'}{Σ'Β'} \qquad (9)$$

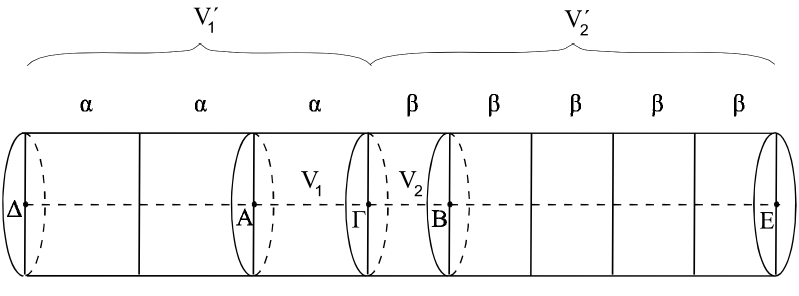
Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (8) και (9) τα τρίγωνα ΣΚΒ, Σ΄Κ΄Β΄ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, άρα είναι και ισογώνια, δηλαδή όμοια.

Πρόταση 13 (XII. 13)

Αν κύλινδρος τμηθεί με επίπεδο παράλληλο στις βάσεις του, τότε διαιρείται σε δύο κυλίνδρους που είναι ανάλογοι των αξόνων τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κύλινδρο με άξονα ΑΒ και από σημείο Γ του ΑΒ επίπεδο παράλληλο στις βάσεις, το οποίο διαιρεί τον αρχικό κύλινδρο σε δύο κυλίνδρους V_1 , V_2 με άξονες ΓΑ = α , ΓΒ = β. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{V_1}{V_2} = \frac{α}{β}$.



Σχήμα 13

Θεωρούμε επίσης τον κύλινδρο V_1' με άξονα ΓΔ = κ.α και τον κύλινδρο V_2' με άξονα ΓΕ = λ · β όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί. Τότε $V_1' =$ $= κ\cdot V_1$ και $V_2' = λ\cdot V_2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } κα > λβ, \text{ τότε } V_1' > V_2', \text{ δηλαδή } κV_1 > λV_2 \\ \text{Αν } κα < λβ, \text{ τότε } V_1' < V_2', \text{ δηλαδή } κV_1 < λV_2 \\ \text{Αν } κα = λβ, \text{ τότε } V_1' = V_2', \text{ δηλαδή } κV_1 = λV_2 \end{array}\right\}$$

΄Αρα, σύμφωνα με τη θεωρία περί ισότητας λόγων του Εύδοξου, θα πρέπει να ισχύει $\frac{V_1}{V_2} = \frac{α}{β}$.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Με μια άλλη διατύπωση η απόδειξη θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{\beta}$. Σύμφωνα με τη θεωρία περί ισότητας λόγων του Ευδόξου, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ρητός στο ημιανοικτό διάστημα με άκρα $\frac{V_1}{V_2}, \frac{\alpha}{\beta}$.

Αν $\frac{\alpha}{\beta} \le \frac{\kappa}{\lambda} < \frac{V_1}{V_2}$, τότε $\lambda\alpha \le \kappa\beta$ και $\kappa V_2 < \lambda V_1$.

Όμως $\lambda\alpha \le \kappa\beta \Rightarrow \Gamma\Delta \le \Gamma E \Rightarrow V_1' \le V_2' \Rightarrow \lambda V_1 \le \kappa V_2$ (άτοπο)

Αν $\frac{\alpha}{\beta} \ge \frac{\kappa}{\lambda} > \frac{V_1}{V_2}$, τότε $\lambda\alpha \ge \kappa\beta$ και $\kappa V_2 > \lambda V_1$.

Όμως $\lambda\alpha \ge \kappa\beta \Rightarrow \Gamma\Delta \ge \Gamma E \Rightarrow V_1' \ge V_2' \Rightarrow \lambda V_1 \ge \kappa V_2$, (άτοπο).

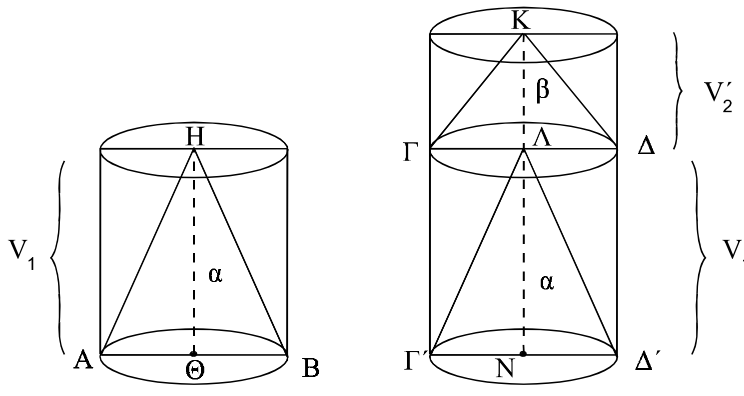
Ανάλογα εργαζόμαστε αν $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\kappa}{\lambda} \le \frac{V_1}{V_2}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\kappa}{\lambda} \ge \frac{V_1}{V_2}$.

Πρόταση 14 (XII. 14)

Δύο κύλινδροι ή κώνοι με ίσες βάσεις είναι ανάλογοι των υψών τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τους κυλίνδρους V_1, V_2 με ίσες βάσεις διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ και ύψη $H\Theta = \alpha$, $K\Lambda = \beta$. Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{\beta}$.



Σχήμα 14

Προεκτείνουμε την ΚΛ κατά ΛΝ = α και θεωρούμε τον κύλινδρο V_1' με βάση ΓΔ ύψος ΛΝ.

Οι κύλινδροι V_1, V_1' έχουν ίσα ύψη, οπότε είναι ανάλογοι των βάσεών τους (πρόταση 11). Αλλά οι βάσεις των κυλίνδρων αυτών είναι ίσες, οπότε $V_1 = V_1'$.

Επειδή ο κύλινδρος με βάση Γ΄Δ΄ που είναι ίση με την ΓΔ και ύψος ΚΝ = α + β , έχει τμηθεί με επίπεδο παράλληλο στις βάσεις του, θα έχουμε: $\dfrac{V_1'}{V_2} = \dfrac{ΛΝ}{ΛΚ} = \dfrac{α}{β}$ (πρόταση 13). Όμως έχουμε $V_1 = V_1'$, οπότε ισχύει $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{α}{β}$.

Για τους αντίστοιχους κώνους Q_1, Q_2 με ίσες βάσεις διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ και ύψη ΗΘ = α, ΚΛ = β δείξαμε (πρόταση 10) ότι $Q_1 = \dfrac{1}{3}V_1$, $Q_2 = \dfrac{1}{3}V_2$.

Επομένως θα έχουμε $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\frac{1}{3}V_1}{\frac{1}{3}V_2} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{α}{β}$.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 15 (XII. 15)

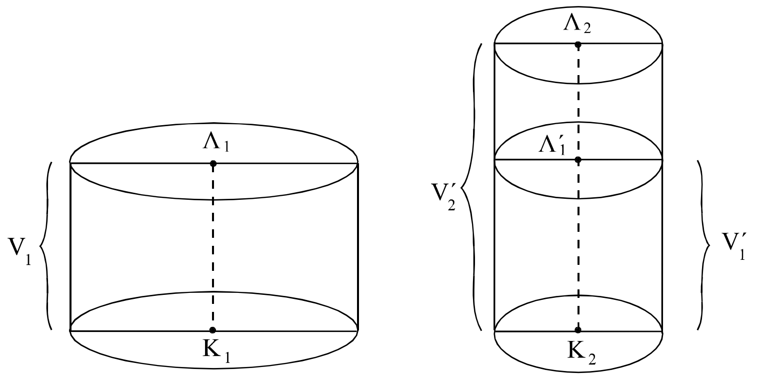
Αν δύο κύλινδροι ή κώνοι είναι ίσοι (:ισοδύναμοι), τότε οι βάσεις τους είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών τους.

Αν οι βάσεις δύο κυλίνδρων ή κώνων είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών τους τότε είναι ίσοι (:ισοδύναμοι).

Απόδειξη

(i) Θεωρούμε πρώτα δύο ίσους (ισοδύναμους) κυλίνδρους V_1 , V_2 με βάσεις $β_1$, $β_2$ και ύψη $K_1Λ_1$, $K_2Λ_2$. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{β_1}{β_2} = \frac{K_2Λ_2}{K_1Λ_1}.$$



Σχήμα 15

(α) Αν $K_1\Lambda_1 = K_2\Lambda_2$, τότε αφού $V_1 = V_2$ και $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ (πρόταση 11), θα έχουμε $\beta_1 = \beta_2$, οπότε $\frac{K_2\,\Lambda_2}{K_1\,\Lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = 1$.

(β) Αν $K_1\Lambda_1 < K_2\Lambda_2$, τότε επί του $K_2\Lambda_2$ παίρνουμε τμήμα $K_2\Lambda_1' = K_1\Lambda_1$ και από το σημείο Λ_1' φέρουμε επίπεδο παράλληλο προς τις βάσεις του V_2. Ονομάζουμε V_1' τον κύλινδρο με βάση β_2 και ύψος $K_2\Lambda_1'$.

Αφού $V_1 = V_2$ τότε σύμφωνα με την πρόταση V.7, θα ισχύει η σχέση

$$\frac{V_1}{V_1'} = \frac{V_2}{V_1'} \qquad (1)$$

Αλλά, σύμφωνα με την πρόταση 11, αφού οι κύλινδροι έχουν ίσα ύψη θα ισχύει η σχέση

$$\frac{V_1}{V_1'} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \qquad (2)$$

Εξάλλου, σύμφωνα με την πρόταση 13,

$$\frac{V_2}{V_1'} = \frac{K_2\Lambda_2}{K_2\Lambda_1'} = \frac{K_2\Lambda_2}{K_1\Lambda_1} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) , (3) προκύπτει ότι $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{K_2\Lambda_2}{K_1\Lambda_1}$.

ii) Έστω τώρα ότι για τους κυλίνδρους V_1 και V_2 με αντίστοιχες βάσεις β_1 και β_2 έχουμε $\dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{K_2\Lambda_2}{K_1\Lambda_1}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $V_1 = V_2$

(α) Αν $K_1\Lambda_1 = K_2\Lambda_2$, τότε $\beta_1 = \beta_2$, οπότε $V_1 = V_2$

(β) Αν $K_1\Lambda_1 < K_2\Lambda_2$, τότε θεωρώντας τον κύλινδρο V_1' (όπως αυτός κατασκευάστηκε προηγουμένως στο (i) β), θα έχουμε:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{K_2\Lambda_2}{K_2\Lambda_1'} \qquad (4)$$

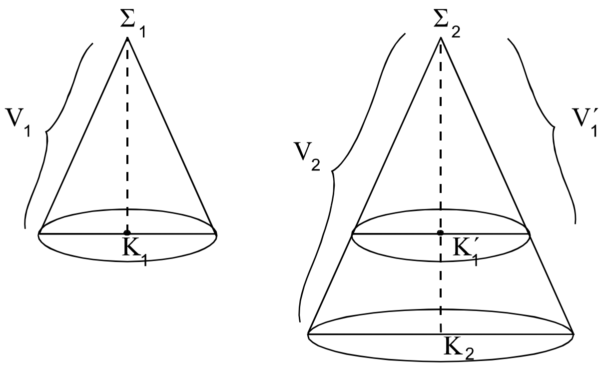
Αλλά, σύμφωνα με την πρόταση 11, αφού οι κύλινδροι έχουν ίσα ύψη θα ισχύει

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{V_1}{V_1'} \qquad (5)$$

Εξάλλου, σύμφωνα με την πρόταση 13,

$$\frac{K_2\Lambda_2}{K_2\Lambda_1'} = \frac{V_2}{V_1'} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (4), (5), (6) προκύπτει ότι $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{V_2}{V_1'}$, οπότε $V_1 = V_2$.



Σχήμα 15.1

Στους κώνους εφαρμόζονται οι ίδιοι με τους προηγούμενους συλλογισμούς, όπως φαίνεται και στο σχήμα 15.1, οπότε αποδεικνύεται και το αντίστοιχο αποτέλεσμα.

ὅ.ἔ.δ.

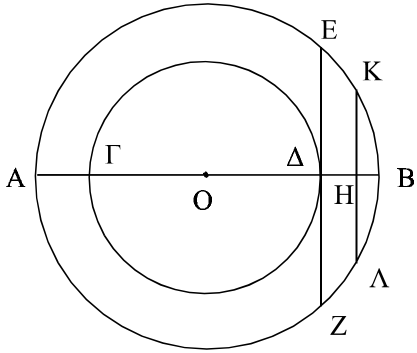
8. Σύγκριση σφαιρών

Πρόταση 16 (XII. 16)

Αν δοθούν δύο ομόκεντροι κύκλοι, να εγγραφεί στον μεγαλύτερο κύκλο πολύγωνο ισόπλευρο με άρτιο πλήθος πλευρών μη εφαπτόμενο του μικρότερου κύκλου, δηλαδή τέτοιο ώστε οι πλευρές του να είναι εκτός του μικρότερου κύκλου.

Απόδειξη

Από το κέντρο Ο, θεωρούμε ευθεία που τέμνει το μεγαλύτερο κύκλο στα σημεία Α και Β και το μικρότερο στα Γ και Δ. Η κάθετη στην ΑΒ στο Δ, τέμνει το μεγαλύτερο κύκλο στα σημεία Ε και Ζ και προφανώς εφάπτεται του μικρότερου κύκλου.



Σχήμα 16

Διχοτομούμε πρώτα το τόξο $\overset{\frown}{AB}$, και το τόξο που προκύπτει το συμβολίζουμε με $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Ακολούθως διχοτομούμε το τόξο $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$, οπότε προκύπτει το τόξο $\frac{1}{4}\overset{\frown}{AB}$ και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία. Από τη διαδικασία αυτή κάποτε θα προκύψει ένα τόξο $\overset{\frown}{BK}$ μικρότερο του $\overset{\frown}{BE}$ (πρόταση X. I).

Η κάθετος από το σημείο Κ στην ΑΒ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η και το μεγάλο κύκλο στο Λ. Τότε έχουμε $\overset{\frown}{BK}=\overset{\frown}{B\Lambda}$ και (προτάσεις III. 3 και I. 4), $\overset{\frown}{KB\Lambda} < \overset{\frown}{EBZ}$, οπότε ΟΗ > ΟΔ, δηλαδή το σημείο Η είναι εκτός του μικρότερου κύκλου.

Αφού οι χορδές ΚΛ, ΕΖ είναι παράλληλες και το Η είναι εκτός του μικρότερου κύκλου, η ΚΛ δε θα έχει κοινά σημεία με το μικρότερο κύκλο, δηλαδή θα είναι εκτός αυτού. Κατά μείζονα λόγο και οι χορδές ΚΒ, ΒΛ θα βρίσκονται εκτός του μικρότερου κύκλου.

Προφανώς, υπάρχουν αρτίου πλήθους διαδοχικές χορδές του μεγαλύτερου κύκλου ίσες με την ΒΚ, οι οποίες βρίσκονται εκτός του μικρότερου κύκλου και αποτελούν πλευρές ισόπλευρου πολυγώνου, αρτιόπλευρου, εγγεγραμμένου στο μεγαλύτερο κύκλο.

ὅ.ἔ.π.

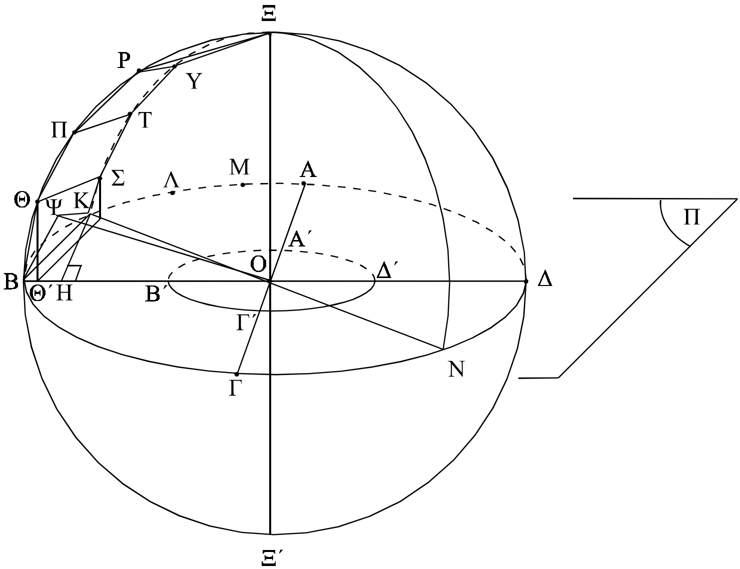
Πρόταση 17 (XII. 17)

Αν δοθούν δύο ομόκεντρες σφαίρες, να εγγραφεί στη μεγαλύτερη σφαίρα πολύεδρο, του οποίου οι έδρες να μην έχουν κοινά σημεία με τη μικρότερη σφαίρα (μη εφαπτόμενο της μικρότερης σφαίρας).

Απόδειξη

Ας τμηθούν οι σφαίρες από επίπεδο Π, που διέρχεται από το κέντρο Ο αυτών.

Οι τομές θα είναι μέγιστοι κύκλοι, αφού κάθε σφαίρα προέρχεται από στροφή ημικυκλίου γύρω από σταθερή διάμετρό του.



Σχήμα 17

Έτσι, σε οποιαδήποτε θέση και αν θεωρήσουμε το ημικύκλιο, το επίπεδο που ορίζει θα σχηματίσει πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας κύκλο και μάλιστα μέγιστο, αφού η διάμετρος της σφαίρας που είναι και διάμετρος του ημικυκλίου, είναι η μεγαλύτερη από τις χορδές του κύκλου ή της σφαίρας. Θεωρούμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ του μεγιστου κύκλου της μεγαλύτερης σφαίρας που τέμνουν τον αντίστοιχο μεγιστο κύκλο της μικρότερης σφαίρας κατά τις διαμέτρους Α΄Γ΄ , Β΄Δ΄ αντίστοιχα.

Ας εγγραφεί στο μεγαλύτερο κύκλο πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιόπλευρο, του οποίου οι πλευρές να είναι εκτός του μικρότερου κύκλου.

Υποθέτουμε π.χ. ότι οι πλευρές του που βρίσκονται στο τεταρτημόριο $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ είναι οι ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΑ.

Θεωρούμε τη διάμετρο ΚΝ και την κάθετη στο επίπεδο του κύκλου ΑΒΓΔ στο Ο, που τέμνει τη σφαίρα στα Ξ , Ξ΄. Τα επίπεδα (ΒΔ, ΟΞ) και (ΚΝ,ΟΞ) σχηματίζουν πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας μέγιστους κύκλους.

Θεωρούμε τα ημικύκλιά τους $\overset{\frown}{\text{ΒΞΔ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΚΞΝ}}$.

Αφού η ΟΞ είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΒΓΔ, κάθε επίπεδο δια της ΟΞ θα είναι κάθετο στο επίπεδο ΑΒΓΔ (πρόταση XI.18). Άρα τα επίπεδα ΒΞΔ και ΚΞΝ θα είναι κάθετα στο επίπεδο ΑΒΓΔ.

Αφού τα ημικύκλια $\overset{\frown}{\text{ΒΑΔ}}, \overset{\frown}{\text{ΒΞΔ}}, \overset{\frown}{\text{ΚΞΞ}}$ έχουν ίσες διαμέτρους (ΙΙΙ, ορισμός 1) θα είναι ίσα, οπότε και τα τεταρτημόρια $\overset{\frown}{\text{ΒΑ}}, \overset{\frown}{\text{ΒΞ}}, \overset{\frown}{\text{ΚΞ}}$ θα είναι ίσα.

Όσες πλευρές του πολυγώνου υπάρχουν στο τεταρτημόριο $\overset{\frown}{\text{ΒΑ}}$, τόσες θα υπάρχουν και στα τεταρτημόρια $\overset{\frown}{\text{ΒΞ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΚΞ}}$ ίσες προς τις ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΑ. Έστω οι ΒΘ, ΘΠ, ΠΡ, ΡΞ και ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ αντίστοιχα.

Φέρνουμε τη ΘΣ και από τα Θ, Σ τις κάθετες στο επίπεδο ΑΒΓΔ. Τα ίχνη τους Θ΄, Σ΄ θα πέσουν στις τομές ΒΔ, ΚΝ των επιπέδων ΒΞΔ, ΚΞΝ με το ΑΒΓΔ, αφού και τα δύο αυτά επίπεδα είναι κάθετα στο ΑΒΓΔ.

Αφού στα ίσα ημικύκλια πήραμε ίσες χορδές ΒΘ, ΚΣ και οι ΘΘ΄, ΣΣ΄ είναι κάθετες στο επίπεδο ΑΒΓΔ, θα είναι ΘΘ΄ = ΣΣ΄ και ΒΘ΄ = ΚΣ΄ (προτάσεις ΙΙΙ. 27 και Ι. 26). (Αυτό προκύπτει από το ότι $\overset{\frown}{\text{ΟΒΘ}} = \overset{\frown}{\text{ΟΚΣ}}$, αφού τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΒΘ, ΟΚΣ έχουν ίσες τις γωνίες των κορυφών τους).

Όμως ΟΒ = ΟΚ , οπότε ΟΒ – ΒΘ΄= ΟΚ – ΚΣ΄, δηλαδή ΟΘ΄= ΟΣ΄.

Άρα $\frac{\text{ΒΘ}'}{\text{Θ}'\text{Ο}} = \frac{\text{ΚΣ}'}{\text{Σ}'\text{Ο}}$, οπότε οι Θ΄Σ΄ και ΒΚ είναι παράλληλες (πρόταση VI. 2).

Επειδή οι ΘΘ΄, ΣΣ΄ είναι κάθετες στο επίπεδο ΑΒΓΔ, θα είναι παράλληλες (πρόταση XI. 6) και αφού, όπως δείξαμε, ΘΘ΄= ΣΣ΄, θα έχουμε ότι οι Θ΄Σ΄, ΘΣ θα είναι ίσες και παράλληλες (πρόταση I. 33) . Αλλά οι Θ΄Σ΄ , ΒΚ είναι παράλληλες, οπότε και οι ΘΑ, ΒΚ θα είναι παράλληλες (πρόταση I. 30). Οι ευθείες λοιπόν ΒΘ, ΚΣ που συνδέουν σημεία των δύο αυτών παραλλήλων, θα είναι συνεπίπεδες.

Επομένως, το τετράπλευρο ΚΒΘΣ είναι επίπεδο (τραπέζιο) (πρόταση XI. 7). Για τον ίδιο λόγο τα τετράπλευρα ΣΘΠΤ, ΤΠΡΥ είναι επίπεδα, όπως και το τρίγωνο ΥΡΞ είναι επίπεδο σχήμα.

Αν ενώσουμε τα σημεία Θ, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ, Ξ με το Ο θα σχηματιστεί μεταξύ των τόξων $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Xi}$, $\overset{\frown}{\mathrm{K}\Xi}$ στερεό σχήμα, πολύεδρο, αποτελούμενο από πυραμίδες με βάσεις τα τετράπλευρα ΚΒΘΣ, ΣΘΠΤ, ΤΠΡΥ και το τρίγωνο ΥΡΞ, κορυφή δε το σημείο Ο.

Αν κάνουμε σε κάθε μία από τις πλευρές ΚΛ, ΛΜ, ΜΑ τις ίδιες κατασκευές που κάναμε επί της ΒΚ, καθώς και στις πλευρές που βρίσκονται στα άλλα τρία τεταρτημόρια $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Delta}, \overset{\frown}{\Delta\Gamma}, \overset{\frown}{\Gamma\mathrm{B}}$ (και στο άλλο ημισφαίριο), θα σχηματιστεί σχήμα πολύεδρο εγγεγραμμένο στη μεγαλύτερη σφαίρα, που αποτελείται από πυραμίδες με βάσεις τα τετράπλευρα και το τρίγωνο που προαναφέραμε, καθώς και τα ομοταγή προς αυτά (ομοίως διατεταγμένα), και κορυφή το σημείο Ο.

Ισχυριζόμαστε ότι οι έδρες αυτού του πολυέδρου βρίσκονται εκτός της μικρότερης σφαίρας πάνω στην επιφάνεια της οποίας βρίσκεται ο κύκλος Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Ας αχθεί από το Ο η κάθετη στο επίπεδο του τετραπλεύρου ΚΒΘΣ και ας συναντήσει το επίπεδο αυτό στο Ψ.

Φέρουμε τις ΨΒ, ΨΚ. Αφού η ΟΨ είναι κάθετη στο επίπεδο ΚΒΘΣ, θα είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες του που διέρχονται από τον πόδα της (XI, ορισμός 3). Άρα η ΟΨ είναι κάθετη στις ΒΨ, ΨΚ, οπότε $\mathrm{OB}^2 = \Psi\mathrm{O}^2 + \Psi\mathrm{B}^2$, $\mathrm{OK}^2 = \Psi\mathrm{O}^2 + \Psi\mathrm{K}^2$, αφού $\mathrm{O}\hat{\Psi}\mathrm{B} = \mathrm{O}\hat{\Psi}\mathrm{K}$ = 1ορθή (πρόταση I. 47). Αλλά ΟΒ = ΟΚ, οπότε $\Psi\mathrm{O}^2 + \Psi\mathrm{B}^2 = \Psi\mathrm{O}^2 + \Psi\mathrm{K}^2$. Άρα ΨΒ = ΨΚ . (Η ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα και από την ισότητα των τριγώνων ΘΨΒ, ΟΨΚ, τα οποία έχουν ΟΒ = ΟΚ, ΨΑ κοινή και είναι ορθογώνια στο Ψ).

Ομοίως προκύπτει ότι τελικά έχουμε ΨΣ = ΨΘ = ΨΒ = ΨΚ. Επομένως το τετράπλευρο ΚΒΘΣ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο Ψ και ακτίνα ΨΒ. (Το ότι είναι εγγράψιμο προκύπτει και άμεσα, αφού πρόκειται για ισοσκελές τραπέζιο).

Αφού ΚΒ > Θ΄Σ΄ και Θ΄Σ΄ = ΘΣ, θα είναι ΚΒ > ΘΣ. Αλλά ΚΒ = = ΚΣ = ΒΘ > ΘΣ, οπότε

$$ΚΒ^2 > 2ΨΒ^2 \qquad (1)$$

(Πράγματι $3\overset{\frown}{ΚΒ} + \overset{\frown}{ΘΣ} = 4$ ορθές, οπότε $4\overset{\frown}{ΚΒ} > 4$ ορθές, δηλαδή $\overset{\frown}{ΚΒ} > 1$ ορθή. ΄Αρα $Κ\hat{Ψ}Β > 1$ ορθή, οπότε $ΚΒ^2 > ΨΒ^2 + ΨΚ^2 = 2ΨΒ^2$, αφού η ΚΒ είναι πλευρά τριγώνου απέναντι σε αμβλεία γωνία).

Από το Κ φέρουμε την κάθετη στη ΒΔ, που την τέμνει στο σημείο Η. Τότε ΔΗ > ΔΟ, οπότε 2ΔΗ > 2ΔΟ = ΔΒ. Αλλά $\dfrac{ΔΒ}{ΔΗ} = \dfrac{ΔΒ \cdot ΒΗ}{ΔΗ \cdot ΒΗ} = \dfrac{ΚΒ^2}{ΚΗ^2}$,

αφού $Β\hat{Κ}Δ = 1$ορθή (πρόταση ΙΙΙ. 31 και πρόταση VI. 8, πόρισμα). Επομένως θα έχουμε

$$ΚΒ^2 < 2\,ΚΗ^2 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΚΗ^2 > ΨΒ^2$.

Όμως $ΟΒ^2 = ΟΨ^2 + ΨΒ^2$, $ΟΚ^2 = ΚΗ^2 + ΟΗ^2$ και ΟΒ = ΟΚ, οπότε $ΟΨ^2 + ΨΒ^2 = ΚΗ^2 + ΟΗ^2$ και αφού $ΚΗ^2 > ΨΒ^2$ θα είναι $ΟΗ^2 < ΟΨ^2$, δηλαδή ΟΗ < ΟΨ. Κατά μείζονα λόγο λοιπόν, θα είναι ΟΒ΄< ΟΨ. (Δηλαδή δεν βλάπτεται η γενικότητα αν υποθέσουμε ότι ΟΒ΄ < ΟΗ. Αλλιώς θα διπλασιάζουμε συνεχώς το πλήθος των πλευρών του εγγεγραμμένου πολυγώνου ΒΚΛΜΑ . . ., μέχρις ότου πετύχουμε να ισχύει ΟΒ΄< ΟΗ).

Είναι όμως η ΟΨ απόσταση του κέντρου Ο της σφαίρας από την έδρα ΚΒΘΣ του πολυέδρου, ενώ η ΟΒ΄ ακτίνα της μικρότερης σφαίρας. Η έδρα αυτή λοιπόν βρίσκεται εκτός της μικρότερης σφαίρας.

Το ίδιο αποδεικνύεται και για τις υπόλοιπες έδρες ΣΘΠΤ, ΤΠΡΥ, ΥΡΞ, καθώς και για τις ομοταγείς τους (ομοίως διατεταγμένες προς αυτές), όπως φαίνεται από την παρατήρηση που ακολουθεί μετά το πόρισμα.

Κατασκευάστηκε λοιπόν έτσι πολύεδρο εγγεγραμμένο στη μεγαλύτερη σφαίρα, του οποίου οι έδρες βρίσκονται εκτός της μικρότερης σφαίρας.

ὅ.ἔ.π.

Πόρισμα

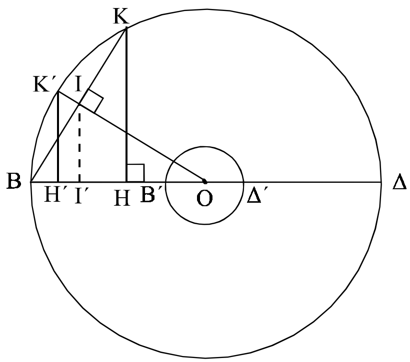
Αν και σε άλλη σφαίρα εγγραφεί πολύεδρο όμοιο προς το πολύεδρο που εγγράψαμε στη σφαίρα ΑΒΓΔ, τα δύο πολύεδρα θα είναι ανάλογα των διαμέτρων των δύο σφαιρών.

Απόδειξη

Τα πολύεδρα $Π_1$, $Π_2$ χωρίζονται σε όμοιες πυραμίδες με ομόλογες πλευρές τις ακτίνες $ρ_1$, $ρ_2$ των δύο σφαιρών. Άρα $\dfrac{Π_1}{Π_2} = \dfrac{ρ_1^3}{ρ_2^3} = \dfrac{(2ρ_1)^3}{(2ρ_2)^3}$.

Παρατήρηση

Κατά την απόδειξη ισχυριστήκαμε ότι, διπλασιάζοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών του εγγεγραμμένου πολυγώνου ΒΚΛΜΑ . . . , μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει ΟΒ΄ < ΟΗ . Αρκεί γι' αυτό να δείξουμε ότι το ΒΗ μπορεί να γίνει (με συνεχή διπλασιασμό των πλευρών του πολυγώνου) μικρότερο από οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα, άρα και από το ΟΒ - ΟΒ΄. Τότε η σχέση ΒΗ < ΟΒ - ΟΒ΄, σημαίνει πράγματι ΟΒ΄ < ΟΒ - ΒΗ = ΟΗ.



Σχήμα 17.1

Για να μπορεί λοιπόν το ΒΗ να γίνει μικρότερο από οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα, αρκεί (σύμφωνα με το Γενικό Λήμμα) να δείξουμε ότι, αν θεωρήσουμε πολύγωνο με πλευρές ίσες με ΒΚ΄= Κ΄Κ, δηλαδή με διπλάσιο πλήθος πλευρών, τότε το ΒΗ΄ είναι μικρότερο από το $\dfrac{ΒΗ}{2}$, ή ότι $ΗΗ΄ > \dfrac{ΒΗ}{2}$.

Πράγματι, αφού Κ΄Β = Κ΄Κ, θα έχουμε ΟΚ΄$\perp$ ΒΚ, ΙΒ = ΙΚ, οπότε και $Ι΄Η = Ι΄Β = \dfrac{ΒΗ}{2}$.

Αφού ΟΙ < ΟΚ΄, θα είναι και ΟΙ΄< ΟΗ΄, οπότε ΗΙ΄< ΗΗ΄, δηλαδή $\dfrac{ΒΗ}{2} < ΗΗ΄$.

Με σημερινούς όρους βέβαια αν θέσουμε $B\hat{O}K = \frac{360^{O}}{\nu} = \omega_\nu$,

τότε θα έχουμε $K\hat{B}O = 90^o - B\hat{O}I = 90^o - \frac{\omega_\nu}{2}$. Άρα ΒΗ = ΒΚ.

$$\sigma\upsilon\nu\,(90^o - \frac{\omega_\nu}{2}) = BK\,\eta\mu\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) = 2\cdot BI\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) = 2R\cdot\eta\mu^2\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right),$$

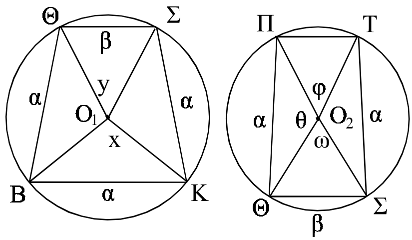
όπου R = OB.

Αφού $\omega_\nu \to 0$ και $\eta\mu\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right) \to 0$, θα έχουμε και $\lim(BH) = 0$.

Άρα, για ν αρκούντως μεγάλο θα γίνει το ΒΗ μικρότερο του ΟΒ - ΟΒ΄= R - R΄.

Ισχυριστήκαμε επίσης κατά την απόδειξη ότι και οι αποστάσεις του Ο από τις έδρες ΣΘΠΤ, ΤΠΡΥ, ΥΡΞ είναι μεγαλύτερες από την ακτίνα R΄= ΟΒ΄ της μικρότερης σφαίρας, δηλαδή βρίσκονται εκτός της μικρότερης σφαίρας.

Επειδή $O\Psi^2 = OB^2 - B\Psi^2 = R^2 - B\Psi^2$, αρκεί να δείξουμε ότι οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα πολύγωνα ΚΒΘΣ, ΣΘΠΤ, ΤΠΡΥ, ΥΡΞ βαίνουν ελαττούμενες ή τουλάχιστον μη αυξανόμενες.



Σχήμα 17.2

Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους κύκλους στα τετράπλευρα ΚΒΘΣ, ΣΘΠΤ με ακτίνες ρ_1, ρ_2 αντίστοιχα (βλέπε σχήμα 17. 2).

Έχουμε ΚΒ = ΒΘ = ΚΣ = α > ΘΣ = β και ΘΠ = ΣΤ = α > ΘΣ = β > ΠΤ.

Υποθέτουμε ότι $\rho_2 > \rho_1$. Έστω $B\hat{O}_1K = B\hat{O}_1\Theta = K\hat{O}_1\Sigma = x$, $\Theta\hat{O}_1\Sigma = y$ και

$\Theta\hat{O}_2\Pi = \Sigma\hat{O}_2T = \theta$, $\Theta\hat{O}_2\Sigma = \omega$, $T\hat{O}_2\Pi = \varphi$. Τότε y < x και φ < ω, αφού α > β > ΠΤ.

Έχουμε όμως $\eta\mu\,\frac{x}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\rho_1} = \frac{\alpha}{2\rho_1}$, $\eta\mu\,\frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{2\rho_2}$ και, αφού $\rho_2 > \rho_1$, θα είναι $ημ\frac{θ}{2} < ημ\frac{x}{2}$, οπότε $\frac{θ}{2} < \frac{x}{2}$ $(< 90^o)$ και $θ < x$. Ομοίως $ω < y < x$, οπότε και $φ < ω < y$.

Άρα $2θ + ω + φ < 2x + x + y = 3x + y = 360^o$, ενώ $2θ + ω + φ = 360^o$, πράγμα άτοπο. Επομένως $ρ_2 \leq ρ_1$.

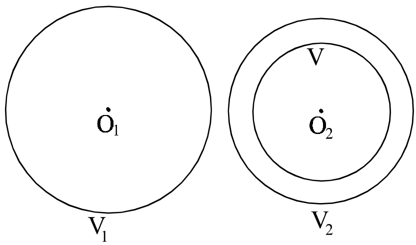
Πρόταση 18 (XII.18)

Οι σφαίρες είναι ανάλογες των κύβων των διαμέτρων τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις σφαίρες V_1, V_2 με ακτίνες $ρ_1$, $ρ_2$ και κέντρα O_1, O_2. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2ρ_1)^3}{(2ρ_2)^3}, \text{ ή } \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{ρ_1}{ρ_2}\right)^3.$$



Σχήμα 18

Έστω λοιπόν ότι ισχύει $\frac{V_1}{V_2} \neq \left(\frac{ρ_1}{ρ_2}\right)^3$. Θα δείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Πράγματι, τότε θα έχουμε $\left(\frac{ρ_1}{ρ_2}\right)^3 = \frac{V_1}{V}$, με $V \neq V_2$. Υποθέτουμε ότι η V είναι μια σφαίρα ομόκεντρη της V_2 με ακτίνα ρ.

α) Έστω ότι είναι $V < V_2$. Τότε θεωρούμε το πολύεδρο $Π_2$ το εγγεγραμμένο στην V_2 με τις έδρες του εκτός της σφαίρας V (πρόταση 17) και το όμοιο προς αυτό πολύεδρο $Π_1$ το εγγεγραμμένο στη σφαίρα V_1. Επομένως, σύμφωνα με το πόρισμα της πρότασης 17, θα έχουμε:

$$\frac{Π_1}{Π_2} = \frac{(2ρ_1)^3}{(2ρ_2)^3} = \left(\frac{ρ_1}{ρ_2}\right)^3.$$

Άρα θα ισχύει $\frac{Π_1}{Π_2} = \frac{V_1}{V_2}$, οπότε έχουμε $\frac{V}{Π_2} = \frac{V_1}{Π_1}$ αφού είναι $V_1 > Π_1$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση V. 12, έχουμε $V > Π_2$.

Όμως $V < \Pi_2$, αφού η σφαίρα V είναι στο εσωτερικό του Π_2. Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο. Επομένως δεν μπορεί να είναι $V<V_2$.

β) Έστω τώρα ότι είναι $V > V_2$. Έχουμε $\dfrac{V}{V_1} = \left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^3$ (πρόταση V. 7, πόρισμα).

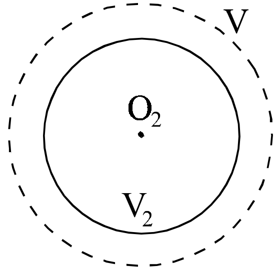
Αν $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{V_2}{V'}$, τότε $\dfrac{V_1}{V'} = \dfrac{V}{V_2} > 1$, αφού $V > V_2$. Άρα $V_1 > V'$ (πρόταση 2, Λήμμα).

Επομένως $\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^3 = \dfrac{V_2}{V'}$ με $V' < V_1$.

Ανάγεται λοιπόν στην προηγούμενη περίπτωση και με παρόμοιους όπως πριν συλλογισμούς οδηγούμαστε σε άτοπο. Επομένως, δεν μπορεί να ισχύει $V > V_2$, άρα είναι

$V = V_2$, οπότε $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3$.

ὅ.ἔ.δ.



Σχήμα 18.1

Παρατήρηση

Άξιο προσοχής είναι το γεγονός ότι πουθενά στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν εμφανίζεται φαινόμενο μέτρησης ενός επίπεδου ή στερεού σχήματος όπως την εννοούμε σήμερα, δηλαδή δεν υπολογίζεται εμβαδόν ή όγκος με βάση κάποια συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης.

Το θέμα αυτό αντιμετώπισε διεξοδικά ο Αρχιμήδης φθάνοντας μέχρι τη μέτρηση κύκλου, κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας μέσω των εγγεγραμμένων πολυγώνων, πρισμάτων, πυραμίδων αντίστοιχα και βρίσκοντας τις σχέσεις που έχει ο όγκος ενός κυλίνδρου με τους όγκους των εγγεγραμμένων σ' αυτόν κώνου και σφαίρας.

Στο έργο του *"Κύκλου Μέτρησις"* κατάφερε να βρει μία σημαντική προσέγγιση του αριθμού π, την 3,1416, μέσω των λόγων $\dfrac{\Pi_\nu}{2R}$, ν = 6, 12, 24, 48, 96, όπου Π_ν η περίμετρος κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R.

Κεφάλαιο 3

ΒΙΒΛΙΟ XIII

Τα κανονικά στερεά

1. Εισαγωγή

Επιστέγασμα του όλου έργου των *Στοιχείων* είναι η κατασκευή των πέντε κανονικών στερεών δηλαδή του τετραέδρου, του κύβου, του οκταέδρου, του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου. Αυτά αντιμετωπίζονται στις προτάσεις 13 μέχρι και 17, στο Βιβλίο XIII.

Καθένα από τα κανονικά στερεά κατασκευάζεται και εγγράφεται σε δοσμένη σφαίρα. Επιπλέον, εξετάζεται η σχέση μεταξύ της πλευράς του στερεού και της διαμέτρου της περιγεγραμμένης σφαίρας. Τέλος, ως συμπέρασμα, αναφέρεται ότι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά, εκτός από αυτά τα οποία έχουν ήδη κατασκευασθεί.

Από τις υπόλοιπες 18 συνολικά προτάσεις του κεφαλαίου 13, οι έξι πρώτες αναφέρονται στη διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο, οι επόμενες πέντε στο κανονικό πεντάγωνο και η δωδέκατη στο ισόπλευρο τρίγωνο. Οι παραπάνω προτάσεις είναι κυρίως προπαρασκευαστικές για τις υπόλοιπες πέντε προτάσεις, δηλαδή για τις προτάσεις 13, 14, 15, 16 και 17. Ωστόσο, ορισμένες από αυτές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στην πρόταση 6 αποδεικνύεται ότι αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε καθένα από τα τμήματα της διαίρεσης είναι, σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα, άρρητο (άλογο) και είναι η λεγόμενη *αποτομή*. Στην πρόταση 11 αποδεικνύεται ότι αν σε κύκλο με ρητή διάμετρο εγγραφεί κανονικό πεντάγωνο, τότε η πλευρά του πενταγώνου είναι άρρητος (άλογος) και είναι η λεγόμενη *ελάσσων*. Στην πρόταση 18 τέλος, εκτίθενται στο ίδιο σχήμα οι πλευρές των πέντε κανονικών στερεών και συγκρίνονται μεταξύ τους.

2. Διαίρεση σε άκρο και μέσο λόγο. Εφαρμογές

Στις προτάσεις 1 μέχρι 6 διατυπώνονται και αποδεικνύονται σχέσεις μεταξύ των τμημάτων (ή κάποιων κατασκευών) που προκύπτουν από τη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο. Οι αντίστοιχες μετρικές σχέσεις αποδεικνύονται με εμβαδά και η μέθοδος θα μπορούσε να ενταχθεί στη χρήση του γνώμονα, όπως αυτή μελετήθηκε και σχολιάστηκε στο Βιβλίο ΙΙ.

Πρόταση 1 (XIII.1)

Εάν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, το τετράγωνο του ευθύγραμμου τμήματος που προκύπτει ως άθροισμα του μεγαλύτερου τμήματος της διαίρεσης και του μισού του αρχικού τμήματος, είναι πενταπλάσιο από το τετράγωνο του μισού του αρχικού τμήματος.

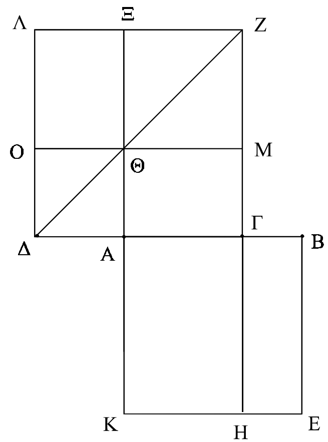
Απόδειξη

Τέμνουμε το τμήμα ΑΒ σε άκρο και μέσο λόγο στο σημείο Γ με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ και στην προέκταση της ΓΑ λαμβάνουμε τμήμα ΑΔ ίσο με το μισό του ΑΒ.

Θα αποδειχθεί ότι $ΔΓ^2 = 5ΑΔ^2$.

Αναγράφουμε τα τετράγωνα ΑΒΕΚ και ΓΔΛΖ και προεκτείνουμε τη ΖΓ, η οποία τέμνει την ΚΕ στο Η. Επειδή το ΑΒ έχει διαιρεθεί στο Γ σε άκρο και μέσο λόγο έχουμε:

$$ΑΒ \cdot ΒΓ = ΑΓ^2$$



Σχήμα 1

Και το ΑΒ • ΑΓ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΒΕΗ, ενώ το $ΑΓ^2$ με το εμβαδόν του τετραγώνου ΞΘΜΖ.

Άρα εμβ (ΓΒΕΗ) = εμβ (ΞΘΜΖ). Επειδή ΒΑ = 2ΑΔ, ΒΑ = ΚΑ και ΑΔ = ΑΘ, έπεται ότι ΚΑ = 2ΑΘ.

Επομένως $\dfrac{εμβ(ΑΓΗΚ)}{εμβ(ΑΓΜΘ)} = \dfrac{ΑΚ}{ΑΘ}$, άρα εμβ (ΑΓΗΚ) = 2εμβ (ΑΘΜΓ).

Έτσι, το εμβαδόν του γνώμονα ΛΟΘΑΓΖ ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΕΚ, δηλαδή με $4ΑΔ^2$, διότι ΑΒ = 2ΑΔ. Άρα ο γνώμονας ΛΟΘΑΓΖ είναι ίσος με $4ΑΔ^2$, επομένως $ΔΓ^2 = 5ΑΔ^2$.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 2 (XIII. 2)

Εάν το τετράγωνο ευθυγράμμου τμήματος είναι πενταπλάσιο από το τετράγωνο ενός τμήματος αυτού και το διπλάσιο του τμήματος διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης είναι το υπόλοιπο του αρχικού τμήματος.

Απόδειξη

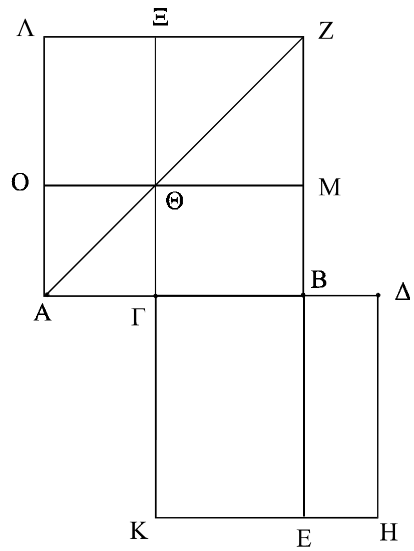
Έστω ότι το τετράγωνο του τμήματος ΑΒ είναι πενταπλάσιο του τετραγώνου του τμήματος ΑΓ και έστω ΓΔ = 2ΑΓ. Θα αποδειχθεί ότι αν το τμήμα ΓΔ διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το μεγαλύτερο από τα τμήματα της διαίρεσης είναι το τμήμα ΓΒ.

Αναγράφουμε τα τετράγωνα ΑΒΖΛ και ΓΔΗΚ.

Επειδή $ΑΒ^2 = 5ΑΓ^2$ έχουμε

εμβ (ΑΒΖΛ) = 5εμβ (ΑΓΘΟ)

Άρα το εμβαδόν του γνώμονα ΛΟΘΓΒΖ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου ΑΓΘΟ. Όμως το εμβαδόν του γνώμονα ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΔΗΚ.



Σχήμα 2

Επιπλέον ΔΓ = 2ΓΑ, ΔΓ = ΓΚ και ΑΓ = ΓΘ (άρα ΓΚ = 2ΓΘ).

Επομένως εμβ (ΓΒΕΚ) = 2εμβ (ΓΒΜΘ) και εμβ (ΞΖΜΘ) = εμβ (ΒΔΗΕ).

Επίσης, το εμβαδόν του τετραγώνου ΞΖΜΘ ισούται με ΒΓ^2 και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΔΗΕ ισούται με ΒΔ • ΓΔ.

Άρα ΒΓ^2 = ΓΔ • ΒΔ, δηλαδή το Β διαιρεί το ΓΔ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΒΓ.

ὅ.ἔ.δ.

Λήμμα

2ΑΓ > ΒΓ.

Απόδειξη

Έστω ότι έχουμε 2ΑΓ = ΒΓ. Τότε ΒΓ^2 = 4ΑΓ^2, άρα ΒΓ^2 + ΓΑ^2 = = 5ΑΓ^2.

Έχουμε όμως ότι ΒΑ^2 = 5ΓΑ^2 , άρα ΒΑ^2 = ΒΓ^2 + ΓΑ^2, το οποίο είναι αδύνατο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ούτε η σχέση 2ΑΓ < ΒΓ είναι δυνατόν να ισχύει, διότι κατά μείζονα λόγο θα είναι άτοπο. Επομένως 2ΑΓ > ΒΓ.

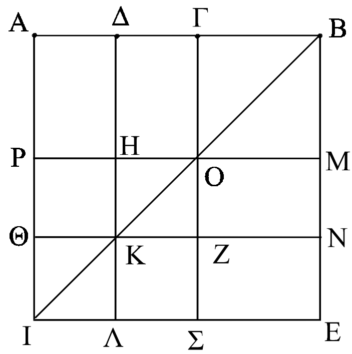
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 3 (XIII. 3)

Εάν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το τετράγωνο του ευθύγραμμου τμήματος που προκύπτει ως άθροισμα του μικρότερου τμήματος της διαίρεσης και του μισού του μεγαλύτερου, είναι πενταπλάσιο από το τετράγωνο του μισού του μεγαλύτερου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο έχει διαιρεθεί στο σημείο Γ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ και έστω Δ το μέσο του ΑΓ. Θα αποδειχθεί ότι ΔΒ^2 = 5ΔΓ^2.



Σχήμα 3

Αναγράφουμε το τετράγωνο ΑΒΕΙ. Επειδή ΑΓ = 2ΔΓ έχουμε ΑΓ^2 = 4ΔΓ^2, δηλαδή το εμβαδόν του τετραγώνου ΡΟΣΙ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου ΗΚΖΟ .

Επειδή ΑΒ•ΒΓ = $ΑΓ^2$, το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΒΕΣ ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου ΡΟΣΙ. Όμως, ισχύει ότι:

εμβ (ΡΟΣΙ) = 4 εμβ (ΗΟΖΚ), επομένως εμβ (ΓΒΕΣ) = 4 εμβ (ΗΟΖΚ).

Επειδή ΑΔ = ΔΓ είναι ΘΚ = ΚΖ, άρα ΗΚ = ΚΛ, δηλαδή ΜΝ = ΝΕ.

Έτσι έχουμε:

εμβ (ΟΜΝΖ) = εμβ (ΖΝΕΣ) και εμβ (ΖΝΕΣ) = εμβ (ΔΓΟΗ).

Επομένως το εμβαδόν του γνώμονα ΔΗΟΖΝΒ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΒΕΣ, δηλαδή με το τετραπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου ΗΟΖΚ. Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου ΔΒΝΚ είναι πενταπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου ΗΟΖΚ, δηλαδή: $ΔΒ^2 = 5\ ΔΓ^2$.

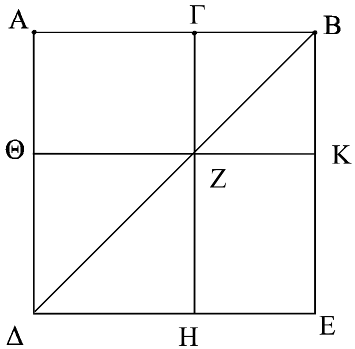
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 4 (XIII. 4)

Εάν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το άθροισμα των τετραγώνων του όλου τμήματος και του μικρότερου τμήματος της διαίρεσης είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο του μεγαλύτερου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει διαιρεθεί στο σημείο Γ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ. Θα αποδειχθεί ότι:
$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3\ ΓΑ^2$.



Σχήμα 4

Αναγράφουμε το τετράγωνο ΑΒΕΔ. Επειδή το τμήμα ΑΒ έχει διαιρεθεί στο σημείο Γ σε άκρο και μέσο λόγο, έχουμε: ΑΒ•ΒΓ = $ΑΓ^2$

Και το μεν ΑΒ•ΒΓ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΚΘ το δε $ΑΓ^2$ με το εμβαδόν του τετραγώνου ΘΖΗΔ.
Άρα εμβ (ΑΒΚΘ) = εμβ (ΘΖΗΔ).

Επίσης εμβ (ΑΒΚΘ) = εμβ (ΓΒΕΗ). Άρα το εμβαδόν του γνώμονα ΑΘΖΗΕΒ συν το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΒΚΖ ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου ΘΖΗΔ. Επομένως:

$$\text{εμβ}\ (ΑΒΕΔ) + \text{εμβ}\ (ΓΒΚΖ) = 3\text{εμβ}\ (ΘΖΗΔ),$$

δηλαδή $ΑΒ^2 + ΓΒ^2 = 3\ ΑΓ^2$.

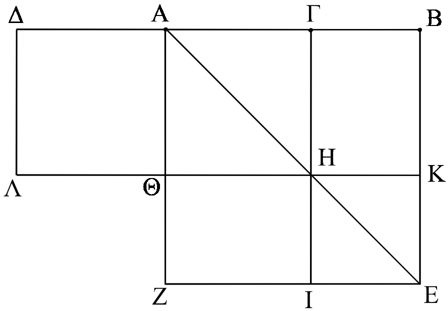
ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 5 (XIII. 5)

Εάν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο και προεκταθεί κατά τμήμα ίσο προς το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης, τότε το όλο ευθύγραμμο τμήμα έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα της νέας διαίρεσης είναι το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη

Έστω ότι το τμήμα ΑΒ έχει διαιρεθεί στο σημείο Γ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ. Προεκτείνουμε το ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ.



Σχήμα 5

Θα αποδειχθεί ότι το τμήμα ΔΒ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο στο σημείο Α με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΒ, δηλαδή $ΒΔ \cdot ΔΑ = ΑΒ^2$.

Αναγράφουμε το τετράγωνο ΑΒΕΖ. Επειδή το ΑΒ έχει διαιρεθεί στο Γ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ, έχουμε $ΑΒ \cdot ΒΓ = ΑΓ^2$. Άρα,

εμβ (ΓΒΕΙ) = εμβ (ΑΓΗΘ). Αλλά εμβ (ΓΒΕΙ) = εμβ (ΘΚΕΖ).

Επίσης εμβ (ΑΓΗΘ) = εμβ (ΔΑΘΛ).

Επομένως εμβ (ΑΒΕΖ) = εμβ (ΒΚΛΔ), δηλαδή $ΒΔ \cdot ΔΑ = ΑΒ^2$.

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλια στις προτάσεις 1 – 5

Οι πέντε πρώτες προτάσεις που αποδείχθηκαν παραπάνω και οι οποίες αφορούν στη διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο, είναι βοηθητικές για όσα ακολουθούν και κυρίως στην κατασκευή του κανονικού δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου. Επίσης, αυτές μπορούν σήμερα να αποδειχθούν και αλγεβρικά, όπως θα γίνει φανερό παρακάτω.

Έστω α, x ευθύγραμμα τμήματα, με x μικρότερο του α. Αν το τμήμα α διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το x είναι το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης, αν και μόνον αν ισχύει η σχέση: $x^2 = \alpha(\alpha - x)$, ισοδύναμα $x^2 + \alpha x = \alpha^2$.

Αν λύσουμε αλγεβρικά την παραπάνω εξίσωση (απορρίπτοντας την αρνητική ρίζα), βρίσκουμε $x = \dfrac{\alpha\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$. Ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$\alpha - x = \frac{\alpha\left(3-\sqrt{5}\right)}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

α) Η πρόταση 1 και η αντίστροφή της πρόταση 2 προκύπτουν άμεσα από την ισοδυναμία

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x = \alpha^2$$

β) Η πρόταση 3 προκύπτει από την ισοδυναμία

$$\left(\alpha - \frac{x}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha x = x^2$$

γ) Η πρόταση 4 προκύπτει από την ισοδυναμία:

$$\alpha^2 + (\alpha - x)^2 = 3x^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha x = x^2$$

δ) Η πρόταση 5 προκύπτει ως εξής:

Αν ισχύει $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$, τότε από την ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει άμεσα ότι $\frac{\alpha}{x} = \frac{x + \alpha}{\alpha}$.

Πρόταση 6 (XIII. 6)

Εάν ρητή[1] ευθεία τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο, καθένα από τα τμήματα της διαίρεσης είναι ευθεία άρρητος, η λεγόμενη αποτομή.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ ρητό ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο διαιρούμε στο σημείο Γ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ. Θα αποδειχθεί ότι κάθε ένα από τα τμήματα ΑΓ, ΓΒ είναι άρρητο, η λεγόμενη *αποτομή*.

Σχήμα 6

Προεκτείνουμε το τμήμα ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ = $\frac{AB}{2}$. Επειδή το τμήμα ΑΒ έχει διαιρεθεί σε μέσο και άκρο λόγο στο Γ με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ και το τμήμα ΑΔ είναι το μισό του ΑΒ, έχουμε:
$\Delta\Gamma^2 = 5A\Delta^2$ (πρόταση 1).

Άρα το $\Delta\Gamma^2$ προς το $A\Delta^2$ έχει λόγο αριθμό προς αριθμό, άρα το $\Delta\Gamma^2$ είναι σύμμετρο προς το $A\Delta^2$ (πρόταση Χ. 6)

Το $A\Delta^2$ είναι ρητό, διότι το τμήμα ΑΔ είναι ρητό, ως το μισό του ρητού τμήματος ΑΒ. Άρα (σύμφωνα με τον ορισμό 9 του βιβλίου Χ), το $\Gamma\Delta^2$ είναι ρητό, άρα ρητό είναι και το ΓΔ. Και επειδή το $\Gamma\Delta^2$ προς το ΔA^2 δεν έχει λόγο τον οποίο έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό, το μήκος ΓΔ είναι ασύμμετρο προς το μήκος ΑΔ (πρόταση Χ.9) Άρα το ΑΓ είναι *αποτομή* (πρόταση Χ.73)

Επειδή το Γ διαιρεί το ΑΒ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΑΓ, έχουμε

$$A\Gamma^2 = AB \cdot \Gamma B$$

[1] Για την ορολογία που χρησιμοποιείται, βλέπε Σχόλιο που ακολουθεί.

Και επειδή το τμήμα ΑΓ είναι *αποτομή* και το ΑΒ ρητό, το τμήμα ΒΓ είναι πρώτη *αποτομή* (πρόταση Χ. 97).

ὅ.ἔ.δ.

Σχόλιο

Στη διατύπωση της πρότασης 6, όπως και στις προτάσεις 11 και 17 που ακολουθούν, χρησιμοποιείται ορολογία που αναπτύχθηκε και σχολιάστηκε εκτενώς στο Βιβλίο Χ . Συνοψίζουμε σύντομα τα απολύτως απαραίτητα για την ανάγνωση αυτών των διατυπώσεων.

Σύμφωνα με τους ορισμούς του Βιβλίου Χ, ***σύμμετρα μεγέθη*** λέγονται εκείνα για τα οποία υπάρχει κοινό μέτρο και ***ασύμμετρα*** εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο.

Ευθείες (: "ευθύγραμμα τμήματα") ***δυνάμει σύμμετροι*** λέγονται οι ευθείες των οποίων τα τετράγωνα είναι σύμμετρα και ***δυνάμει ασύμμετροι*** αυτές των οποίων τα τετράγωνα είναι ασύμμετρα. Αποδεικνύεται ότι, αν δοθεί εκ των προτέρων μία ευθεία, υπάρχουν ως προς αυτήν άπειρες ευθείες σύμμετροι και ασύμμετροι είτε ως προς το μήκος είτε και δυνάμει.

Η ευθεία που θεωρείται εκ των προτέρων καλείται ***ρητή***, οι σύμμετρες προς αυτή είτε μήκει είτε μόνο δυνάμει καλούνται ***ρητές*** και οι (δυνάμει) ασύμμετρες ***άρρητες*** (ή ***άλογοι***). Το τετράγωνο της θεωρούμενης ευθείας καλείται ***ρητό*** και τα σύμμετρα προς αυτό χωρία ***ρητά***, ενώ τα ασύμμετρα προς αυτό ***άλογα***.

Στην πρόταση Χ.73 του 10ου κεφαλαίου αποδεικνύεται ότι αν από ρητή ευθεία αφαιρεθεί ρητή ευθεία σύμμετρη με την αρχική δυνάμει μόνον, τότε η υπόλοιπη είναι άλογος και καλείται ***αποτομή***. Δηλαδή, αν x, y ρητά τμήματα με $x > y$, x, y ασύμμετρα και x^2, y^2 σύμμετρα, τότε το τμήμα $x - y$ είναι άλογο, η λεγόμενη ***αποτομή***. (Για παράδειγμα το τμήμα $\sqrt{2}\,\rho - \rho$, όπου ρ ρητό τμήμα είναι αποτομή). Το τμήμα y ονομάζεται ***προσαρμόζουσα***.

Αν το τετράγωνο της όλης υπερέχει του τετραγώνου της προσαρμόζουσας κατά το τετράγωνο πλευράς συμμέτρου προς την όλη, τότε η αποτομή καλείται ***πρώτη αποτομή***. Δηλαδή, αν $x^2 = y^2 + z^2$ και z, x σύμμετρα, τότε η αποτομή $x - y$ ονομάζεται ***πρώτη αποτομή***.

Αν το τετράγωνο της όλης υπερέχει του τετραγώνου της προσαρμόζουσας κατά τετράγωνο πλευράς δυνάμει μόνον συμμέτρου προς την όλη, τότε η αποτομή καλείται ***τετάρτη αποτομή***. Δηλαδή, αν $x^2 = y^2 + z^2$ και z, x ασύμμετρα, τότε το $x - y$ ονομάζεται ***τετάρτη αποτομή***.

Στην πρόταση Χ.21 αποδεικνύεται ότι το ορθογώνιο που περιέχεται μεταξύ ρητών δυνάμει μόνον σύμμετρων ευθειών είναι άλογο, καλείται ***μέσο*** και η πλευρά του ισοδύναμου τετραγώνου είναι άλογος και ονομάζεται ***μέση***.

Στην πρόταση Χ.76 αποδεικνύεται ότι αν από ευθεία αφαιρεθεί ευθεία, η οποία είναι προς την όλη δυνάμει ασύμμετρος και σχηματίζει με αυτήν το μεν άθροισμα των τετραγώνων τους ρητό το δε ορθογώνιο μέσο, τότε η υπόλοιπη είναι άλογος και ονομάζεται ***ελάσσων***.

Παρατήρηση

Αν το ρητό ευθύγραμμο τμήμα α διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το μεγαλύτερο τμήμα x της διαίρεσης ισούται με

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\alpha\,,\ \text{δηλαδή}\quad x = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\alpha - \frac{1}{2}\,\alpha\,,$$

το οποίο σύμφωνα με το σχόλιο που προηγήθηκε είναι *αποτομή*.

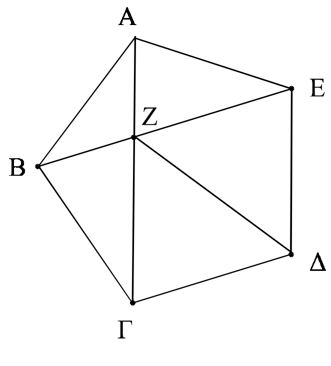
3. Ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό πεντάγωνο. Κάποιες εφαρμογές

Στις προτάσεις 7 μέχρι 12 εκτίθενται οι πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου και των κανονικών πενταγώνου, εξαγώνου και δεκαγώνου εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο και καθορίζονται σε σχέση με την ακτίνα του κύκλου.

Πρόταση 7 (XIII. 7)

Εάν τρεις γωνίες ισόπλευρου πενταγώνου, είτε αυτές είναι διαδοχικές είτε είναι μη διαδοχικές, είναι ίσες, το πεντάγωνο είναι ισογώνιο.

Απόδειξη



Σχήμα 7

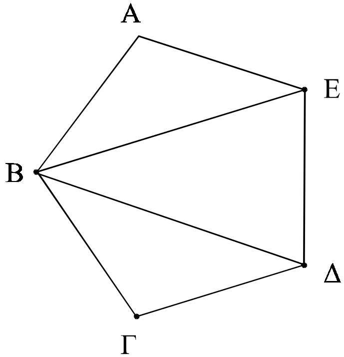
Έστω ότι τρεις διαδοχικές γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, του ισόπλευρου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίσες. Θα αποδείξουμε ότι το πεντάγωνο είναι ισογώνιο.

Φέρουμε τις ΑΓ, ΒΕ και τη ΖΔ, όπου Ζ το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΕ.

Επειδή οι πλευρές ΒΓ, ΒΑ είναι ίσες αντίστοιχα προς τις ΒΑ, ΑΕ και η γωνία $\Gamma\hat{B}A$ είναι ίση προς τη γωνία

$\mathrm{B\hat{A}E}$, τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΕ είναι ίσα, άρα οι πλευρές ΑΓ, ΒΕ είναι ίσες, η γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$ και η γωνία $\mathrm{A\hat{B}E}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$. Επομένως το τμήμα ΑΖ είναι ίσο προς το ΒΖ και επειδή αποδείχτηκε ότι το ΑΓ είναι ίσο προς το ΒΕ, έχουμε ΖΓ = = ΖΕ.

Τα τρίγωνα ΖΕΔ, ΖΓΔ είναι ίσα, διότι έχουν κοινή την πλευρά ΖΔ και τις πλευρές ΖΕ, ΕΔ ίσες προς τις ΖΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Άρα η γωνία $\mathrm{Z\hat{E}\Delta}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{Z\hat{\Gamma}\Delta}$ Αποδείχθηκε ότι η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$, άρα η γωνία $\mathrm{A\hat{E}\Delta}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{\Delta}E}$ είναι ίση προς τις γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\Gamma}$, άρα το πεντάγωνο είναι ισογώνιο.



Σχήμα 7α

Έστω τώρα ότι οι τρεις μη διαδοχικές γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\Delta}$ είναι ίσες (Σχ. 7α).

Φέρουμε τις ΒΔ, ΒΕ. Επειδή οι πλευρές ΒΑ, ΑΕ είναι ίσες προς τις ΒΓ, ΓΔ και περιέχουν ίσες γωνίες, τα τρίγωνα ΒΑΕ, ΒΓΔ είναι ίσα, άρα η πλευρά ΒΕ είναι ίση προς την πλευρά ΒΔ και η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma}$.

Τότε και η γωνία $\mathrm{\Delta\hat{E}B}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{B\hat{\Delta}E}$. Άρα η γωνία $\mathrm{A\hat{E}\Delta}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ είναι ίση προς τις γωνίες $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\Delta}$.

Άρα το πεντάγωνο είναι ισογώνιο.

ὅ.ἔ.δ.

Σημείωση

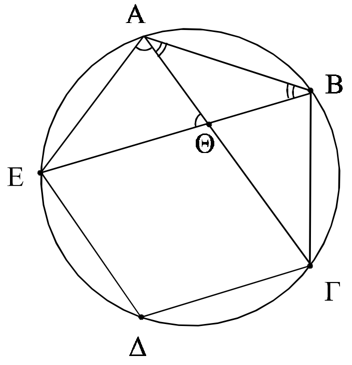
Στα επόμενα ένα ισόπλευρο και ισογώνιο πολύγωνο θα αναφέρεται και ως ***κανονικό πολύγωνο***.

Πρόταση 8 (XIII. 8)

Σε κάθε κανονικό πεντάγωνο δύο διαδοχικές διαγώνιοι τέμνονται σε άκρο και μέσο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματα της διαίρεσης είναι το καθένα ίσο με την πλευρά του πενταγώνου.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔΕ κανονικό πεντάγωνο και Θ το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΕ. Θα αποδειχθεί ότι καθεμιά από αυτές τέμνεται στο Θ σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης ισούται με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου.



Σχήμα 8

Περιγράφουμε κύκλο στο κανονικό πεντάγωνο, σύμφωνα με την πρόταση IV.14. Επειδή τα τμήματα ΕΑ, ΑΒ είναι ίσα προς τα ΑΒ, ΒΓ και περιέχουν ίσες γωνίες, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΓ είναι ίσα, άρα ΒΕ = ΑΓ και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ίσες. Άρα η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ ισούται με τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$, άρα $\mathrm{A}\hat{\Theta}\mathrm{E} = 2\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Theta$ (πρόταση I. 32). Επειδή το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{E}\Delta\Gamma}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma}$ και η γωνία $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ είναι διπλάσια της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, άρα η γωνία $\Theta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ είναι ίση προς τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\Theta}\mathrm{E}$. Άρα το τμήμα ΘΕ είναι ίσο προς το τμήμα ΕΑ, δηλαδή το ΑΒ. Και επειδή το τμήμα ΒΑ είναι ίσο προς το ΕΑ, και η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ θα ισούται με τη γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$.

Αλλά και η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ δείχθηκε ίση προς την $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Theta$, άρα θα είναι και η $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ ίση προς τη $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Theta$. Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι κοινή των τριγώνων ΑΒΕ και ΑΒΘ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΘΒ είναι ισογώνια, επομένως $\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{B}\Theta}$ και επειδή ΒΑ = ΕΘ, έχουμε $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E}\Theta} = \frac{\mathrm{E}\Theta}{\Theta\mathrm{B}}$.

Αφού το τμήμα ΒΕ είναι μεγαλύτερο από το ΕΘ, θα είναι και το τμήμα ΘΕ μεγαλύτερο του ΘΒ. Άρα το τμήμα ΒΕ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο στο σημείο Θ και το μεγαλύτερο τμήμα, το ΘΕ, είναι ίσο προς την πλευρά του πενταγώνου. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το ΑΓ έχει τμηθεί στο Θ σε άκρο και μέσο λόγο και ότι το μεγαλύτερο τμήμα, το ΓΘ, είναι ίσο προς την πλευρά του πενταγώνου.

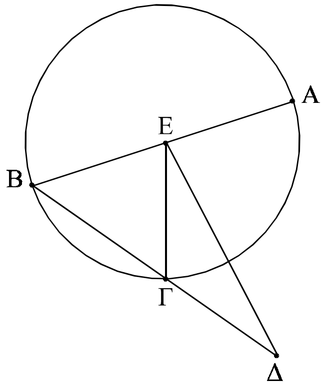
δ.ἔ.δ.

Πρόταση 9 (XIII. 9)

Εάν οι πλευρές του κανονικού εξαγώνου και δεκαγώνου που εγγράφονται στον ίδιο κύκλο συντεθούν σε μια ευθεία, τότε το όλο τμήμα διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης είναι η πλευρά του εξαγώνου.

Απόδειξη

Έστω ο κύκλος ΑΒΓ διαμέτρου ΑΒ, η πλευρά ΒΓ του κανονικού δεκαγώνου και η πλευρά ΓΔ του κανονικού εξαγώνου που εγγράφονται στον παραπάνω κύκλο. Έστω επίσης ότι τα τμήματα ΒΓ, ΓΔ κείνται επ' ευθείας. Θα αποδείξουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ έχει τμηθεί από το Γ σημείο σε άκρο και μέσο λόγο, με μεγαλύτερο τμήμα το ΓΔ.



Σχήμα 9

Έστω Ε το κέντρο του κύκλου. Φέρουμε τα τμήματα ΒΕ, ΓΕ, ΕΔ και προεκτείνουμε τη ΒΕ μέχρι το Α. Επειδή η πλευρά ΒΓ είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου, το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma B}}$ είναι πενταπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$, άρα το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι τετραπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$. Άρα η γωνία $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}$ είναι τετραπλάσια της $\mathrm{\Gamma\hat{E}B}$. Και επειδή η γωνία $\mathrm{E\hat{B}\Gamma}$ είναι ίση προς την $\mathrm{E\hat{\Gamma}B}$, έχουμε $\mathrm{A\hat{E}\Gamma} = 2\mathrm{E\hat{\Gamma}B}$. Επίσης ΕΓ = ΓΔ, διότι ΓΔ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο ΑΒΓ.

Επομένως $\mathrm{\Gamma\hat{E}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}E}$, και έτσι $\mathrm{E\hat{\Gamma}B} = 2\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$. Αλλά αποδείχθηκε ότι $\mathrm{A\hat{E}\Gamma} = 2\mathrm{E\hat{\Gamma}B}$, άρα $\mathrm{A\hat{E}\Gamma} = 4\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$. Άρα $\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma} = \mathrm{B\hat{E}\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι κοινή των δύο τριγώνων, του ΒΕΓ και του ΒΕΔ. Άρα και η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ είναι ίση προς την $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$. Άρα τα τρίγωνα ΕΒΔ, ΕΒΓ είναι ισογώνια. Επομένως $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B}\Gamma}$ και επειδή ΒΕ = = ΓΔ έπεται ότι $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\mathrm{B}}$. Επίσης είναι ΒΔ > ΔΓ άρα και ΔΓ > ΓΒ. Έτσι η ευθεία ΒΔ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα αυτής της διαίρεσης είναι το ΔΓ.

ὅ.ἔ.δ.

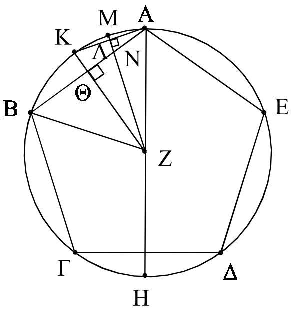
Παρατήρηση

Αν x είναι η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου και r η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, τότε η πλευρά του δεκαγώνου μπορεί να υπολογιστεί αλγεβρικά από τη σχέση :

$$(r + x)\,x = r^2, \quad \text{οπότε θα έχουμε:} \quad x = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Πρόταση 10 (XIII. 10)

Εάν εγγραφεί σε κύκλο κανονικό πεντάγωνο, τότε το τετράγωνο της πλευράς του πενταγώνου είναι ισοδύναμο προς το άθροισμα των τετραγώνων που έχουν ως πλευρές την πλευρά του κανονικού εξαγώνου και την πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που εγγράφονται στον ίδιο κύκλο.



Σχήμα 10

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔΕ κανονικό πεντάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο.

Έστω Ζ το κέντρο του κύκλου και ΑΗ διάμετρος. Από το Ζ άγουμε κάθετη ΖΘ προς την ΑΒ, η οποία προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο σημείο Κ. Φέρουμε τις ευθείες ΒΚ, ΚΑ και από το Ζ φέρουμε κάθετη ΖΛ προς την ΚΑ, η οποία τέμνει τον κύκλο στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Επειδή το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒΓΗ}$ είναι ίσο προς το τόξο $\overset{\frown}{ΑΕΔΗ}$ και το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒΓ}$ είναι ίσο προς το τόξο $\overset{\frown}{ΑΕΔ}$, έπεται ότι το τόξο $\overset{\frown}{ΓΗ}$ είναι ίσο προς το τόξο $\overset{\frown}{ΗΔ}$. Άρα το ΓΗ είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου. Επίσης ΖΑ = ΖΒ και ΖΘ κάθετη στην ΑΒ, άρα $Α\hat{Ζ}Κ = Κ\hat{Ζ}Β$ (προτάσεις Ι. 5 και Ι. 26). Άρα το τόξο $\overset{\frown}{ΑΚ}$ είναι ίσο προς το τόξο $\overset{\frown}{ΚΒ}$, κατά συνέπεια το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΚ}$ και το τμήμα ΑΚ είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου. Για τους ίδιους λόγους και το τόξο $\overset{\frown}{ΑΚ}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ΚΜ}$. Και επειδή το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΚ}$ και το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ίσο προς το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$, είναι και το τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$ διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΚ}$. Επίσης το τόξο του $\overset{\frown}{ΓΔ}$ θα είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ΓΗ}$. Άρα το τόξο $\overset{\frown}{ΓΗ}$ είναι ίσο προς το τόξο $\overset{\frown}{ΒΚ}$. Αλλά το τόξο $\overset{\frown}{ΒΚ}$ είναι διπλάσιο του $\overset{\frown}{ΚΜ}$, επειδή είναι διπλάσιο και του $\overset{\frown}{ΚΑ}$, άρα και το $\overset{\frown}{ΓΗ}$ είναι διπλάσιο του $\overset{\frown}{ΚΜ}$. Αλλά και το τόξο $\overset{\frown}{ΓΒ}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΚ}$, διότι το τόξο $\overset{\frown}{ΓΒ}$ είναι ίσο προς το $\overset{\frown}{ΒΑ}$. Άρα το τόξο $\overset{\frown}{ΗΒ}$ είναι διπλάσιο του $\overset{\frown}{ΒΜ}$, άρα και η γωνία $Η\hat{Ζ}Β$ είναι διπλάσια της $Β\hat{Ζ}Μ$.

Και η γωνία $Η\hat{Ζ}Β$ είναι διπλάσια της $Ζ\hat{Α}Β$, διότι η γωνία $Ζ\hat{Α}Β$ είναι ίση προς τη γωνία $Α\hat{Β}Ζ$. Άρα και η γωνία $Β\hat{Ζ}Ν$ είναι ίση προς την $Ζ\hat{Α}Β$. Η γωνία $Α\hat{Β}Ζ$ είναι κοινή των δύο τριγώνων ΑΒΖ και ΒΖΝ. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΖΝ είναι ισογώνια.

Ισχύει επομένως:

$$\frac{ΑΒ}{ΒΖ} = \frac{ΖΒ}{ΒΝ}, \text{ άρα } ΒΖ^2 = ΑΒ \cdot ΒΝ$$

Επειδή ΑΛ = ΛΚ, ΛΝ κοινή κάθετη, άρα ΚΝ = ΑΝ, επομένως $Λ\hat{Κ}Ν = Λ\hat{Α}Ν$.

Αλλά $\Lambda\hat{A}N = K\hat{B}N$, άρα $\Lambda\hat{K}N = K\hat{B}N$.

Και η γωνία στο Α είναι κοινή των δύο τριγώνων ΑΚΒ και ΑΚΝ. Άρα και η γωνία $A\hat{K}B$ είναι ίση προς την $K\hat{N}A$.

Επομένως, ισχύει η αναλογία $\frac{BA}{AK} = \frac{KA}{AN}$, άρα $BA \cdot AN = KA^2$, και συνεπώς $AB \cdot BN + BA \cdot AN = BZ^2 + KA^2$.

Αποδείχθηκε δηλαδή ότι $BA^2 = BZ^2 + AK^2$, όπου η ΒΑ είναι πλευρά του κανονικού πενταγώνου, η ΒΖ πλευρά του κανονικού εξαγώνου και η ΑΚ είναι πλευρά του κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένη στον ίδιο κύκλο.

ὅ.ἔ.δ.

Πρόταση 11 (XIII. 11)

Εάν σε κύκλο με ρητή διάμετρο εγγραφεί κανονικό πεντάγωνο, η πλευρά του πενταγώνου είναι άλογος, η οποία ονομάζεται και ελάσσων.

Απόδειξη

Εγγράφουμε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ σε κύκλο με ρητή διάμετρο. Θα αποδειχθεί ότι η πλευρά του πενταγώνου είναι άρρητος, η λεγόμενη *ελάσσων*.

Παίρνουμε Ζ το κέντρο του κύκλου, φέρουμε τις διαμέτρους ΒΘ, ΑΗ, τη διαγώνιο ΑΓ και στο τμήμα ΖΘ παίρνουμε τμήμα ΖΚ ίσο με το ένα τέταρτο της ακτίνας.

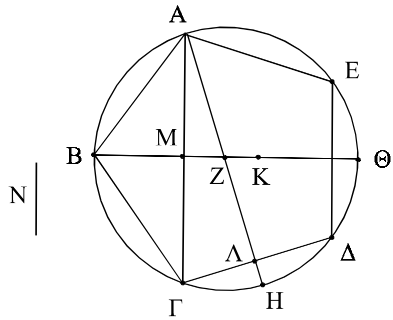
Επειδή το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma H}$ είναι ίσο προς το $\overset{\frown}{A\Delta H}$ και το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ προς το τόξο $\overset{\frown}{AE\Delta}$, έπεται ότι τα τόξα $\overset{\frown}{\Gamma H}$, $\overset{\frown}{H\Delta}$ είναι ίσα.

Εάν φέρουμε την ΑΔ, οι γωνίες στο Λ είναι ορθές και $\Gamma\Delta = 2\Gamma\Lambda$. Για τους ίδιους λόγους οι γωνίες στο Μ είναι ορθές και $A\Gamma = 2\Gamma M$. Τα τρίγωνα ΑΜΖ, ΑΛΓ είναι ισογώνια, διότι οι γωνίες $A\hat{M}Z$, $A\hat{\Lambda}\Gamma$ είναι ίσες και η γωνία $\Lambda\hat{A}\Gamma$ είναι κοινή. Άρα και οι γωνίες $A\hat{Z}M$, $A\hat{\Gamma}\Lambda$ είναι ίσες.

Άρα $\dfrac{\Lambda\Gamma}{\Gamma\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{ZA}}$ και $\dfrac{2\Lambda\Gamma}{\Gamma\mathrm{A}} = \dfrac{2\mathrm{MZ}}{\mathrm{ZA}}$. Επειδή $\dfrac{2\,\mathrm{MZ}}{\mathrm{ZA}} = \dfrac{\mathrm{MZ}}{\frac{\mathrm{ZA}}{2}}$, έχουμε $\dfrac{2\,\Lambda\Gamma}{\Gamma\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{MZ}}{\frac{\mathrm{ZA}}{2}}$, άρα $\dfrac{2\,\Lambda\Gamma}{\frac{\Gamma\mathrm{A}}{2}} = \dfrac{\mathrm{MZ}}{\frac{\mathrm{ZA}}{4}}$, δηλαδή $\dfrac{\Delta\Gamma}{\Gamma\mathrm{M}} = \dfrac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{ZK}}$. Και δια συνθέσεως $\dfrac{\Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{M}}{\Gamma\mathrm{M}} = \dfrac{\mathrm{MK}}{\mathrm{KZ}}$, άρα $\dfrac{(\Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{M})^2}{\Gamma\mathrm{M}^2} = \dfrac{\mathrm{MK}^2}{\mathrm{KZ}^2}$.

Και επειδή, όταν τμηθεί το τμήμα ΑΓ σε άκρο και μέσο λόγο το μεγαλύτερο τμήμα είναι η πλευρά του πενταγώνου, δηλαδή το ΔΓ, (πρόταση 8) και το τετράγωνο του μεγαλύτερου τμήματος αυξημένου κατά το μισό του όλου είναι πενταπλάσιο του τετραγώνου του μισού του όλου (πρόταση 1), ισχύει

$$(\Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{M})^2 = 5\Gamma\mathrm{M}^2$$



Σχήμα 11

Άρα $\mathrm{MK}^2 = 5\mathrm{KZ}^2$.

Το KZ^2 είναι ρητό, διότι η διάμετρος είναι ρητή, επομένως το MK^2 είναι ρητό και το ΜΚ είναι ρητό.

Επίσης είναι ΒΖ = 4ΖΚ, επομένως ΒΚ = 5ΖΚ και $\mathrm{BK}^2 = 25\ \mathrm{ZK}^2$, άρα θα έχουμε $\mathrm{BK}^2 = 5\ \mathrm{MK}^2$. Επειδή το BK^2 προς το MK^2 δεν έχει λόγο τον οποίο έχει τετράγωνος αριθμός προς τετράγωνο αριθμό, το ΒΚ είναι ασύμμετρο ως προς το μήκος προς το ΜΚ. Άρα (σύμφωνα με την πρόταση Χ.73) το τμήμα ΜΒ είναι αποτομή και το ΜΚ είναι προσαρμόζουσα. Θα δείξουμε ότι είναι τέταρτη αποτομή.

Έστω $\mathrm{BK}^2 - \mathrm{KM}^2 = \mathrm{N}^2$, δηλαδή το τετράγωνο του ΒΚ υπερέχει από το τετράγωνο του ΚΜ κατά N^2. Επειδή το ΚΖ είναι σύμμετρο προς το ΒΖ, και το ΚΒ = ΚΖ + ΖΒ είναι σύμμετρο προς το ΒΖ. Αλλά το ΒΚ είναι σύμμετρο προς το ΒΘ, άρα το ΒΚ είναι σύμμετρο προς το ΒΘ.

Επειδή $\dfrac{\mathrm{BK}^2}{\mathrm{KM}^2} = \dfrac{5}{1}$, δι' αντιστροφής έχουμε $\dfrac{\mathrm{BK}^2}{\mathrm{N}^2} = \dfrac{5}{4}$, το οποίο δεν είναι λόγος τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, άρα το ΒΚ είναι ασύμμετρο κατά μήκος προς το Ν. Άρα το BK^2 υπερέχει του KM^2

κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης (κατά μήκος) προς το ΒΚ και το ΒΚ είναι σύμμετρο προς το ρητό τμήμα ΒΘ, άρα το ΜΒ είναι τετάρτη αποτομή.

Όμως το ορθογώνιο που περιέχεται από ρητό τμήμα και τέταρτη αποτομή είναι άλογο. Επίσης, η πλευρά του ισοδύναμου με αυτό τετραγώνου είναι άλογος, και ονομάζεται *ελάσσων* (πρόταση Χ. 94)

Επίσης ισχύει $ΘΒ \cdot ΒΜ = ΑΒ^2$, διότι το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΑΒΘ και ισχύει $\frac{ΘΒ}{ΒΑ} = \frac{ΒΑ}{ΒΜ}$.

Άρα αποδείχθηκε ότι η πλευρά του πενταγώνου δεν είναι ρητή, δηλαδή είναι άλογος (άρρητος), που ονομάζεται *ελάσσων* (Βλέπε σχόλιο μετά την πρόταση 6).

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Αν y είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου και x η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου εγγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r, τότε, σύμφωνα με όσα αποδείχθηκαν στην πρόταση 11, θα ισχύει η σχέση:
$y^2 = x^2 + r^2$. Όμως από την παρατήρηση μετά την πρόταση 9, έχουμε
$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. Επομένως:

$$y^2 = \frac{r^2}{4}\left(6-2\sqrt{5}\right)+r^2 \iff y^2 = \frac{r^2}{4}\left(10-2\sqrt{5}\right),$$

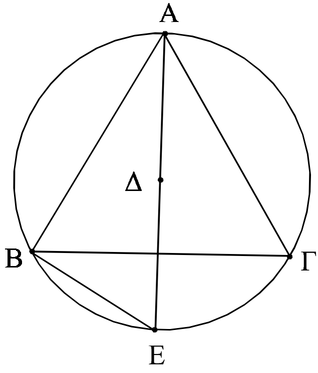
Άρα για την πλευρά y του κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r θα έχουμε $y = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Αποδεικνύεται ότι το y ως διαφορά ευθύγραμμων τμημάτων γράφεται
$y = \frac{r}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{r}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, το οποίο ως ευθεία είναι ελάσσων.

Πρόταση 12 (XIII. 12)

Εάν σε κύκλο εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς του τριγώνου είναι τριπλάσιο του τετραγώνου της ακτίνας του κύκλου.

Απόδειξη

Εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ σε κύκλο με κέντρο Δ. Προεκτείνουμε την ΑΔ, η οποία τέμνει τον κύκλο στο Ε. Θα αποδειχθεί ότι $AB^2 = 3\Delta E^2$.



Σχήμα 12

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, το τόξο $\overset{\frown}{B E \Gamma}$ είναι το ένα τρίτο της περιφέρειας του κύκλου, άρα το τόξο $\overset{\frown}{BE}$ είναι το ένα έκτο της περιφέρειας του κύκλου και το τμήμα ΒΕ είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου (πρόταση IV.15, πόρισμα). Επειδή ΑΕ = 2ΔΕ, έχουμε $AE^2 = 4\ \Delta E^2$, δηλαδή $AE^2 = 4\ BE^2$. Ισχύει $AB^2 = AE^2 - BE^2$, άρα $AB^2 = 3\ BE^2$, δηλαδή $AB^2 = 3\ \Delta E^2$.

ὅ.ἔ.δ.

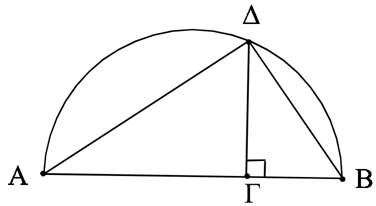
4. Κανονικό τετράεδρο - Κατασκευή

Πρόταση 13 (XIII.13)

Να κατασκευασθεί πυραμίδα (: κανονικό τετράεδρο), να εγγραφεί σε δοσμένη σφαίρα και να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τα τρία δεύτερα του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας.

Απόδειξη

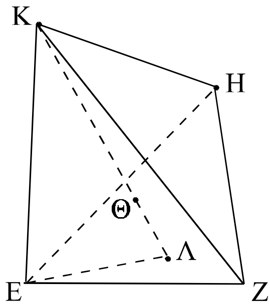
Έστω ΑΒ η διάμετρος της σφαίρας. Τέμνουμε το τμήμα ΑΒ στο σημείο Γ, ώστε το τμήμα ΑΓ να είναι διπλάσιο του ΓΒ και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Στο σημείο Γ φέρουμε κάθετη στο τμήμα ΑΒ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Δ και φέρουμε το τμήμα ΑΔ.



Σχήμα 13

Κατασκευή του τετραέδρου.

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο Θ και ακτίνα ΔΓ και εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΖΕΗ. Στο σημείο Θ υψώνουμε κάθετη στο επίπεδο του κύκλου και παίρνουμε τμήμα ΘΚ ίσο με ΑΓ (Σχ. 13α).



Σχήμα 13α

Η ευθεία ΘΚ ως κάθετη στο επίπεδο του κύκλου, είναι κάθετη στις ευθείες ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ.

Επειδή το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με το ΘΚ, και το ΓΔ ίσο προς το ΘΕ και επειδή περιέχουν ορθές γωνίες, το ΑΔ είναι ίσο με το ΚΕ (πρόταση Ι.4). Για τον ίδιο λόγο καθένα από τα τμήματα ΚΖ, ΚΗ ισούται με το ΔΑ.

Άρα ΚΕ = ΚΖ = ΚΗ.

Επειδή το τμήμα ΑΓ είναι διπλάσιο του ΓΒ, το ΑΒ είναι τριπλάσιο του ΒΓ.

Επίσης, όπως αποδεικνύεται στο λήμμα που ακολουθεί, ισχύει η σχέση: $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ^2}{ΔΓ^2}$.

Άρα $ΑΔ^2 = 3\ ΔΓ^2$. Επίσης ισχύει $ΖΕ^2 = 3\ ΕΘ^2$ (πρόταση 12), και επειδή ΔΓ = ΕΘ, έπεται ότι: ΔΑ = ΕΖ.

Αλλά το ΔΑ δείχθηκε ίσο με καθένα από τα ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ και καθένα από τα ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ είναι ίσο με καθένα από τα ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. Άρα τα τρίγωνα ΕΖΗ, ΚΗΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ είναι ισόπλευρα.

Επομένως κατασκευάσθηκε πυραμίδα, που αποτελείται από τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα, η βάση της οποίας είναι το ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΗ και κορυφή της το σημείο Κ.

Εγγραφή σε σφαίρα.

Προεκτείνουμε το τμήμα ΚΘ κατά τμήμα ΘΛ = ΓΒ. Επειδή $\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = \frac{ΓΔ}{ΓΒ}$ (πρόταση VI, 8) ΑΓ = ΚΘ, ΓΔ = ΘΕ και ΓΒ = ΘΛ έχουμε $\frac{ΚΘ}{ΘΕ} = \frac{ΕΘ}{ΘΛ}$ άρα $ΚΘ \cdot ΘΛ = ΕΘ^2$.

Επίσης, οι γωνίες $Κ\hat{Θ}Ε$, $Ε\hat{Θ}Λ$ είναι ορθές. Επομένως το ημικύκλιο με διάμετρο ΚΛ θα διέλθει από το Ε, (διότι, αν φέρουμε το ΕΛ, η γωνία $Λ\hat{Ε}Κ$ γίνεται ορθή, εφόσον το τρίγωνο ΕΛΚ είναι ισογώνιο προς καθένα από τα τρίγωνα ΕΛΘ, ΕΘΚ). Εάν λοιπόν περιστρέψουμε το ημικύκλιο διατηρώντας σταθερή την ΚΛ, τότε αυτό θα διέλθει και από τα σημεία Ζ, Η. Επομένως η πυραμίδα εγγράφεται στη σφαίρα διαμέτρου ΚΛ.

Η σφαίρα είναι η δοσμένη.

Η διάμετρος ΚΛ της σφαίρας είναι ίση προς τη διάμετρο ΑΒ της δοσμένης σφαίρας, επειδή το τμήμα ΑΓ είναι ίσο προς το ΚΘ και το ΓΒ είναι ίσο προς το ΘΛ.

Το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τα τρία δεύτερα του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας.

Επειδή ΑΓ = 2 ΓΒ έχουμε ΑΒ = 3ΓΒ, άρα ΒΑ = $\frac{3}{2}$ ΑΓ. Επίσης όπως προκύπτει από την απόδειξη του λήμματος που ακολουθεί, $ΑΔ^2 =$ $= ΒΑ \cdot ΑΓ$, οπότε $\frac{ΒΑ}{ΑΓ} = \frac{ΒΑ^2}{ΑΔ^2}$. Επομένως θα έχουμε: $ΒΑ^2 = \frac{3}{2}ΑΔ^2$, όπου ΑΒ είναι η διάμετρος της δοσμένης σφαίρας και το τμήμα ΑΔ ισούται με την πλευρά της πυραμίδας.

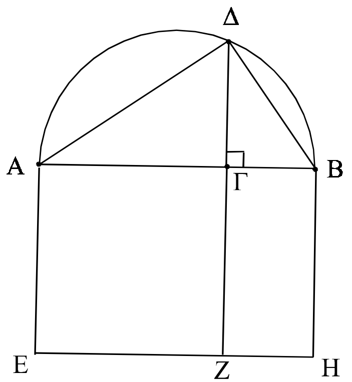
ὅ.ἔ.δ.

Λήμμα

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ^2}{ΔΓ^2}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε (Σχ. 13β) το προηγούμενο ημικύκλιο και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΓΖΕ και το ορθογώνιο ΒΓΖΗ. Επειδή το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΔΑΓ ισχύει: $\frac{ΒΑ}{ΑΔ} = \frac{ΔΑ}{ΑΓ}$, άρα $ΒΑ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2$.



Σχήμα 13β

Όμως ισχύουν οι σχέσεις:

$\frac{(ΑΒΗΕ)}{(ΒΓΖΗ)} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$, $(ΑΒΗΕ) = ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2$ και $(ΒΓΖΗ) = ΒΓ \cdot ΑΓ = ΔΓ^2$,

από όπου προκύπτει η προς απόδειξη σχέση.

Παρατήρηση

Αν r είναι η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας και x η ακμή της πυραμίδας που κατασκευάσθηκε (δηλαδή η πλευρά του κανονικού τετράεδρου), τότε όπως αποδείχθηκε, ισχύει η σχέση:

$$4r^2 = \frac{3}{2}\, x^2, \text{ άρα } x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, r = \frac{2}{3}\sqrt{6}\, r .$$

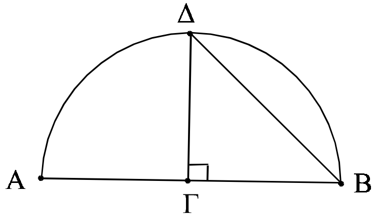
5. Κανονικό οκτάεδρο - κατασκευή

Πρόταση 14 (XIII. 14)

Να κατασκευασθεί κανονικό οκτάεδρο και να εγγραφεί σε σφαίρα, όπως έγινε προηγουμένως με την πυραμίδα, και να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ η διάμετρος της δοσμένης σφαίρας και Γ το μέσο της. Θεωρούμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και την κάθετη προς την ΑΒ στο σημείο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Δ και φέρουμε το τμήμα ΔΒ.



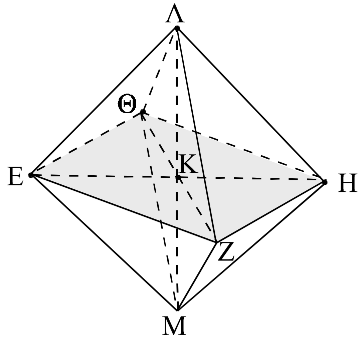
Σχήμα 14

Κατασκευή του οκταέδρου.

Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ με πλευρά ίση με ΔΒ και έστω Κ το σημείο τομής των ΘΖ, ΕΗ. Στο σημείο Κ υψώνουμε κάθετη στο επίπεδο του τετραγώνου και εκατέρωθεν του επιπέδου παίρνουμε τμήματα ΚΛ, ΚΜ ίσα με τα τμήματα ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ. Φέρουμε τα τμήματα ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ (Σχ. 14α).

Επειδή ΚΕ = ΚΘ και η γωνία $\widehat{ΕΚΘ}$ είναι ορθή, έχουμε $ΘΕ^2 = 2\ ΕΚ^2$.

Επειδή ισχύει: ΛΚ = ΚΕ και η γωνία $\widehat{ΛΚΕ}$ είναι ορθή, έχουμε $ΕΛ^2 = 2\ ΕΚ^2$. Άρα $ΛΕ^2 = ΕΘ^2$, οπότε ΛΕ = ΕΘ. Για τον ίδιο λόγο ΛΘ = ΘΕ. Άρα το τρίγωνο ΛΕΘ είναι ισόπλευρο. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι καθένα από τα υπόλοιπα τρίγωνα, των οποίων οι βάσεις είναι οι πλευρές του τετραγώνου ΕΖΗΘ και κορυφές τα σημεία Λ, Μ είναι ισόπλευρα. Επομένως κατασκευάστηκε οκτάεδρο, το οποίο περιέχεται σε οκτώ ισόπλευρα τρίγωνα.



Σχήμα 14α

Εγγραφή σε σφαίρα.

Επειδή ΛΚ = ΚΜ = ΚΕ, το Ε ανήκει στο ημικύκλιο διαμέτρου ΛΜ. Για τον ίδιο λόγο, αν περιστραφεί το ημικύκλιο και επανέλθει στην αρχική του θέση, διατηρώντας σταθερή τη ΛΜ, θα διέλθει και από τα σημεία Ζ, Η, Θ. Άρα το οκτάεδρο εγγράφεται σε σφαίρα διαμέτρου ΛΜ.

Η σφαίρα είναι η δοσμένη.

Επειδή ΛΕ = ΕΜ και η γωνία $\Lambda\hat{E}M$ είναι ορθή, έχουμε $ΛΜ^2 = 2\,ΛΕ^2$. Επίσης, επειδή ΑΓ = ΓΒ, ισχύει ΑΒ = 2 ΒΓ.

Επιπλέον ισχύει $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{AB^2}{B\Delta^2}$ (πρόταση VI. 8 και βιβλίο V ορισμός 9).

Επομένως $AB^2 = 2\,B\Delta^2$.

Αποδείχθηκε όμως ότι $ΛΜ^2 = 2\,ΛΕ^2$ και ακόμα ισχύει ότι $ΔΒ^2 = ΛΕ^2$, διότι ΕΘ = ΔΒ. Άρα θα είναι $AB^2 = ΛΜ^2$, δηλαδή ΑΒ = ΛΜ.

Επομένως η διάμετρος ΛΜ της σφαίρας ισούται με τη διάμετρο της δοσμένης σφαίρας ΑΒ και ταυτόχρονα αποδείχθηκε ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Αν r είναι η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας και x η ακμή του οκταέδρου που κατασκευάσθηκε, δηλαδή του κανονικού οκταέδρου, αποδείχθηκε ότι ισχύει η σχέση: $4r^2 = 2x^2$. Επομένως θα έχουμε

$$x = \sqrt{2} \cdot r$$

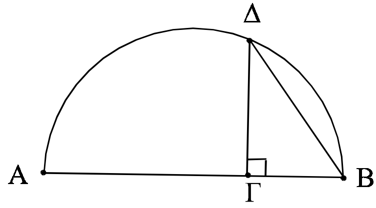
6. Κανονικό εξάεδρο (: κύβος) - κατασκευή

Πρόταση 15 (XIII. 15)

Να κατασκευασθεί κύβος και να εγγραφεί σε σφαίρα, όπως έγινε προηγουμένως και με την πυραμίδα, και να δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου.

Απόδειξη

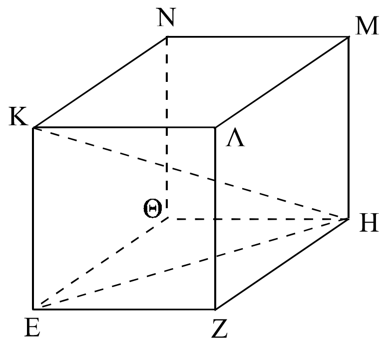
Έστω ΑΒ η διάμετρος της δοσμένης σφαίρας, την οποία τέμνουμε στο σημείο Γ, ώστε ΑΓ = 2 ΓΒ. Στο σημείο Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΒ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ στο σημείο Δ.



Σχήμα 15

Κατασκευή του κύβου.

Θεωρούμε (Σχ. 15α) τετράγωνο ΕΖΗΘ με πλευρά ίση προς το τμήμα ΔΒ. Στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ φέρουμε κάθετες στο επίπεδο του τετραγώνου και παίρνουμε τμήματα ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ ίσα προς την πλευρά του τετραγώνου και προς το ίδιο μέρος ως προς το επίπεδο του τετραγώνου. Επομένως κατασκευάσθηκε κύβος ο οποίος περιέχεται σε έξι ίσα τετράγωνα.



Σχήμα 15α

Εγγραφή σε σφαίρα.

Φέρουμε τα τμήματα ΚΗ, ΕΗ. Επειδή η ευθεία ΚΕ είναι κάθετη στο επίπεδο ΕΖΗΘ, η γωνία $\widehat{KEH}$ είναι ορθή, άρα το ημικύκλιο διαμέτρου ΚΗ θα διέλθει από το σημείο Ε. Επίσης, επειδή η ευθεία ΗΖ είναι κάθετη στις ευθείες ΕΖ, ΖΛ θα είναι κάθετη και στην ευθεία ΚΖ, άρα το ημικύκλιο διαμέτρου ΚΗ θα διέλθει και από το Ζ. Για τον ίδιο λόγο, αν το ημικύκλιο περιστραφεί διατηρώντας σταθερή την ΚΗ, θα διέλθει και από τις υπόλοιπες κορυφές του κύβου, αφού επανέλθει στην αρχική του θέση.

Η σφαίρα είναι η δοσμένη.

Επειδή ΗΖ = ΕΖ και η γωνία $\widehat{\text{ΕΖΗ}}$ είναι ορθή έχουμε $\text{ΕΗ}^2 = 2\ \text{ΕΖ}^2$. Επίσης ΕΚ = ΕΖ και η γωνία $\widehat{\text{ΚΕΗ}}$ είναι ορθή, άρα $\text{ΚΗ}^2 = \text{ΚΕ}^2 + \text{ΕΗ}^2$. Επομένως έχουμε $\text{ΚΗ}^2 = 3\ \text{ΕΖ}^2$.

Επίσης είναι ΑΒ = 3ΒΓ και $\dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \dfrac{\text{ΑΒ}^2}{\text{ΔΒ}^2}$, άρα ισχύει $\text{ΑΒ}^2 = 3\ \text{ΒΔ}^2$.

Αποδείχθηκε επίσης ότι $\text{ΗΚ}^2 = 3\text{ΕΖ}^2$ και έχουμε ΕΖ = ΔΒ, επομένως ΚΗ = ΑΒ, δηλαδή η διάμετρος ΚΗ ισούται προς τη δοσμένη διάμετρο ΑΒ.

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της περιγεγραμμένης σφαίρας του κύβου είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς (ακμής) του κύβου.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Αν r είναι η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας και x η ακμή του κύβου, τότε, όπως αποδείχθηκε, ισχύει η σχέση:

$$4r^2 = 3x^2, \quad \text{οπότε θα είναι} \quad x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r\,.$$

7. Κανονικό εικοσάεδρο – κατασκευή

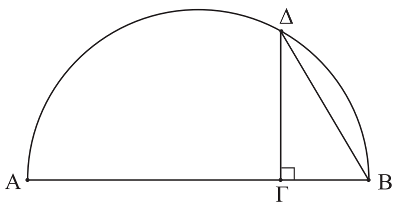
Πρόταση 16 (XIII. 16)

Να κατασκευασθεί (κανονικό) εικοσάεδρο και να εγγραφεί σε σφαίρα, όπως έγινε και με τα προηγούμενα σχήματα, και να αποδειχθεί ότι η πλευρά του εικοσάεδρου είναι άρρητος, η λεγόμενη ελάσσων.

Απόδειξη

Βήμα 1ο

Εγγραφή κανονικού πενταγώνου σε κύκλο, του οποίου το τετράγωνο της ακτίνας ισούται με το 1/5 του τετραγώνου της διαμέτρου της σφαίρας.

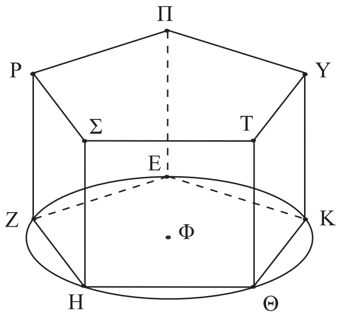


Σχήμα 16

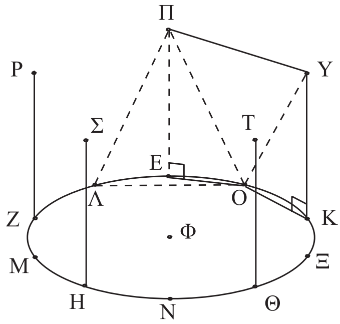
Έστω ΑΒ η διάμετρος της δοσμένης σφαίρας και έστω Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΓ = 4ΓΒ. Με διάμετρο το τμήμα ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο και στο σημείο Γ φέρουμε κάθετη στην ΑΒ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Δ, και ενώνουμε τα σημεία Β, Δ.

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Φ με ακτίνα ίση προς ΒΔ και κανονικό πεντάγωνο ΕΖΗΘΚ εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο. Διχοτομούμε τα τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ στα σημεία Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο και φέρουμε τα τμήματα ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Το πεντάγωνο ΛΜΝΞΟ είναι επίσης κανονικό και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΟ είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου στον παραπάνω κύκλο.

Στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ, Κ υψώνουμε κάθετες στο επίπεδο του κύκλου, παίρνουμε τμήματα ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ίσα με την ακτίνα του κύκλου και φέρουμε τα τμήματα ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ.



Σχήμα 16α



Σχήμα 16β

Το πεντάγωνο ΠΡΣΤΥ είναι κανονικό.

Πράγματι, αφού οι ευθείες ΕΠ, ΚΥ είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης τα τμήματα ΕΠ, ΚΥ είναι ίσα. Επομένως τα τμήματα ΠΥ, ΕΚ είναι ίσα. Άρα το τμήμα ΠΥ είναι ίσο με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου ΕΖΗΘΚ. Για τον ίδιο λόγο τα τμήματα ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ είναι ίσα με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου ΕΖΗΘΚ . Άρα το πεντάγωνο ΠΡΣΤΥ είναι κανονικό.

Βήμα 2^{ο}

Τα τρίγωνα ΠΟΥ και ΠΛΟ είναι ισόπλευρα.

Επειδή ΠΕ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου, ΕΟ κανονικού δεκαγώνου και η γωνία $\widehat{ΠΕΟ}$ είναι ορθή, το τμήμα ΠΟ ισούται με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου˙ διότι το τετράγωνο της πλευράς του πενταγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς του εξαγώνου συν το τετράγωνο της πλευράς του δεκαγώνου.

Για τον ίδιο λόγο το ΟΥ ισούται με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

Το τμήμα ΠΥ έχει ήδη αποδειχθεί ίσο με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου. Άρα το τρίγωνο ΠΟΥ είναι ισόπλευρο.

Για τον ίδιο λόγο και τα τρίγωνα ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ είναι ισόπλευρα.

Σημείωση: Με αυτό τον τρόπο κατασκευάσθηκαν ήδη οι δέκα (10) από τις είκοσι (20) έδρες του ζητούμενου εικοσαέδρου.

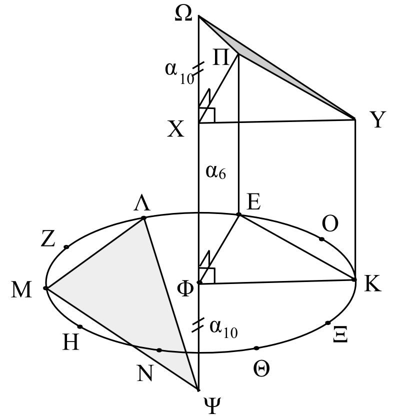
Επίσης, αφού κάθε τμήμα ΠΛ, ΠΟ αποδείχθηκε ίσο με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου και το τμήμα ΛΟ είναι πλευρά του κανονικού πενταγώνου, έπεται ότι το τρίγωνο ΠΛΟ είναι ισόπλευρο.

Για τον ίδιο λόγο καθένα από τα τρίγωνα ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ είναι ισόπλευρα.

Βήμα 3ο

Κατασκευή "στέγης"

Στο κέντρο Φ του κύκλου που θεωρήσαμε στο Βήμα 1ο υψώνουμε κάθετη στο επίπεδο του κύκλου και παίρνουμε προς το αυτό μέρος διαδοχικά τμήματα ΦΧ , ΧΩ ίσα με την πλευρά του κανονικού εξαγώνου και του δεκαγώνου αντίστοιχα, και προς το άλλο μέρος τμήμα ΦΨ ίσο με την πλευρά του κανονικού δεκαγώνου.

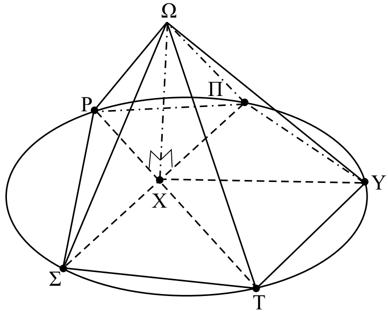


Σχήμα 16γ

Επειδή ΦΧ, ΠΕ είναι ίσα τμήματα και κάθετα στο επίπεδο του κύκλου, έπεται ότι είναι ίσα και παράλληλα˙ Άρα το ΠΧ ισούται με την πλευρά του κανονικού εξαγώνου.

Το τρίγωνο ΠΩΥ είναι ισόπλευρο.

Πράγματι, επειδή ΠΧ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου, ΧΩ πλευρά κανονικού δεκαγώνου και η γωνία $\widehat{ΩΧΠ}$ είναι ορθή, έπεται ότι το τμήμα ΠΩ ισούται με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου (πρότα-



Σχήμα 16δ

ση 10). Για τον ίδιο λόγο το τμήμα ΥΩ ισούται με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου. Άρα το τρίγωνο ΠΩΥ είναι ισόπλευρο. Για τον ίδιο λόγο καθένα από τα υπόλοιπα τρίγωνα με βάσεις ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ και κορυφή το Ω είναι επίσης ισόπλευρο.

Ομοίως, τα τρίγωνα ΨΛΜ, ΨΜΝ, ΨΝΞ, ΨΞΟ, ΨΟΛ είναι και αυτά ισόπλευρα.

Σημείωση: Κατασκευάσθηκαν έτσι οι υπόλοιπες δέκα (10) έδρες του ζητούμενου εικοσαέδρου. Άρα κατασκευάστηκε εικοσάεδρο που περικλείεται από είκοσι ισόπλευρα τρίγωνα.

Βήμα 4^{ο} Το εικοσάεδρο εγγράφεται στη δοθείσα σφαίρα

Εγγραφή σε σφαίρα.

Επειδή ΦΧ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου και ΧΩ πλευρά κανονικού δεκαγώνου, το τμήμα ΦΩ έχει διαιρεθεί σε μέσο και άκρο λόγο στο Χ (πρόταση 9) και ΦΧ είναι το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης. Γι’ αυτό το λόγο ισχύει: $\frac{ΩΦ}{ΦΧ} = \frac{ΦΧ}{ΧΩ}$. Επίσης ΦΧ = ΦΕ και ΧΩ = ΦΥ, άρα $\frac{ΩΦ}{ΦΕ} = \frac{ΦΕ}{ΦΥ}$.

Οι γωνίες $Ω\hat{Φ}Ε$, $Ε\hat{Φ}Ψ$ είναι ορθές, άρα η γωνία $Ψ\hat{Ε}Ω$ είναι ορθή, λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΩΦΕ, ΕΦΨ (πρόταση VI. 8).

Για τον ίδιο λόγο, αφού

$$\frac{ΩΦ}{ΦΧ} = \frac{ΦΧ}{ΧΩ}, \quad ΩΦ = ΨΧ \text{ και } ΦΧ = ΧΠ, \text{ έπεται ότι } \frac{ΨΧ}{ΧΠ} = \frac{ΠΧ}{ΧΩ},$$

οπότε η γωνία $Ψ\hat{Π}Ω$ είναι ορθή (πρόταση VI. 8). Άρα το ημικύκλιο διαμέτρου ΨΩ διέρχεται από το σημείο Π.

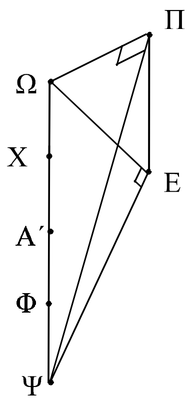
Και αν το ημικύκλιο περιστραφεί γύρω από το ΩΨ και επανέλθει στην ίδια θέση από την οποία ξεκίνησε, θα διέλθει από το Π και τα υπόλοιπα σημεία του εικοσαέδρου.

Η σφαίρα είναι η δοσμένη.

Έστω Α΄ το μέσο του τμήματος ΦΧ. Αφού το ΦΩ έχει διαιρεθεί σε μέσο και άκρο λόγο στο Χ και ΧΩ είναι το μικρότερο τμήμα, έχουμε: $(ΩΑ')^2 = 5\,(Α'Χ)^2$ (πρόταση 3). Επίσης $ΩΨ = 2\,ΩΑ'$ και $ΦΧ = 2\,Α'Χ$, άρα $(ΩΨ)^2 = 5\,(ΦΧ)^2$ και αφού $ΑΓ = 4\,ΓΒ$, έπεται ότι $ΑΒ = 5\,ΒΓ$.

Ισχύει επίσης η σχέση $\dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{ΑΒ^2}{ΒΔ^2}$ (προτάσεις VI. 8 και V. 9). Άρα $(ΑΒ)^2 = 5\,(ΒΔ)^2$.

Επίσης, ΒΔ και ΦΧ είναι ίσα με την ακτίνα του κύκλου ΕΖΗΘΚ, οπότε ΑΒ = ΨΩ. Άρα ΨΩ είναι διάμετρος της δοσμένης σφαίρας.



Σχήμα 16ε

Βήμα 5ο ***Η πλευρά του εικοσάεδρου είναι άρρητη.***

Επειδή η διάμετρος της σφαίρας είναι ρητή και το τετράγωνό της είναι ισοδύναμο προς το πενταπλάσιο τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου είναι ρητή και η ακτίνα του κύκλου. *Άρα και η διάμετρος του κύκλου είναι ρητή.*

Εάν δε σε κύκλο με ρητή διάμετρο εγγραφεί κανονικό πεντάγωνο η πλευρά του πενταγώνου είναι άλογος (άρρητη), και λέγεται *ελάσσων*.

Η πλευρά του πενταγώνου ΕΖΗΘΚ είναι η πλευρά του εικοσαέδρου.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Αν r είναι η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας, τότε η ακτίνα του κύκλου από τον οποίο γίνεται η κατασκευή του εικοσαέδρου είναι

$$p = \frac{2}{\sqrt{5}}\, r\,.$$

Η ακτίνα του εγγεγραμμένου πενταγώνου είναι:

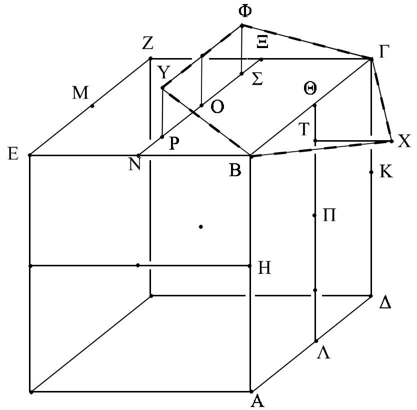
$$\frac{p}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{r}{\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{r}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

8. Κανονικό δωδεκάεδρο - κατασκευή

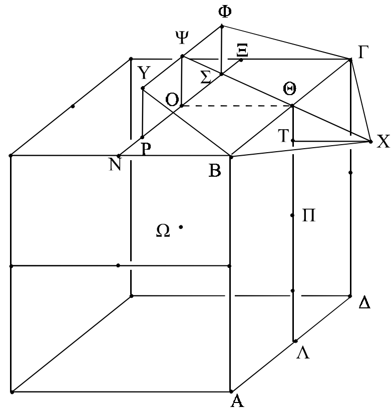
Πρόταση 17 (XIII. 17)

Να κατασκευασθεί κανονικό δωδεκάεδρο και να εγγραφεί σε σφαίρα, όπως έγινε και με τα προηγούμενα σχήματα, και να αποδειχθεί ότι η πλευρά του δωδεκαέδρου είναι άρρητη, η λεγόμενη αποτομή.

Βήμα 1°
Κατασκευή



Σχήμα 17



Σχήμα 17α

Θεωρούμε τον κύβο που κατασκευάσθηκε στην πρόταση 15. Παίρνουμε δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, τα ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ και τέμνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ στα μέσα Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ. Έστω Ο το σημείο τομής των ΝΞ, ΜΘ και Π το σημείο τομής των ΘΛ, ΗΚ. Διαιρούμε καθένα από τα τμήματα ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ σε άκρο και μέσο λόγο στα σημεία Ρ, Σ, Τ, με μεγαλύτερα τμήματα των διαιρέσεων τα ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ.

Στα σημεία Ρ, Σ, Τ υψώνουμε κάθετες στα επίπεδα του κύβου και εξωτερικά του κύβου παίρνουμε τμήματα ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ ίσα με ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ και φέρουμε τα τμήματα ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ.

Βήμα 2°
Το πεντάπλευρο ΥΒΧΓΦ είναι ισόπλευρο, επίπεδο και ισογώνιο.
Το πεντάγωνο είναι ισόπλευρο.

Άγουμε τα τμήματα ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ.

Επειδή το τμήμα ΝΟ διαιρείται στο σημείο Ρ σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΡΟ ισχύει:

$ΟΝ^2 + ΝΡ^2 = 3\ ΟΡ^2$ (πρόταση 4)

Επίσης, ΟΝ = ΝΒ και ΟΡ = ΡΥ.

Άρα $ΒΝ^2 + ΝΡ^2 = 3\ ΡΥ^2$.

Επιπλέον $ΒΝ^2 + ΝΡ^2 = ΒΡ^2$ (πρόταση Ι. 47)

Άρα $ΒΡ^2 = 3ΡΥ^2$, κατά συνέπεια $ΒΡ^2 + ΡΥ^2 = 4\ ΡΥ^2$ και επειδή $ΒΡ^2 + ΡΥ^2 = ΒΥ^2$, έπεται ότι $ΒΥ^2 = 4\ ΡΥ^2$.

Άρα ΒΥ = 2 ΡΥ.

Επίσης ΦΥ = 2ΡΥ, διότι ΣΡ = 2ΟΡ, δηλαδή ΣΡ = 2 ΡΥ.

Συνεπώς ΒΥ = ΥΦ.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι κάθε τμήμα από τα ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ είναι ίσο προς τα ΒΥ, ΥΦ.

Το πεντάγωνο είναι επίπεδο.

Στο σημείο Ο υψώνουμε κάθετη στο επίπεδο του κύβου και εξωτερικά του κύβου παίρνουμε τμήμα ΟΨ ίσο με ΡΥ.

Φέρουμε τα τμήματα ΨΘ, ΘΧ και θα δείξουμε ότι η ΨΘΧ είναι ευθεία.

Επειδή το τμήμα ΘΠ διαιρείται στο Τ σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΠΤ, έχουμε $\frac{ΘΠ}{ΠΤ} = \frac{ΠΤ}{ΤΘ}$. Επίσης ΘΠ = ΘΟ και ΠΤ = ΤΧ = ΟΨ. Άρα $\frac{ΘΟ}{ΟΨ} = \frac{ΧΤ}{ΤΘ}$

Η ευθεία ΘΟ είναι παράλληλη στην ΤΧ, επειδή και οι δύο είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο (πρόταση ΧΙ. 6).

Η ευθεία ΤΘ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΟΨ, επειδή και οι δύο είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο. Και αν δύο τρίγωνα, όπως τα ΨΟΘ, ΘΤΧ τα οποία έχουν δύο πλευρές ανάλογες, τοποθετηθούν μαζί σε μια γωνία (έχουν κοινή κορυφή το Θ) και οι ομόλογες πλευρές είναι παράλληλες, τότε οι άλλες δύο πλευρές θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία (πρόταση VI. 32).

Άρα τα τμήματα ΨΘ, ΘΧ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Κάθε ευθεία βρίσκεται σε ένα επίπεδο (πρόταση ΧΙ. 1).

Άρα σε ένα επίπεδο θα βρίσκεται και το πεντάγωνο ΥΒΧΓΦ.

Το πεντάγωνο είναι ισογώνιο.

Επειδή το τμήμα ΝΟ διαιρείται στο σημείο Ρ σε μέσο και άκρο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΡΟ, το τμήμα ΝΣ διαιρείται στο Ο σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΝΟ (πρόταση 5).

Άρα $ΝΣ^2 + ΣΟ^2 = 3\ ΝΟ^2$ (πρόταση 4).

Επίσης ΝΟ = ΝΒ και ΟΣ = ΣΦ. Άρα $ΝΣ^2 + ΣΦ^2 = 3\ ΝΒ^2$, επομένως $ΦΣ^2 + ΣΝ^2 + ΝΒ^2 = 4\ ΝΒ^2$.

Επειδή $ΣΝ^2 + ΝΒ^2 = ΣΒ^2$ (πρόταση Ι. 47), έπεται ότι $ΒΣ^2 + ΣΦ^2 = 4\ ΝΒ^2$, δηλαδή $ΒΦ^2 = 4\ ΝΒ^2$.

Άρα ΒΦ = 2 ΒΝ. Επίσης, ΒΓ = 2 ΒΝ, άρα ΒΦ = ΒΓ.

Επειδή ΒΥ = ΒΧ, ΥΦ = ΓΧ και ΒΦ = ΒΓ τα τρίγωνα ΒΥΦ, ΒΧΓ είναι ίσα, άρα η γωνία ΒΥΦ είναι ίση με τη γωνία ΒΧΓ.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι η γωνία ΥΦΓ είναι ίση με τη γωνία ΒΧΓ. Άρα οι τρεις γωνίες ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ είναι μεταξύ τους ίσες. Εάν σε ισόπλευρο πεντάγωνο οι τρεις γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, το πεντάγωνο είναι ισογώνιο (πρόταση 7). Άρα το πεντάγωνο ΒΥΦΓΧ είναι ισογώνιο. Επομένως το πεντάγωνο ΒΥΦΓΧ είναι κανονικό (και "πάνω" από την πλευρά ΒΓ του κύβου).

Εάν με κάθε μια από τις δώδεκα πλευρές του κύβου κατασκευάσουμε με τον ίδιο τρόπο πεντάγωνα, θα κατασκευασθεί στερεό σχήμα, το οποίο περιέχεται σε δώδεκα κανονικά πεντάγωνα, και το οποίο καλείται *δωδεκάεδρο*.

Βήμα 3ο

Εγγραφή σε σφαίρα

Προεκτείνουμε την ευθεία ΨΟ και έστω Ω το σημείο τομής με τη διαγώνιο του κύβου.

Το σημείο Ω είναι το κέντρο της σφαίρας που περιλαμβάνει τον κύβο και το τμήμα ΩΟ είναι το μισό της πλευράς του κύβου. Επειδή το τμήμα ΝΣ διαιρείται στο Ο σε άκρο και μέσο λόγο και μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΝΟ, έχουμε: $ΝΣ^2 + ΣΟ^2 = 3\ ΝΟ^2$ (πρόταση 4)

Επιπλέον ΝΣ = ΨΩ, ΝΩ = ΟΩ, ΨΟ = ΟΣ και ΟΣ = ΨΥ.

Άρα $ΩΨ^2 + ΨΥ^2 = 3\ ΝΟ^2$.

Επειδή $ΩΨ^2 + ΨΥ^2 = ΩΥ^2$ (πρόταση Ι. 47) έπεται $ΥΩ^2 = 3\ ΝΟ^2$.

Επίσης, το τετράγωνο της ακτίνας της σφαίρας που περιλαμβάνει τον κύβο, είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο του μισού της πλευράς του κύβου (πρόταση 15).

Και επειδή το τμήμα ΝΟ είναι το μισό της πλευράς του κύβου, το τμήμα ΥΩ είναι ίσο με την ακτίνα της σφαίρας που περιλαμβάνει τον κύβο. Άρα το σημείο Υ ανήκει στην επιφάνεια της σφαίρας.

Βήμα 4^{ο}

Η πλευρά του δωδεκαέδρου είναι άρρητη, αυτή που ονομάζεται και αποτομή.

Επειδή το τμήμα ΝΟ έχει διαιρεθεί στο σημείο Ρ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΡΟ και επειδή το τμήμα ΟΞ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο στο σημείο Σ με μεγαλύτερο τμήμα το ΟΣ, αν το τμήμα ΝΞ διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το τμήμα ΡΣ θα είναι το μεγαλύτερο.

Ισχύει $\frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{NP}}$, άρα $\frac{2\mathrm{NN}}{2\mathrm{PP}} = \frac{2\mathrm{PP}}{2\mathrm{NN}}$, οπότε $\frac{\mathrm{N\Xi}}{\mathrm{P\Sigma}} = \frac{\mathrm{P\Sigma}}{\mathrm{PN} + \Sigma\Xi}$ (διαίρεση της πλευράς του κύβου σε άκρο και μέσο λόγο πρόταση V.15). Επομένως $\mathrm{N\Xi} > \mathrm{P\Sigma}$, άρα $\mathrm{P\Sigma} > \mathrm{PN} + \Sigma\Xi$.

Άρα το τμήμα ΝΞ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΡΣ. Επίσης ΡΣ = ΥΦ. Επομένως, αν το τμήμα ΝΞ διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης είναι το ΥΦ. Και επειδή η διάμετρος της σφαίρας είναι ρητή και το τετράγωνό της είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου, έπεται ότι και η πλευρά του κύβου είναι ρητή.

Εάν όμως ένα ρητό τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε καθένα από τα τμήματα της διαίρεσης είναι άρρητο και λέγεται *αποτομή*.

Άρα η πλευρά ΥΦ του δωδεκαέδρου είναι άρρητος αποτομή.

ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα

Όταν η πλευρά του κύβου διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, το μεγαλύτερο τμήμα της διαίρεσης είναι η πλευρά του δωδεκαέδρου.

Παρατήρηση

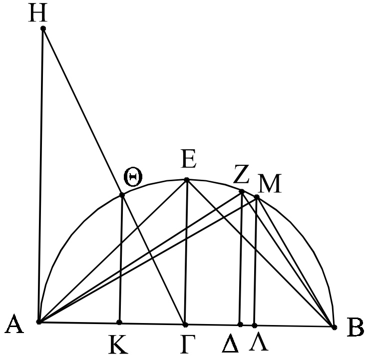
Αν ℓ η ακμή του κύβου και r η ακτίνα της σφαίρας, τότε η πλευρά α του δωδεκαέδρου που κατασκευάσθηκε είναι:

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\ell \quad \text{άρα} \quad \alpha = \frac{r}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{5} - \ell\right) = \frac{r}{3}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)$$

9. Σύγκριση των πλευρών των κανονικών στερεών. Συμπέρασμα

Πρόταση 18 (XIII. 18)

Να εκτεθούν οι πλευρές των πέντε στερεών σχημάτων που κατασκευάσθηκαν και να συγκριθούν μεταξύ τους.



Σχήμα 18

Απόδειξη

Έστω ΑΒ η διάμετρος της δοσμένης σφαίρας και Γ, Δ σημεία της τέτοια, ώστε ΑΓ = ΓΒ και ΑΔ = 2ΔΒ.

Με διάμετρο ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο και στα σημεία Γ, Δ φέρουμε κάθετες στην ΑΒ οι οποίες τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα.

Επειδή ΑΔ = 2ΔΒ, έχουμε ΑΒ = 3ΔΒ. Άρα δι’ αντιστροφής, ΒΑ = $=\frac{3}{2}$ ΑΔ. Επίσης $\frac{ΒΑ}{ΑΔ} = \frac{ΒΑ^2}{ΑΖ^2}$, διότι το τρίγωνο ΑΖΒ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΑΖΔ (πρόταση VI. 8).

Άρα $ΑΒ^2 = \frac{3}{2}ΑΖ^2$. Όμως, το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τα τρία δεύτερα του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας (πρόταση 13), άρα το τμήμα ΑΖ ισούται με την πλευρά της πυραμίδας.

Επίσης, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΖ, ΒΖΔ έχουμε:

$$\frac{ΑΒ}{ΒΔ} = \frac{ΑΒ^2}{ΒΖ^2}, \text{ άρα } ΑΒ^2 = 3ΒΖ^2.$$

Όμως, το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου (πρόταση 15). Άρα το τμήμα ΒΖ είναι η πλευρά του κύβου.

Επίσης, επειδή ΑΓ = ΓΒ, έχουμε $ΑΒ^2 = 2ΒΕ^2$. Και το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου (πρόταση 14). Άρα το τμήμα ΒΕ είναι η πλευρά του οκταέδρου.

Στο σημείο Α φέρουμε κάθετη στην ΑΒ και παίρνουμε τμήμα ΑΗ ίσο με ΑΒ. Φέρουμε την ΗΓ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Θ και από το Θ φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΒ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Κ.

Επειδή ΑΗ = 2ΑΓ και $\frac{ΑΗ}{ΑΓ} = \frac{ΘΚ}{ΚΓ}$ έχουμε ΚΘ = 2ΚΓ.

Άρα $ΚΘ^2 = 4ΚΓ^2$ και επειδή $ΓΘ^2 = ΚΘ^2 + ΚΓ^2$, έχουμε $ΓΘ^2 = 5ΚΓ^2$, άρα $ΒΓ^2 = 5ΓΚ^2$.

Επειδή ΑΒ = 2ΓΒ και ΑΔ = 2ΔΒ έχουμε ΔΒ = 2ΓΔ, άρα ΒΓ = 3ΓΔ, και $ΒΓ^2 = 9ΓΔ^2$. Κατά συνέπεια $ΓΚ^2 > ΓΔ^2$, επομένως έχουμε ΓΚ > ΓΔ.

Παίρνουμε τμήμα ΓΛ ίσο προς το ΓΚ και στο σημείο Λ φέρουμε κάθετη στην ΑΒ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Μ.

Επειδή $ΒΓ^2 = 5ΚΓ^2$, ΑΒ = 2ΒΓ και ΚΛ = 2ΚΓ έχουμε $ΑΒ^2 = 5ΚΛ^2$. Όμως, το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι πενταπλάσιο του τετραγώνου της ακτίνας του κύκλου από τον οποίο κατασκευάσθηκε το εικοσάεδρο (πρόταση 16), άρα το ΚΛ είναι η ακτίνα του κύκλου από τον οποίο κατασκευάσθηκε το εικοσάεδρο. Έτσι, το ΚΛ ισούται με την πλευρά του κανονικού εξαγώνου, το οποίο εγγράφεται στον κύκλο που προαναφέραμε (πρόταση IV.15). Και επειδή η διάμετρος της σφαίρας αποτελείται από μια πλευρά κανονικού εξαγώνου και δύο πλευρές κανονικού δεκαγώνου οι οποίες εγγράφονται στον κύκλο που προαναφέραμε (πρόταση 16) και επειδή το ΑΒ είναι η διάμετρος της σφαίρας, ΚΛ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου και ΑΚ = ΛΒ, συμπεραίνουμε ότι τα τμήματα ΑΚ, ΛΒ είναι ίσα με την πλευρά του κανονικού δεκαγώνου. Ισχύει επίσης ΜΛ = ΘΚ, διότι απέχουν το ίδιο από το κέντρο, άρα ΜΛ = ΚΛ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΛΒ έχουμε $ΜΒ^2 = ΜΛ^2 + ΛΒ^2$, επομένως το ΜΒ ισούται με την πλευρά του κανονικού πενταγώνου (πρόταση 10). Η πλευρά όμως του πενταγώνου είναι πλευρά του εικοσαέδρου (πρόταση 16), άρα το τμήμα ΜΒ είναι η πλευρά του εικοσαέδρου.

Τέμνουμε το τμήμα ΒΖ, το οποίο είναι η πλευρά του κύβου, σε άκρο και μέσο λόγο στο σημείο Ν με μεγαλύτερο τμήμα το ΝΒ. Άρα το τμήμα ΝΒ είναι η πλευρά του δωδεκαέδρου (πρόταση 17, πόρισμα).

Έχει όμως αποδειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τα τρία δεύτερα του τετραγώνου της πλευράς ΑΖ της πυραμίδας, διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς ΒΕ του οκταέδρου και τριπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς ΖΒ του κύβου. Αν το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσο με έξι τετράγωνα, τότε το τετράγωνο της πλευράς της πυραμίδας είναι ίσο με τέσσερα τέτοια τετράγωνα, το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου είναι ίσο με τρία τέτοια τετράγωνα και το τετράγωνο της πλευράς του κύβου είναι ίσο με δύο τέτοια τετράγωνα.

Επομένως το τετράγωνο της πλευράς της πυραμίδας είναι τα τέσσερα τρίτα του τετραγώνου της πλευράς του οκταέδρου και επίσης διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου. Το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου είναι τα τρία δεύτερα του τετραγώνου της πλευράς του κύβου.

Οι πλευρές των τριών σχημάτων τις οποίες προαναφέραμε, δηλαδή της πυραμίδας, του οκταέδρου και του κύβου βρίσκονται η μία προς την άλλη σε ρητό λόγο, είναι δηλαδή μεταξύ τους ρητές.

Οι υπόλοιπες δύο, δηλαδή οι πλευρές του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου, δεν είναι ούτε μεταξύ τους ρητές ούτε ρητές προς τις προηγούμενες πλευρές, αφού είναι άρρητες, η μια ως *ελάσσων* (πρόταση 16) και η άλλη ως *αποτομή* (πρόταση 17).

Η πλευρά ΜΒ του εικοσαέδρου είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ΝΒ του δωδεκαέδρου. Πράγματι, επειδή το τρίγωνο ΖΔΒ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΖΑΒ, ισχύει η αναλογία $\frac{\Delta B}{BZ} = \frac{BZ}{AB}$, από την οποία προκύπτει ότι $\frac{\Delta B}{AB} = \frac{\Delta B^2}{BZ^2}$. Επομένως θα ισχύει $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{BZ^2}{\Delta B^2}$.

Ισχύει επίσης η σχέση $AB = 3\Delta B$, άρα $BZ^2 = 3B\Delta^2$.

Επίσης έχουμε $A\Delta^2 = 4B\Delta^2$.

Άρα $A\Delta^2 > BZ^2$ και $A\Delta > BZ$. Επειδή το σημείο Κ διαιρεί το ΑΛ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΚΛ (πρόταση 9) και επίσης το Ν διαιρεί το ΒΖ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΝΒ, έχουμε $K\Lambda > NB$. Επίσης $K\Lambda = \Lambda M$, άρα $\Lambda M > NB$ και κατά μείζονα λόγο $MB > NB$.

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση

Έστω r η ακτίνα της σφαίρας. Τότε οι πλευρές των πέντε στερεών που κατασκευάστηκαν δίνονται, ως συνάρτηση της ακτίνας r, από τους τύπους:

πλευρά τετραέδρου $\alpha_4 = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot r$

πλευρά οκταέδρου $\alpha_8 = \sqrt{2} \cdot r$

πλευρά κύβου $\alpha_6 = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$

πλευρά εικοσαέδρου $\alpha_{20} = \frac{r}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$

πλευρά δωδεκαέδρου $\alpha_{12} = \frac{r}{3}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$

Επίσης αποδείχθηκε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$4r^2 = \frac{3}{2}\alpha_4^2 = 2\alpha_8^2 = 3\alpha_6^2 .$$

Τα τμήματα 2r, α_4, α_6, α_8 είναι ρητά με την έννοια του Ευκλείδη (βλέπε σχόλιο μετά την πρόταση 6), ενώ τα τμήματα α_{20} , α_{12} είναι άρρητα.

Εξάλλου, όπως αποδείχθηκε και εύκολα διαπιστώνεται και από τον πιο πάνω κατάλογο, ισχύει η σχέση: $\alpha_6 < \alpha_8 < \alpha_4$.

Η σχέση $\alpha_{20} > \alpha_{12}$ μπορεί να αποδειχθεί αλγεβρικά ως εξής:

$$\alpha_{20} > \alpha_{12} \Leftrightarrow \frac{r^2}{25}10\left(5-\sqrt{5}\right) > \frac{r^2}{9}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\left(5-\sqrt{5}\right) > \frac{1}{9}\left(15+3-2\cdot 3\sqrt{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{2\sqrt{5}}{5} > 2-\frac{2}{3}\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5} < \frac{2\sqrt{5}}{3}, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι $\alpha_6 > \alpha_{20}$:

$$\alpha_{20} < \alpha_6 \Leftrightarrow \alpha_{20}^2 < \alpha_6^2 \Leftrightarrow \frac{r^2}{25}\cdot 10\left(5-\sqrt{5}\right) < \frac{4}{9}\cdot 3\cdot r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\left(5-\sqrt{5}\right) < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(5-\sqrt{5}\right) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{3} < \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{5}, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Επομένως έχουμε:

$$\alpha_{12} < \alpha_{20} < \alpha_6 < \alpha_8 < \alpha_4 .$$

Σχόλιο

Στο βιβλίο XIII, στην έκδοση του Heiberg, μετά την πρόταση 18 σύρεται μια γραμμή και προστίθεται ένα κείμενο, το οποίο αρχίζει ως εξής:

Λέγω δή, ὅτι παρά τά εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχήμα περιεχόμενον ὑπό ἰσοπλεύρων τε και ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Από πολλούς σχολιαστές το κείμενο αυτό εκλαμβάνονται ως συμπέρασμα του βιβλίου XIII. Σε σύγχρονη απόδοση το κείμενο αυτό και όσα το ακολουθούν έχουν ως εξής:

Λέγω επίσης ότι κανένα άλλο σχήμα εκτός των πέντε προαναφερθέντων δεν κατασκευάζεται, το οποίο να περιέχεται υπό ισοπλεύρων και ισογωνίων σχημάτων ίσων μεταξύ τους.

Απόδειξη

Διότι μια στερεά γωνία δεν μπορεί να κατασκευαστεί από δύο τρίγωνα ή επίπεδα εν γένει.

Με τρία τρίγωνα κατασκευάζεται η στερεά γωνία της πυραμίδας, με τέσσερα του οκταέδρου και με πέντε του εικοσαέδρου.

Με έξι τρίγωνα ισόπλευρα και ισογώνια που συνέρχονται στο ίδιο σημείο δεν υπάρχει στερεά γωνία. Διότι, επειδή η γωνία του ισόπλευρου τριγώνου είναι δύο τρίτα της ορθής, θα είναι και οι έξι ίσες με (:θα έχουν άθροισμα) τέσσερις ορθές, το οποίο είναι αδύνατο, διότι κάθε στερεά γωνία περιέχεται σε γωνίες με άθροισμα μικρότερο των τεσσάρων ορθών (πρόταση XI.21).

Για τον ίδιο λόγο, ούτε από περισσότερα των έξι επιπέδων είναι δυνατόν να κατασκευασθεί στερεά γωνία.

Από τρία τετράγωνα σχηματίζεται η γωνία του κύβου, ενώ από τέσσερα είναι αδύνατο να σχηματιστεί στερεά γωνία.

Από τρία πεντάγωνα κανονικά (ισογώνια και ισόπλευρα), σχηματίζεται η γωνία του δωδεκαέδρου, αλλά από τέσσερα είναι αδύνατο. Διότι, επειδή η γωνία του ισόπλευρου πενταγώνου (κανονικού) είναι μια και ένα πέμπτο της ορθής, θα είναι οι τέσσερις γωνίες μεγαλύτερες των τεσσάρων ορθών, το οποίο είναι αδύνατο.

Όμως, για τον ίδιο λόγο, ούτε από άλλα πολύγωνα σχήματα είναι δυνατόν να σχηματιστεί στερεά γωνία.

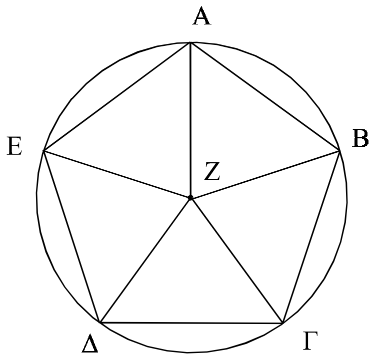
Δεν κατασκευάζεται επομένως άλλο στερεό σχήμα περιεχόμενο από ισόπλευρα και ισογώνια σχήματα, εκτός από τα πέντε που αναφέραμε πιο πάνω.

Λήμμα

Η γωνία του ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου είναι μία ορθή και ένα πέμπτο της ορθής γωνίας.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔΕ ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο και ας περιγραφεί σε αυτό κύκλος με κέντρο Ζ. Τότε οι ευθείες ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ, ΔΖ και ΕΖ διχοτομούν τις γωνίες του.



Σχήμα 19

Επειδή οι γωνίες με κορυφή το Ζ είναι ίσες και έχουν άθροισμα τέσσερις ορθές, η καθεμία από αυτές, άρα και η γωνία $\hat{AZB}$, είναι ίση με μία ορθή μείον ένα πέμπτο της ορθής. Άρα στο τρίγωνο ΑΖΒ οι γωνίες $\hat{ZAB}$ και $\hat{ABZ}$ έχουν άθροισμα μία ορθή και ένα πέμπτο της ορθής. Επομένως $\hat{AB\Gamma}$, που είναι η γωνία του πενταγώνου, είναι μία ορθή και ένα πέμπτο της ορθής.

Παρατήρηση

Η παραπάνω πρόταση για τη μοναδικότητα, με τον τρόπο που έχει διατυπωθεί, ότι δηλαδή εκτός των πέντε προαναφερθέντων στερεών σχημάτων (πολυέδρων) δεν υπάρχουν και άλλα που να περικλείονται μεταξύ ισόπλευρων και ισογώνιων σχημάτων, έχει προκαλέσει πολλά σχόλια και συζητήσεις όσον αφορά στην ορθότητα της διατύπωσης. Για παράδειγμα, ένα εξάεδρο που αποτελείται από δύο κανονικές (τριγωνικές) πυραμίδες ΑΒΓΔ, ΑΝΓΕ με κοινή βάση ΑΒΓ και κορυφές που κείνται εκατέρωθεν της βάσης δίνει ένα σχήμα που ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις της διατύπωσης του συμπεράσματος και όμως διαφέρει εμφανώς από τα πέντε στερεά τα οποία εκθέσαμε.

Θα παρατηρήσουμε ότι στην αρχή του βιβλίου XI ορίζονται τα πέντε συγκεκριμένα κανονικά στερεά, δηλαδή το τετράεδρο, το εξάεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, αλλά δεν δίνεται πουθενά γενικός ορισμός ενός "κανονικού πολυέδρου". Από τη διατύπωση της πρότασης συνάγεται ότι η "κανονικότητα" συνδέεται με τις εξής δύο συνθήκες:

α) Οι έδρες είναι κανονικά πολύγωνα.

β) Οι έδρες είναι μεταξύ τους ίσες.

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι το εξής: Ποια επιπλέον συνθήκη πρέπει να προστεθεί, ώστε τα πέντε προαναφερθέντα σχήματα να είναι τα μοναδικά που ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές;

Στις προτάσεις που προηγήθηκαν του Συμπεράσματος, αποδείχθηκε ότι καθένα από τα παραπάνω πέντε σχήματα εγγράφεται σε σφαίρα. Στον Πλάτωνα επίσης αναφέρεται ότι το τετράεδρο είναι το απλούστερο στερεό, το οποίο χωρίζει την επιφάνεια της σφαίρας σε ίσα και όμοια σχήματα.

Η συνθήκη αυτή της εγγραφής σε σφαίρα είναι πράγματι η ζητούμενη, δηλαδή τα πολύεδρα με έδρες, μεταξύ τους ίσα, κανονικά πολύγωνα τα οποία εγγράφονται σε σφαίρα είναι ακριβώς τα πέντε προαναφερθέντα.

Η συνθήκη αυτή μπορεί να αντικατασταθεί με αρκετές ισοδύναμες διατυπώσεις, μερικές από τις οποίες περιγράφονται στο επόμενο.

Θεώρημα (Cromwell (1977), σελ. 77).

Έστω P κυρτό πολύεδρο, οι έδρες του οποίου είναι ίσα μεταξύ τους κανονικά πολύγωνα. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. ***Το P είναι εγγράψιμο σε σφαίρα.***
2. ***Όλες οι δίεδρες γωνίες του P είναι μεταξύ τους ίσες.***
3. ***Όλες οι στερεές γωνίες του P είναι μεταξύ τους ίσες (:συμπτώσιμες).***
4. ***Όλες οι κορυφές περιβάλλονται από τον ίδιο αριθμό εδρών.***

10. Γενικά Σχόλια

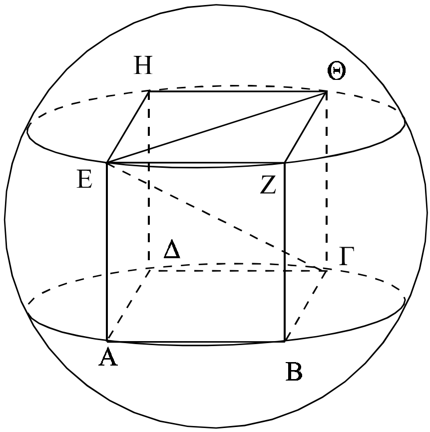
10.1 Κατασκευές με χρήση Ανάλυσης και Σύνθεσης

Παρατηρούμε ότι, αν και σε όλες τις περιπτώσεις της κατασκευής των κανονικών στερεών η κατασκευή που γίνεται ισοδυναμεί με εγγραφή του στερεού σε μια δοσμένη σφαίρα, ο Ευκλείδης δεν κατασκευάζει απευθείας το στερεό μέσα στη σφαίρα, αλλά κατασκευάζει ένα στερεό στο οποίο περιγράφεται μία σφαίρα ίση με τη δοσμένη.

Ο Πάππος διαπραγματευόμενος τα ίδια προβλήματα κατασκευάζει τα αντίστοιχα στερεά με τη ***μέθοδο της ανάλυσης*** και της ***σύνθεσης***, μεθόδους τις οποίες είχε μελετήσει και αναπτύξει ιδιαίτερα. Οι λύσεις του παρουσιάζουν ενδιαφέρον, αν και απαιτούν κάποιες ιδιότητες της σφαίρας, οι οποίες δε βρίσκονται στα *Στοιχεία*. Για λόγους πληρότητας, στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο από τις κατασκευές αυτές.

10.1.1 Κατασκευή του κύβου κατά τον Πάππο

Ανάλυση. Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ότι οι κορυφές του κύβου είναι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ (Σχ. 20). Τα επίπεδα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ τέμνουν τη σφαίρα κατά δύο παράλληλους κύκλους, οι οποίοι είναι ίσοι, διότι τα εγγεγραμμένα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΘΗ είναι ίσα. Φέρουμε το τμήμα ΕΓ, το οποίο είναι διάμετρος της σφαίρας.



Σχήμα 20

Έχουμε $ΕΘ^2 = 2ΕΗ^2 = 2ΘΓ^2$ και επειδή $\hat{ΕΘΓ} = 90^o$, έχουμε $ΕΓ^2 = ΕΘ^2 + ΘΓ^2$ άρα $ΕΓ^2 = \frac{3}{2}ΕΘ^2$. Αλλά το $ΕΓ^2$ είναι δοσμένο, άρα και το $ΕΘ^2$ είναι δοσμένο, επομένως και οι κύκλοι ΕΖΘΗ, ΑΒΓΔ, καθώς και τα εγγεγραμμένα τετράγωνα είναι δοσμένα.

Σύνθεση. Φέρουμε δύο παράλληλες κυκλικές τομές με ίσες διαμέτρους $δ_1$ έτσι ώστε:

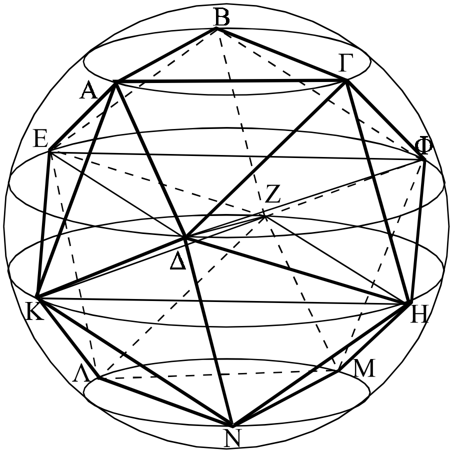
$$δ^2 = \frac{3}{2}δ_1^2 \text{ , όπου } δ \text{ η διάμετρος της δοσμένης σφαίρας.}$$

Σε έναν από τους δύο κύκλους εγγράφουμε ένα τετράγωνο, ας πούμε το ΑΒΓΔ.

Στον άλλο κύκλο γράφουμε χορδή ΖΘ ίση και παράλληλη προς τη ΒΓ και στη συνέχεια εγγράφουμε το τετράγωνο ΕΖΘΗ. Οι οκτώ κορυφές του ζητούμενου κύκλου έχουν ορισθεί.

10.1.2 Κατασκευή του εικοσαέδρου κατά τον Πάππο

Η λύση του Πάππου διαφέρει σημαντικά από αυτήν του Ευκλείδη. Ενώ ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί δύο κυκλικές τομές της σφαίρας, ο Πάππος βρίσκει τέσσερις παράλληλες κυκλικές τομές, καθεμία από τις οποίες διέρχεται από τρεις κορυφές του εικοσαέδρου. Δύο από τους κύκλους είναι μικροί κύκλοι, περιγεγραμμένοι σε δύο αντίθετες τριγωνικές έδρες και οι άλλοι δύο κύκλοι βρίσκονται μεταξύ αυτών, είναι παράλληλοι προς αυτούς και ίσοι μεταξύ τους.



Σχήμα 21

Ανάλυση. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και Α, Β, Γ, Δ, Ε, Φ, Ζ, Η Κ, Λ, Μ, Ν κορυφές του εικοσαέδρου (Σχ. 21). Επειδή τα τμήματα ΒΑ, ΒΓ, ΒΦ, ΒΖ, ΒΕ είναι εγγεγραμμένα στη σφαίρα και ίσα μεταξύ τους, τα σημεία Α, Γ, Φ, Ζ, Ε είναι συνεπίπεδα.

Επίσης ΑΓ = ΓΦ = ΦΖ = ΖΕ = ΕΑ, άρα το πεντάγωνο ΑΓΦΖΕ είναι κανονικό. Ομοίως τα πεντάγωνα ΚΕΒΓΔ, ΔΗΜΖΒ είναι κανονικά.

Φέρουμε ΕΦ, ΚΗ. Τότε ΑΓ // ΕΦ (από το πεντάγωνο ΑΓΕΖΕ) και ΑΓ // ΚΜ (από το πεντάγωνο ΑΚΝΗΖ), άρα ΕΦ // ΚΗ.

Επιπλέον, ΚΗ // ΛΜ (από το πεντάγωνο ΛΚΔΗΜ).

Ομοίως ΒΓ, ΕΔ, ΖΗ, ΛΝ είναι παράλληλα μεταξύ τους και τα ΒΑ, ΦΔ, ΖΚ, ΜΝ είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Αφού ΒΓ =// ΛΝ και ΒΑ =// ΜΝ οι κύκλοι ΑΒΓ, ΛΜΝ είναι ίσοι και παράλληλοι. Ομοίως οι κύκλοι ΔΕΦ, ΚΖΗ είναι ίσοι και παράλληλοι.

Στους ίσους και παράλληλους κύκλους ΔΕΦ, ΚΖΗ οι χορδές ΕΦ, ΚΗ είναι ίσες και παράλληλες. Άρα ΦΚ είναι διάμετρος της σφαίρας και η γωνία ΦΕΚ είναι ορθή.

Στο πεντάγωνο ΖΕΑΓΦ, αν η ΕΦ διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, το μεγαλύτερο τμήμα είναι ίσο με ΑΖ. Άρα $\dfrac{ΕΦ}{ΑΓ} = \dfrac{\lambda_6}{\lambda_{10}}$. Επίσης $ΕΦ^2 +$ $+ΑΓ^2 = ΕΦ^2 + ΕΚ^2 = \delta^2$, όπου δ η διάμετρος της σφαίρας.

Έτσι ΦΚ, ΕΦ, ΕΓ είναι όπως οι πλευρές κανονικού πενταγώνου, εξαγώνου και δεκαγώνου που εγγράφονται στον ίδιο κύκλο.

Αλλά η διάμετρος ΦΚ της σφαίρας είναι δοσμένη, άρα ΕΦ, ΕΓ είναι δοσμένα. Έτσι οι ακτίνες των κύκλων ΕΦΔ, ΑΓΒ είναι δοσμένες (αν ρ, ρ΄ είναι ακτίνες τους, τότε $\rho^2 = \dfrac{1}{3}ΕΦ^2$, $(\rho')^2 = \dfrac{1}{3}ΑΖ^2$).

Επομένως οι κύκλοι είναι δοσμένοι και το ίδιο ισχύει και για τους κύκλους ΚΗΖ, ΛΜΝ, οι οποίοι είναι παράλληλοι προς αυτούς.

Σύνθεση. Αν δ η διάμετρος της σφαίρας, φέρουμε τα τμήματα x, y τέτοια ώστε δ, x, y να είναι ανάλογα προς τις πλευρές κανονικού πενταγώνου, εξαγώνου και δεκαγώνου αντίστοιχα που εγγράφονται στον ίδιο κύκλο.

Φέρουμε

(Ι) δύο ίσες και παράλληλες κυκλικές τομές στη σφαίρα με ακτίνες ρ, ώστε $\rho^2 = \dfrac{1}{3}x^2$, τις ΔΕΦ, ΚΖΗ και

(ΙΙ) δύο ίσες και παράλληλες κυκλικές τομές, τις ΑΒΓ, ΛΜΝ, με ακτίνες ρ΄ ώστε $(\rho')^2 = \dfrac{1}{3}y^2$.

Στους κύκλους (Ι) φέρουμε ΕΦ, ΚΗ ως πλευρές εγγεγραμμένων ισόπλευρων τριγώνων παράλληλων μεταξύ τους και στους κύκλους (ΙΙ).

Φέρουμε ΑΓ, ΛΜ ως πλευρές εγγεγραμμένων ισόπλευρων τριγώνων παράλληλες προς τις ΕΦ, ΚΗ. Συμπληρώνουμε το σχήμα. Η ορθότητα της κατασκευής αποδεικνύεται όπως στην ανάλυση. Επίσης έπεται (λέει ο Πάππος) ότι

$$(\text{διάμετρος της σφαίρας})^2 = 3(\text{πλευρά πενταγώνου στον κύκλο ΔΕΦ})^2.$$

Διότι από κατασκευή, $\dfrac{ΚΦ}{ΦΕ} = \dfrac{\lambda_5}{\lambda_6}$. Επίσης ισχύει $\dfrac{ΚΦ}{\lambda_6} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$, άρα $\dfrac{ΚΦ}{\lambda_5} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$. Επομένως $ΚΦ^2 = 3\lambda_5^2$.

10.2 Πολύεδρα, κανονικά στερεά και συμμετρία

10.2.1 Τι είναι πολύεδρο.

Στα *Στοιχεία*, στην αρχή του βιβλίου XI, αναφέρονται ονομαστικά μόνο πέντε στερεά σχήματα (πλην της σφαίρας, του κυλίνδρου και του κώνου). Για την ακρίβεια δε δίνεται ούτε ορισμός του πολυέδρου. Για τις ανάγκες του κειμένου που ακολουθεί θα δοθεί ένας περιγραφικός ορισμός του πολυέδρου σε σύγχρονη διατύπωση (Cromwell, (1997), σελ. 209).

Πολύεδρο είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους πολυγώνων τέτοιων ώστε:

1. Κάθε ζεύγος πολυγώνων συναντιέται μόνο κατά μία πλευρά ή κορυφή .
2. Κάθε πλευρά ενός πολυγώνου (αποτελεί μια ακμή του πολυέδρου) και ανήκει μόνον σε ένα ακόμα πολύγωνο.
3. Είναι δυνατόν να μεταβούμε από το εσωτερικό ενός πολυγώνου στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου, παραμένοντας στο πολύεδρο.
4. Έστω V μια κορυφή και $F_1, F_2 \dots F_n$ τα n στο πλήθος πολύγωνα που συναντώνται στη κορυφή V. Τότε, είναι δυνατόν να μεταβούμε από ένα πολύγωνο F_i σε ένα άλλο F_j χωρίς να περάσουμε από το V.

10.2.2 Τύπος του EULER.

Μια εναλλακτική απόδειξη της μοναδικότητας των πέντε κανονικών στερεών μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια του τύπου του Euler για τα πολύεδρα.

Θεώρημα (του Euler).

Σε κάθε κυρτό πολύεδρο, το πλήθος κ των κορυφών συν το πλήθος ε των εδρών ισούται με το πλήθος α των ακμών αυξημένο κατά δύο, δηλαδή ισχύει ο τύπος: $\kappa + \varepsilon = \alpha + 2$.

Αποδείξεις για τα κανονικά στερεά με χρήση του θεωρήματος Euler:

Έστω ότι οι έδρες ενός κανονικού πολύεδρου είναι κανονικά ν-γωνα και σε κάθε κορυφή συντρέχουν μ ακμές.

Τότε έχουμε:

$$\nu\varepsilon = 2\alpha \qquad (1)$$

διότι κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες και

$$\mu\kappa = 2\alpha \qquad (2)$$

διότι κάθε ακμή ανήκει σε δύο στερεές γωνίες.

Ο τύπος $\kappa + \varepsilon = \alpha + 2$ (του Euler) λόγω των (1), (2) γίνεται: $\frac{\nu\varepsilon}{\mu} + \varepsilon = \frac{\nu\varepsilon}{2} + 2$, από όπου προκύπτει ότι

$$\varepsilon = \frac{4\mu}{2\nu + 2\mu - \mu\nu}$$

Επιπλέον, ισχύει $\mu \geq 3$ και $2\nu + 2\mu - \mu\nu > 0$, άρα $\mu < \frac{2\nu}{\nu - 2}$

Αν $\nu = 3$, τότε $\mu < 6$, δηλαδή $\mu = 3$ ή $\mu = 4$ ή $\mu = 5$ και αντίστοιχα $\varepsilon = 4$ ή $\varepsilon = 8$ ή $\varepsilon = 20$

Δηλαδή, με έδρες ισόπλευρα τρίγωνα μπορεί να σχηματισθεί κανονικό τετράεδρο ή οκτάεδρο ή εικοσάεδρο

Αν $\nu = 4$, τότε $\mu < 4$, δηλαδή $\mu = 3$ και $\varepsilon = 6$. Άρα με έδρες τετράγωνα μπορεί να σχηματισθεί εξάεδρο (κύβος).

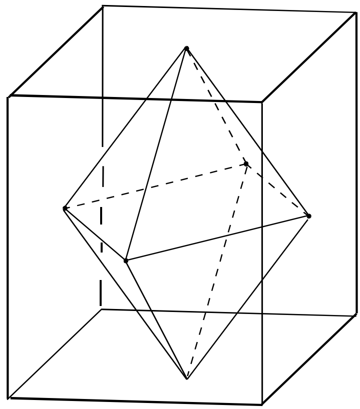
Αν $\nu = 5$, τότε $\mu < \frac{10}{3}$, δηλαδή $\mu = 3$ και $\varepsilon = 12$. Άρα με έδρες κανονικά πεντάγωνα μπορεί να σχηματισθεί μόνο δωδεκάεδρο.

Αν $\nu \geq 6$, τότε $\frac{2\nu}{\nu - 2} - 3 = \frac{6 - \nu}{\nu - 2} \leq 0$ άρα $\mu < 3$. Συνεπώς δεν υπάρχει κανονικό πολύεδρο με έδρες κανονικό ν-γωνο με $\nu \geq 6$.

Έτσι λοιπόν στα κανονικά στερεά έχουμε την ακόλουθη κατανομή για τις κορυφές, τις ακμές και τις έδρες.

	Κορυφές	**Ακμές**	**Έδρες**
Τετράεδρο	4	6	4
Κύβος	8	12	6
Οκτάεδρο	6	12	8
Δωδεκάεδρο	20	30	12
Εικοσάεδρο	12	30	20

Παρατηρούμε προφανώς κάποια ομαδοποίηση, ακόμα και σε αυτόν τον περιορισμένο κατάλογο. Έτσι έχουμε: τετράεδρο, κύβος – οκτάεδρο, εικοσάεδρο – δωδεκάεδρο.



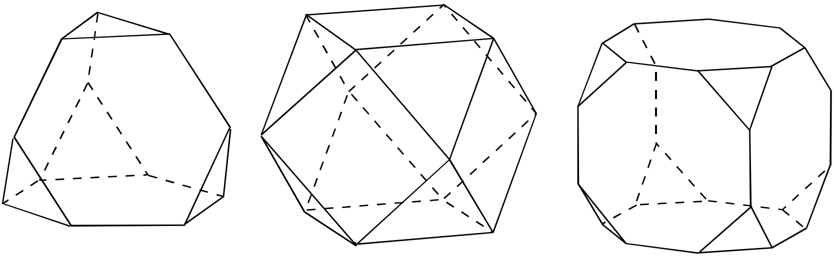
Σχήμα 22

Αυτό που υποκρύπτεται είναι ένας δυϊσμός, που γεωμετρικά μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: Κάθε ένα από τα στερεά ενός ζεύγους προκύπτει από το άλλο στερεό του ζεύγους, αν στην περιγεγραμμένη σφαίρα και στα σημεία των κορυφών φέρουμε τα εφαπτόμενα επίπεδα και θεωρήσουμε το στερεό που προκύπτει από τις τομές αυτών των επιπέδων. (Βλέπε σχ. 22, όπου παρουσιάζεται ο κύβος και το κανονικό οκτάεδρο). Με αυτή την έννοια το κανονικό τετράεδρο είναι αυτοδυϊκό.

10.2.3 Ημικανονικά Στερεά.

Στο πέμπτο βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής* ο Πάππος αποδίδει την ανακάλυψη δεκατριών πολυέδρων στον Αρχιμήδη. Στη συνέχεια περιγράφει τα δεκατρία σχήματα, τα ταξινομεί ανάλογα με τον αριθμό των εδρών και αναφέρει το είδος των εδρών κάθε στερεού. Τα στερεά αυτά σήμερα ονομάζονται Αρχιμήδεια ή ημικανονικά στερεά. Οι έδρες κάθε ημικανονικού στερεού είναι κανονικά πολύγωνα, αλλά όχι του ιδίου τύπου, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει στα κανονικά στερεά. Θα παρατηρήσουμε επίσης ότι και τα ημικανονικά στερεά εγγράφονται σε σφαίρα, όπως ακριβώς συμβαίνει με τα κανονικά στερεά. Κάποια στοιχεία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, όπου περιγράφεται ο τύπος και το πλήθος των εδρών του κάθε στερεού. Η εργασία του Αρχιμήδη που διαπραγματεύεται τα ημικανονικά στερεά φαίνεται να έχει, δυστυχώς, χαθεί.

Πλήθος των Εδρών	**Τριγώνων**	**Τετρα-γώνων**	**Πεντα-γώνων**	**Εξαγώ-νων**	**Οκτα-γώνων**	**Δεκαγώ-νων**
8	4			4		
14	8	6				
14		6		8		
14	8				6	
26	8	18				
26		12		8	6	
32	20		12			
32			12	20		
32	20					12
38	32	6				
62	20	30	12			
62		30		20		12
92	80		12			



κολοβό τετράεδρο κύβο-οκτάεδρο κολοβό εξάεδρο

Τρία από τα ημικανονικά στερεά με τις σημερινές ονομασίες τους.

Σχήμα 23

10.2.4 Η Συμμετρία στη Γεωμετρία.

Στις σύγχρονες παρουσιάσεις της Γεωμετρίας τα κανονικά πολύγωνα και πολύεδρα παίζουν ένα κεντρικό ρόλο και χρησιμοποιούνται ως υποδείγματα για την εισαγωγή των μετασχηματισμών και της συμμετρίας.

Ως μετασχηματισμοί νοούνται *αμφιμονοσήμαντες και επί* απεικονίσεις που αφήνουν ένα σχήμα αναλλοίωτο και προκύπτουν από περιορισμούς (στο σχήμα) αυτομορφισμών της δομής του περιβάλλοντος χώρου. Η συμμετρία του σχήματος σχετίζεται με το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών, που έχουν δομή ομάδας. Ειδικά για την Γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου, αποδεικνύεται ότι η βασική δομή που πρέπει να απαιτήσουμε να διατηρείται είναι η απόσταση δύο σημείων, οπότε αναγόμαστε σε ισομετρίες.

Βασικός για τη Γεωμετρία του επιπέδου είναι ο μετασχηματισμός που προκύπτει ως ανάκλαση ως προς άξονα (δηλαδή η εύρεση "συμμετρικού" ενός σημείου ως προς μία ευθεία), αφού μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ισομετρία στο επίπεδο είναι σύνθεση τριών το πολύ ανακλάσεων (εν γένει ως προς διαφορετικούς άξονες). Παρόμοια διαπραγμάτευση στο χώρο γίνεται για τις ανακλάσεις ως προς επίπεδο. Όμως, βασικό ρόλο εδώ παίζουν οι στροφές ως προς άξονα στο χώρο. Επιλέγοντας μια αρχή στο χώρο και εισάγοντας ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, η Γεωμετρία του επιπέδου εντάσσεται στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας του χώρου. Έτσι, βασικό ρόλο στη μελέτη των συμμετριών παίζει η ομάδα SO(3), η οποία αποτελείται από γραμμικές απεικονίσεις που διατηρούν τις αποστάσεις και τον προσανατολισμό.

Σ' αυτά τα πλαίσια θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των ομάδων συμμετριών των κανονικών πολυγώνων και πολυέδρων.

Ομάδα συμμετριών κανονικού πολυγώνου.

Έστω $m \geq 3$ και Γ_m το κανονικό m-γωνο με κέντρο O και κορυφές $\{v_1, v_2 \dots v_m\}$. Με L συμβολίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από την κορυφή v_1, διέρχεται από το κέντρο O και ξανασυναντά το Γ_m.

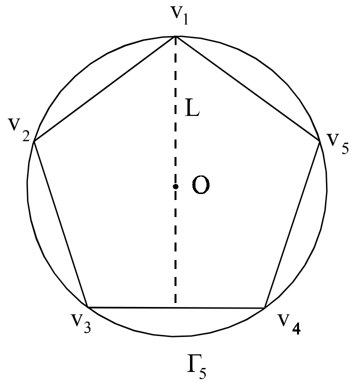
Το Γ_m έχει ορισμένες προφανείς συμμετρίες. Έστω A η στροφή γύρω από το O κατά γωνία $2\pi/m$ και B ο κατοπτρισμός (ανάκλαση) ως προς L. Τότε, αν με 1 συμβολίσουμε τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, έχουμε $A^m = B^2 = 1$ και $BAB^{-1}= A^{-1}$.

Έστω s κάποια συμμετρία του Γ_m. Τότε, αν $s(v_1) = v_i$ και $s(v_2) = v_j$ μπορεί να αποδειχθεί ότι θα πρέπει να ισχύει και $j \equiv (i \pm 1)$ modulo m. Τα i, j, λοιπόν ορίζουν το s. Έτσι, $s = A^i$ με $j \equiv (i \pm 1)$modulo m ή $s = A^i B$ με $j \equiv (i - 1)$ modulo m.

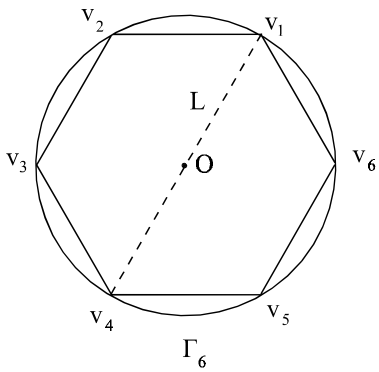
Με άλλα λόγια, η ομάδα συμμετριών του Γ_m δίνεται με σχέσεις γεννητόρων ως εξής:

$$D_m: \qquad A^m = B^2 = 1, BAB^{-1} = A^{-1}$$

Την D_m ονομάζουμε διεδρική ομάδα βαθμού m και είναι τάξεως 2m.



Σχήμα 24α



Σχήμα 24β

Μπορούμε να θεωρήσουμε το πολύγωνο Γ_m ως υποσύνολο του R^3 που περιέχεται στο επίπεδο xOy με την αρχή των αξόνων O στο σημείο $(0, 0, 0)$.

Τότε το A είναι στροφή γύρω από τον άξονα z΄z και το B είναι ειδική στροφή γύρω από το L. Έτσι η ομάδα D_m αποτελείται από γνήσιες (ορίζουσας 1) στροφές και $D_m \subset SO(3)$. Σημειώνουμε επίσης ότι έχουμε και την κυκλική ομάδα $Z_m = \{A\}$, τάξης m, υποομάδα της SO(3).

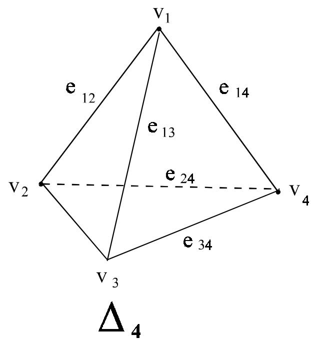
Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα ισομετριών στο επίπεδο είναι είτε κυκλική είτε διεδρική, δηλαδή ομάδα συμμετριών ενός κανονικού πολυγώνου.

Ομάδες συμμετριών των κανονικών στερεών

Με $\boldsymbol{\Delta_4}$ συμβολίζουμε το κανονικό τετράεδρο, κανονικό πολύεδρο με 4 κορυφές, 6 ακμές και 4 έδρες, οι οποίες είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Έστω $\{v_i\}$ οι κορυφές, e_{ij} η ακμή που συνδέει τις κορυφές v_i και v_j με $i < j$. Με P συμβολίζουμε τη στροφή κατά γωνία π γύρω από την ευθεία που ενώνει τα μέσα των e_{12} και e_{34}. Η P εναλλάσσει τα v_1 v_2 και τα v_3 ,

v_4. Με Q συμβολίζουμε τη στροφή κατά γωνία π γύρω από την ευθεία που συνδέει τα μέσα των e_{13} και e_{24}. Η Q εναλλάσσει τα v_1, v_3 και τα v_2, v_4. Επιπλέον PQ = QP και είναι η στροφή κατά γωνία π γύρω από την ευθεία που ενώνει τα μέσα των e_{14} και e_{23}.

Έστω A η στροφή κατά γωνία 2π/3 γύρω από την ευθεία που ενώνει την κορυφή v_1 και το κέντρο της απέναντι έδρας. Η A διατηρεί την v_1 και απεικονίζει τα v_2 , v_3, v_4 στα v_3, v_4, v_2 αντίστοιχα. Κάθε συμμετρία του $\mathbf{\Delta_4}$ προέρχεται από συνθέσεις των A, P, Q. Έτσι η ομάδα συμμετριών του $\mathbf{\Delta_4}$ δίνεται με σχέσεις γεννητόρων ως εξής:

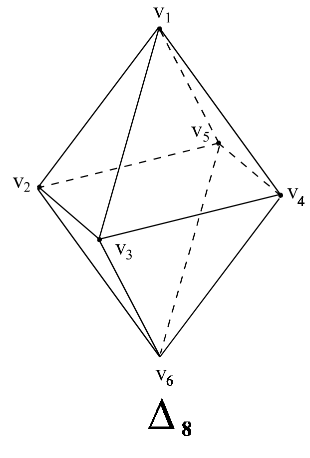


Σχήμα 25

$$\begin{aligned} T: A^3 &= P^2 = Q^2 = 1, \\ PQ &= Q\,P, \\ APA^{-1} &= Q, \\ AQA^{-1} &= PQ \end{aligned}$$

Η T ονομάζεται *τετραεδρική ομάδα*, έχει τάξη 12 και είναι υποομάδα της SO(3).

Με $\mathbf{\Delta_8}$ συμβολίζουμε το κανονικό οκτάεδρο, το οποίο έχει 6 κορυφές, 12 ακμές και 8 έδρες, που είναι ισόπλευρα τρίγωνα.

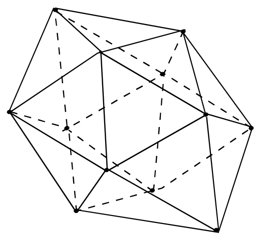


Σχήμα 26

Έστω X η στροφή κατά γωνία π/2 γύρω από την ευθεία που ενώνει τις v_1, v_6 και $P = X^2$. Έστω Q η στροφή κατά γωνία π γύρω από την ευθεία που ενώνει τα v_2 και v_4. Τότε PQ = QP και είναι η στροφή κατά γωνία π γύρω από την ευθεία που ενώνει τα v_3 και v_5 . Έστω A η στροφή κατά γωνία 2π/3 γύρω από τη ευθεία που ενώνει τα κέντρα των εδρών v_1 v_2 v_3 και v_4 v_5 v_6. Τότε $A^3 = 1$, $APA^{-1} = Q$ και $AQA^{-1} = PQ$. Η ομάδα συμμετρικών του $\mathbf{\Delta_8}$ παράγεται από το σύνολο {P, Q, A, X} και η X μπορεί να αντικατασταθεί από έναν άλλο γεννήτορα R, ώστε η ομάδα συμμετρίας να δίνεται από:

$$O \begin{cases} A^3 = P^2 = Q^2 = 1 \ , \ PQ = QP \ , \ RAR^{-1} = A^{-1} \\ APA^{-1} = Q \ , \ AQA^{-1} = PQ \ , \ RPR^{-1} = QP \ , \ RQR^{-1} = Q^{-1} \end{cases}$$

Η O καλείται *οκταεδρική ομάδα,* έχει τάξη 24, περιέχει την T = {A, P, Q} ως κανονική υποομάδα με δείκτη 2 και είναι υποομάδα της SO(3).



Δ_{20}

Σχήμα 27

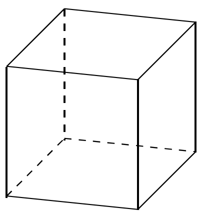
Με $\mathbf{\Delta_{20}}$ συμβολίζουμε το κανονικό εικοσάεδρο, το οποίο έχει 12 κορυφές, 30 ακμές και 20 έδρες που είναι ισόπλευρα τρίγωνα.

Η ομάδα συμμετρίας του $\mathbf{\Delta_{20}}$ δίνεται από

$$I : A^3 = B^2 = C^5 = ABC = 1$$

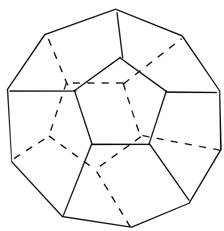
Η I ονομάζεται *εικοσαεδρική ομάδα*, έχει τάξη 60, περιέχει την T και είναι υποομάδα της SO(3).

Απομένουν δύο κανονικά πολύεδρα το εξάεδρο (κύβος) □$_6$ και το δωδεκάεδρο ⬠$_{12}$ Όμως ο κύβος □$_6$ και το οκτάδερο $\mathbf{\Delta_8}$ είναι δυϊκά (αν το ένα εγγραφεί σε σφαίρα, τότε το άλλο σχηματίζεται από τα εφαπτόμενα επίπεδα της σφαίρας στις κορυφές του), κατά συνέπεια έχουν τις ίδιες ομάδες συμμετρίας. Ομοίως ⬠$_{12}$ και Δ_{20} είναι δυϊκά και το $\mathbf{\Delta_4}$ είναι αυτοδυϊκό.



□$_6$

Σχήμα 28



⬠$_{12}$

Σχήμα 29

Όπως μπορεί να αποδειχθεί, κάθε πεπερασμένη υποομάδα του SO(3) είναι μια κυκλική, διεδρική, τετραεδρική ή εικοσαεδρική ομάδα. Αν δύο πεπερασμένες υποομάδες του SO(3) είναι ισόμορφες, τότε αυτές είναι συζυγείς στην SO(3).

Συνοπτικός βιβλιογραφικός οδηγός για τη Στερεομετρία

Εκτός από τη Γενική Βιβλιογραφία, που συμπληρώνει το έργο, ουσιαστική στην ανάγνωση της Στερεομετρίας είναι η Βιβλιογραφία που ακολουθεί. Στη συνέχεια, τα βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν, παρουσιάζονται σύντομα κατά θεματικές ενότητες και ειδικότερο ενδιαφέρον.

Κλασική παραμένει η έκδοση των *Στοιχείων* από τον Heiberg, που στα Ελληνικά έχει αποδοθεί από τον Ε. Σταμάτη (1952). Η αγγλική έκδοση των *Στοιχείων* από τον Sir Thomas L. Heath περιέχει πλούσια σχόλια ιστορικού και μαθηματικού ενδιαφέροντος και, παρά τα όποια κενά, παραμένει μέχρι σήμερα αξεπέραστη. Στοιχεία από την ιστορία των αρχαίων μαθηματικών περιέχονται στη μονογραφία του B. L. van der Waerden (1954), ήδη μεταφρασμένη στα Ελληνικά από τον Γ. Χριστιανίδη (2000).

Με τη λογική αιτιολόγηση σε αρχαία μαθηματικά κείμενα ασχολείται το βιβλίο του Netz (1999), ενώ η λογική αλληλουχία των προτάσεων στα *Στοιχεία* παρουσιάζεται διεξοδικά στο Mueller (1981). Κάποιες παρουσιάσεις θεμάτων με σύγχρονες προεκτάσεις επιχειρούνται στα Artmann (1999) και Anglin and Lambek (1995).

Μια πρωτότυπη έκθεση θεμάτων Στερεομετρίας, με ιστορικές αναδρομές, ενδιαφέρουσες θεωρητικές διαπραγματεύσεις επικεντρωμένες στα πολύεδρα και με έμφαση στα κανονικά στερεά είναι το Cromwell (1997).

Η μέτρηση στη Γεωμετρία και η μέτρηση των στερεών ειδικότερα, αποτελεί πάντα ένα επίκαιρο θέμα. Οι εργασίες του Αρχιμήδη οι σχετικές με τη μέτρηση των σχημάτων έχουν παρουσιασθεί σε μετάφραση και σχολιασμό του Sir Thomas L. Heath. Η συνθετική θεωρία, στο πνεύμα των *Στοιχείων*, για το εμβαδόν και τον όγκο τέθηκε από τον Hilbert (1902) και έκτοτε αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα των σύγχρονων παρουσιάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως είναι για παράδειγμα τα Eves (1972), Effimov (1968), Forder (1927), και Moise (1963).

Η *μέθοδος της εξάντλησης* με τις ιστορικές της ρίζες και τη σχέση της με τη μέτρηση και τις θεωρίες ολοκλήρωσης, παρουσιάζεται στη μονογραφία του Boyer (1949) καθώς και στο Edwards Jr. (1979). Αρκετά λεπτομερές στη παρουσίαση της εξέλιξης των γεωμετρικών μεθόδων είναι και το Coolidge (1940).

Η μαθηματική διαπραγμάτευση της γεωμετρικής συμμετρίας και η ένταξη των κανονικών στερεών στο πλαίσιο αυτό μπορεί να αναζητηθεί και στα Yale (1968), Rees (1983), Wolf (1963) και άλλα.

Βιβλιογραφία

1. Anglin W. S. and Lambek J., "*The Heritage of Thales*", Springer, 1995
2. Artmann B., "*Euclid – The Greation of Mathematics*", Springer, 1999.
3. Boyer C., "*The History of the Calualus and its Conceptual Developments*", Dover, 1949.
4. Coolidge J. L., "*A History of Geometrical Methods*", Oxford Univ. Press, 1940 (Dover reprint 1998).
5. Cromwell P.R., "*Polyhedra*", Cambridge Univ. Press, 1997.
6. Edwards C. H. Jr., "*The Historical Development of the Calculus*", Springer- Verlag, 1979.
7. Effimov N. V., "*Higher Geometry*", Mir Publishers, 1968.
8. Eves H., "*A Survey of Geometry*" (Revised Edition), Allyn and Bacon, 1972.
9. Forder H. G., "*The Foundations of Euclidean Geometry*", Cambridge Univ. Press, 1927 (Dover reprint).
10. Heath, T.L., "*The Thirteen Books of Euclids Elements*" (Second Edition), Dover reprint, 1956.
11. Heath T.L., "*The works of Archimedes*", Dover reprint (no date)
12. Heiberg T. L. (Editor) *Euclidis,* "*Elementa*", Lipsia, 1885.
13. Hilbert D., "*Foundations of Geometry*", 10th ed., La Salle-Open Court, 1971.
14. Moise E. E., "*Elementary Geometry from an Advanced Stand-point*", Addisson-Wesley, 1963.
15. Mueller I., "*Philosophy of Mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*", M.I.T., 1981.
16. Netz R., "*The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*", Cambridge Univ. Press, 1999.
17. Rees E. G., "*Notes on Geometry*", Springer 1983.
18. van der Waerden, B. L., *"Η Αφύπνιση της Επιστήμης"* (Απόδοση στα Ελληνικά – Επιστημονική επιμέλεια: Γιάννης Χριστιανίδης) Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000.
19. Wolf J., "*Spaces of Constant Curvature*", Mc Graw Hill, 1963.
20. Yale P. B., "*Geometry and Symmetry*", Holden – Day, 1968 (Dover reprint, 1988).
21. Σταμάτης Ε., *"Ευκλείδου Στερεομετρία"*, ΟΕΔΒ 1952.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Γ Ε Ν Ι Κ Η   Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. Aaboe A. "*Episodes from the Early History of Mathematics*", The Mathematical Association of America, Washington D.C. 1964.
2. Alexander of Aphrodisias. "*Commentary on Aristotle's Sophistici Elenchi*", Wallies, Berlin, p.76.23, 1898.
3. Allen R.E. (ed.) "*Studies in Plato's Metaphysics*", London 1965.
4. Allman G.J. "*Greek Geometry from Thales to Euclid*", Logmans, Green and Co, Dublin - London 1889.
5. Amir - Moez A. "*Discussion of Difficulties in Euclid*", Scripta mathematica p.p. 276 – 303,1959.
6. Andrews G. E. Berndt, B. C and Ranklin, R.A. (Ed.) "*Ramanujan Revisited*": Proceedings of the Centenary Conference, University of Ilinois at Urbana - Champaign, Boston, MA: Academic Press, 1988.
7. Annas J. "*Die gegenstände der Mathematik dei Aristotles*", Rhein Verlag Zürich 1950.
8. Apostle H. G. "*Aristotle's Philosophy of Mathematics*", Chicago 1965.
9. Apostol T. M. "*Introduction to analytic Number Theory*", Springer, New York 1976.
10. Archibald C.R., "*Euclid's Book on Divisions of Figures with a Restoration Based on Woepcke's Text and the Practica Geometriae of Leonardo Pisano*", Cambridge 1915.
11. Arrighi G. "*An Aderlardian version of Euclid*", Rend. Acad. Naz. Sci, 16, No 1, 1992.
12. Artmann B. "*Euclid, The Creation of Mathematics*", Springer, N. Y. 1999.
13. Artmann B. "*Uber Voreuklidishe Elemente*", Archive for History of Exact Sciences, vol. 33, p.p.291-306, 1985.
14. Artmann B. "*Ueber voreuklidische Elemente der Raumgeometrie' aus der Schule des Eudoxos*", Arch. Hist. Sci.19, No.2, 121-135, 1988.
15. Artmann, B. "*Euclid's elements and its prehistory*", Edmonton, Apeiron 24, 1-47, 1992.
16. Ayoub R.G. "*An Introduction to the Analytic Theory of Numbers*", Amer. Math. Soc., Providence 1963.
17. Ball W. W.R "*A short account of the history of Mathematics*", Dover 1980.
18. Barbin E. "*The Role of Problems in the History and Teaching Mathematics*", Vita Mathematica, p.p. 17-25, 1966.
19. Βαρλαάμ του Καλαβρού, "*Λογιστική*" (δίγλωσση έκδοση), Ουsια, Bruxelles 1996.

20. Barnes J., Schofield M. and Sorabji R. (eds). "*Articles on Aristotle*", vol. I, II, Duckworth, London 1978.
21. Becker O. "*Das Mathematische Denken der Antike*", Vandenhoeck, Wis. Buch. Göttingen 1957.
22. Becker O. (ed.) "*Zur Geschiche der griechischen Mathematik*", Wis. Buch. Darmstadt, 1965.
23. Bekker I. Σούδα (Σουΐδα), (Ελλην. Μεταφρ.) ΕΕΕ, Αθήνα , χ.χ.
24. Bell E.T. "*Men of Mathematics*", Simon and Schuster, N. Y. 1965
25. Bellman R.E. "*Anlytic Number Theory: An Introduction Reading*", MA Benjamin / Cummings, 1980.
26. Benoit P., Chemla K., Ritter J. "*Histoire de fractions, fractions d' histoire*", 1992.
27. Berggren J. L. "*Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*", Springer, N.Y. 1986.
28. Berggren J. L. "*History of Greek Mathematics:A survey of recent research*", Historia Mathematica, vol. 11, p.p. 394-410, 1984.
29. Bergstrasser G. "*Pappus Kommentar zum Zehnten Buch von Euclid's Elementen*", Der Islam 21, 1933.
30. Boezio R. "*Porfirio Isagoge*", Wien - Leipzig 1906 (επανεκ. G. Girgenti, Milano 1995).
31. Boltianski V. "*Tretii Proplemi Hilberta*", Nauka, Moscow 1968.
32. Boltyanski G. V. "*Equivalent and Equide-composable Figures*" (μετ. εκ του ρωσ.), D.C. Heath and Company, Boston 1963.
33. Bolyai J. Appendix "*The Theory of Space*", Akademiai kiado, Budapest 1987.
34. Bonola R. "*Non - Euclidean geometry*", Dover, N. Y. 1955.
35. Borel E. and Stäckel P. "*Die Element der Mathematik, II. Geometrie*", Teubner, Leipzig - Berlin 1909.
36. Borsuk K. – Smielew W. "*Foudations of Geometry*", North – Holland, Amstesdam 1960.
37. Borwein J. M. And Borvein, P.B. Pi & the AGM: "*A Study in Analytic Number Theory and Comporational Complex*", New York Wiley, 1987.
38. Boyer C. B. "*A History of Mathematics*", John Wiley & Sons, N.Y. 1989.
39. Brentjes S. "*Textzeugen und Hypothesen zum arabischen Euklid in der Ueberlieferung von al-Haggag b. Yusuf b. Matar*", Arch. Hist. Exact Sci. 47, No.1, 1994.
40. Brentjes S. "*Varianten einer Haggag – Version von Buch II der Elemente*", Rodopi B. V., Amsterdam 1993.
41. Bretschneider K.A. "*Die Geometrie ynd die Geometer vor Euklides*", Leipzig 1870 (επαν. Olms 1975)
42. Briggs H. "*Elementorum Euclidis libri VI Priores*", p.p.195-222, London 1620.
43. Brunschvicg L. "*Le Role de Pythagorisme dans l’ evolution des idees*", Blanchard, Paris 1937.

44. Brunschvicg L. "*Les Etapes de la Philosophie Mathematique*", Blanchard, Paris 1991.
45. Burkert W. "*Weissheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*", Carl, Nürnberg 1962.
46. Burnet J. "*Early Greek Philosophy*", Mcmillan, London 1930. (επανεκ. Penguin 1965)
47. Burton M. D. "*The History of Mathematics*", Dover, N. Y. 1985
48. Bury R. G., "*Sextus Empiricus*", vol. I-IV, Loeb Clas. Libr., London 1983
49. Busard H.L.L. "*A thirteenth – century adaptation of Robert of Chester' s version of Euclid's Elements*" 2vols, Algorismus, Muenchen 1996.
50. Busard H.L.L. and Folkerts M. "*Robert of Chester's redaction of Euclid's Elements. The so called Adelard II version*" Vol. I, Basel: Birkhaeuser 1992.
51. Busard H.L.L. "*The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia*" (?), Leiden 1968.
52. C. H. Edwards H. C., Jr. "*The Historical Development of the Calculus*", Springer 1979.
53. Cajori F. "*A History of Mathematics*", N.Y. 1893 (επανεκ. Dover 1919)
54. Cantor M. "*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*", 3η έκδοση, Leipzig 1907.
55. Cardies J. L. "*La proposotion 14 du livre V dans L' economies des Elements d' Euclide*", Rev. Hist. Sci. 44, No.3/4, 1991
56. Casey J. "*A Sequest to the First Six Books of the Elements of Euclid*", 6th ed Dublin Hodges Figgis & Co., 1892.
57. Caveing M. "*La figure et le nombre*", PUF, Paris 1997.
58. Caveing M. "*The debate between H. G. Zeuthen and H. Vogt on the historical source of the knowledge of irrational quantities*", Centaurus 38, No.2-3, 1996.
59. Caveing M. "*These. Bernard Vitrac, De quelques questions touchant au traitement de la proportionnalite dans Les Elements d' Euclide*", Rev. Hist. Sci 47, No.2, 1994
60. Clagett M. "*Greek Sience in Antiguity*", London 1957.
61. Clagett M. "*The science of Mechanics in the middle Ages*", Madison, Wiskonsin 1954.
62. Clagett M. "*The Medieval Latin Translations From the Arabic of the Elements of Euclid, with special Emphasis on the version of Adelar of Bath*", Isis 44, p.p. 16-42, 1953.
63. Colerus E. "*Von Pythagoras bis Hilbert*", Springer, Berlin, Wien, Leipzig 1937.
64. Colli G. "*Zenone di Elea*", Adelphi, Milano 1998.
65. Cousin V. "*Procli comentarium in Platonis Parmenidem*", G.Olms, Hildesheim 1961.
66. Coxeter H. S. M. "*Introduction to Geometry*", J. Willey, N.Y. 1961

67. Cromwell R. P. "*Polyhedra*", Cambridge 1997.
68. Curtze M. "*Anaritii in decem libros priores Elementotum Euclidis commentarii*", Teubner, Leipzig 1899.
69. Curtze M. "*Das algebrische werkes Eukleides über die Waage*", Zeitchrift für Mathematik und Physik, 19, 1874.
70. Curtze M. "*Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im mittelalter*", Biblioteca Mathematica I, 3rd ser, 1900.
71. Davenport H. "*The Higher Arithmatic: And Introduction to the Theory of Numbers*", 6th ed Cambridge University Press, 1992
72. De Morgan A. "*Proportion*", Penny Cyclopaedia XIX, p.p. 49-53 (Λονδίνο 1841).
73. De Young G. "*The Arabic textual tradicions of Euclid' elements*", History of Science, p.p. 147-160, 1984.
74. Delacy A. E. "*Euclid and Geometry*", London 1965.
75. Dence J. B. and Dence, T. P. "*Elements of the theory of numbers*", CA Harcourt / Academic Press, San Diego 1999.
76. Descartes R. "*The Geometry*", Dover, N. Y. 1954.
77. Dickson L. E. "*History of the Theory of Numbers*", 3 vols. Chelsea, N.Y. 1952.
78. Diedonne J. "*Abrege d’ histoire des mathematiques*", Hermann, Paris 1996.
79. Diels H. "*Simplicius, In Aristotelis physicorum libros comentarius*", Vol. 2 Teubner, Berlin 1882 – 1885.
80. Diels H. and Kranz W. "*Die Fragmente der Vorsokratiker*" Berlin 1936-37 (επανέκδοση Weidmann, Berlin 1950,1951).
81. Dijksterhuis E. J. "*De elemente van Euclides*" (vol. 1-2), Noordhoff, Groningen 1929-30.
82. Dixon R. "*Mathographics*", Dover p.p. 26-27, New York 1991.
83. Drake, S. "*Euclid Book V from Eudoxus to Dedekind*", Hist. Philos. Sci, Nouv.Ser. 21, Toronto 1987.
84. Dudley U. "*A. Budget of trisections*", Springer N.Y. 1987.
85. Duhem P. "*Les origines de la statique*", Paris 1905.
86. Dunham W. "*Journey through genius. The great theorems of mathematics*", Wiley Science Editions, New York 1990.
87. Effimov V. N. "*Higher Geometry*", Mir Publishers, Moscow 1968.
88. Engel F. - Stäckel P. "*Die theorie der Parallelinien von Euclid bis auf Gauss*", Weidmann, Lepzig 1895.
89. Enriques F. and Amaldi U. "*Elementi di geometria*", Bologna 1904 (επαν. Feltrinelli), Roma 1990.
90. Eudemi, Phodii Peripatetici, "*Fragmenta quae supersut*" (Collegit L. Spengel), Berolini 1866.
91. Eves H. "*An Introduction to the History of mathematics*", Reinhart, N.Y. 1953.
92. Eves H. "*College Geometry*", Allyn and Bacon, Boston 1995.

93. Eves H. "*Great moments in Mathematics before 1650*", MAA, N.Y. 1985.
94. Eves H. and Newson C.V. "*Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*", Dover, N.Y. 1997.
95. Εξαρχάκος Γ. Θ. "*Εισαγωγή στα Μαθηματικά*" τόμος Α΄, Άλγεβρα (1991) και τόμος Β΄ Ανάλυση, (1995) Αθήνα.
96. Εξαρχάκος Γ. Θ. "*Ιστορία των Μαθηματικών*" τόμος Α΄: Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων (1997) και τόμος Β΄: Τα Μαθηματικά των Ινδών και των Κινέζων (1999) Αθήνα.
97. Εξαρχάκος Γ.Θ., *"Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης",* Πρακτικά 17ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2000.
98. Exarchakos Th. "*The method of mathematical induction and the Pell equation in ancient Greek Mathematics*", Mentor, A Journal of Scientific and Educational Research, Hellenic Pedagogical Institute, vol 1, p.p. 4-16, Athens 1999.
99. Forder G. H., "*The Foundations of Euclidean Geometry*", Cambridge Univ. Press, 1927 (Dover reprint).
100. Fowler D.H. "*The Mathematics of Plato's Academy. A new re-construction*", Oxford 1987.
101. Fowler, D. H. "*Book II of Euclid's elements and a pre-Eudoxan theory of radio*", Arch. Hist. Exact Sci. 22, 1980.
102. Frajese A. "*Attraverso la Storia della Mathematica*", Rusconi, Firenze 1977.
103. Frajese A. "*La Mathematica nel mondo antico*", Rusconi, Roma 1972.
104. Frajese A. "*Platone e la Mathematica nel mondo antico*", Roma 1963.
105. Frajese A. and Macioni L. "*Gli Elementi di Euclide*", La Monnier, Turin 1970.
106. Frank E. "*Plato und die sogenanten Pythagoreer*", Halle 1923 (επανεκ. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1962).
107. Frankland B. W. "*The First Book of Euclid's Elements with a Documentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus*", Cambridge 1905.
108. Frege G. "*The Foundations of Arthmetic*", Basic Blackwell, Oxford 1950.
109. Friedlein G. "*Proclus, In Primum Euclidis Elementorum Commentari*", Teubner, Leipzig 1873 (επαν. Olms G., Hildsheim 1965).
110. Gallop D. "*Parmenides of Elea Framentas*", Oxford 1984.
111. Gardies J.-L. "*L' organisation du livre XII des Elements d' Euclide et ses anomalies*" (Organisation of Book XII of Euclid's Elements and its anomalies), Rev. Hist Sci. 47, No. 2, 1994.
112. Gauss C. F. "*Disauitiones Arithmeticae*", New Haven, CT: Yale University Press, 1966.
113. Gericke H. "*Mathematik in Antike und Orient*", Fourier, Wiesbaden 1992.
114. Gilbert O. "*Aristoteles Urtaile über die pythagorische Lehre*", Archive Gesch XXII (1953), p. 165.

115. Görland A. "*Aristoteles und die Mathematik*", Marburg 1899.
116. Graser A. "*Mathematics and Metaphysics in Aristotle*", Bern 1987.
117. Grattan – Guiness, J. "*Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's it Elements: How did he handle them*", Historia Mathematica 23, No.4, 1996
118. Greenberg J. M. "*Euclidean and non - Euclidean Geometries*", Springer, N.Y. 1993.
119. Gregory D. "*Ευκλείδου τα σωζόμενα*", Euclidis quae supersunt omnia, Oxford 1703.
120. Gruber M. P. "*History of Convexity, Handbook of Convex Geometry*", vol. A, Elsevier, Amstrerdam 1993.
121. Guillaumin Y. J. "*Mathematiques dans l' Antiquite*", IREM, Saint - Etienne 1992.
122. Guy R. K. "*Unsolned Problmes in Number Theory*" (2nd ed.) Springer - Verlag, New York, 1994.
123. Hankel H. "*Beiträge. zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mitelalter*", Leipzig 1874 (επαν. G.Olms Hildesheim 1961).
124. Hara K. "*Quelques ouvrages de geometrie more veterum de Roberval. I.*" Hist. Svi., II. Ser.2, No.1, 1992.
125. Hardy G. H. And Wright, E. A. "*An Introduction to the Theory of Numbers*", 5th ed Oxford, England: Clarendon Press, 1959.
126. Hartshorne R. "*Teaching Geometry According to Euclid*", Notices of AMS, vol. 47, (4) p.p. 460-465, 2000.
127. Hasse H. "*Number Theory*", Springer, Berlin 1980.
128. Hasse H. and Scholz H. *"Η κρίσις των αρχών της Ελληνικής Μαθηματικής Επιστήμης"*, Δελτίο της ΕΜΕ 1932.
129. Hasse, H. "*Mathematicals Wissenschaft*", Kunst und Macht, Mitt. Deutsche Mathematiker vereinigung vol 4, p.p.28-38, 1947.
130. Hauser G. "*Geometrie der Griechen von Thales bis Euclid*", Atena, Lucerne 1955.
131. Heath T. L. "*A History of Greek mathematics*", Oxford 1921 (επαν. Dover 1975).
132. Heath T. L. "*A manual of Greek Mathematics*", Oxford 1931.
133. Heath T. L. "*Mathematics in Aristotle*", Oxford 1949
134. Heath T. L. "*The Thirteen Books of the Elements*", 2nd ed., vol. 1-3. Dover, New York 1956.
135. Heiberg J. L. - Stamatis E. "*Euclides Elementa*" (vol. 1-2), Teubner, Berlin 1969.
136. Heiberg J. L. "*Euclide, Les Elements*", (μετάφραση B. Vitrac με εισαγ. του M. Caveing), PUF, Paris 1990.
137. Heiberg J. L. "*Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum*", Minerva, München 1925.
138. Heiberg J. L. and Menge H., "*Euclidis opera omnia*", 8 vols, Teubner, Leipzig 1883-1916.

139. Heiberg J. L., "*Paralipomena zu Euklid*", Hermes 38, 46-74, 161-201, 321-356, 1903.
140. Heiberg L. J., "*Naturwissenschaflen Mathematik und Medizin im Klassischen Altertum*" (δεύτερη έκδοση), Leipzig 1920.
141. Heinemann G. "*Greek Mathematical work (I), Thales to Euclid*", London 1939.
142. Hervagius J. "*Euclidis de levi et Ponderoso Fragmentum*" Euclidis Megarensis Mathematica Clarissimi Elementorum geometricorum libri xv, Basel 1537.
143. Herz - Fischler, R. "*Theorem XIV, of the Elements*", Arch. Int. Hist. Sci. 38, Nov. 120, 1988.
144. Hiller E. "*Expositio rerum matematicorum*", Teubner, Leipzig 1873 (επαν. 1995)
145. Hofmann E. J. "*Geschichte der Mathematik*", Bd. 1,2, Sam. Gössen, Berlin 1953-1957.
146. Hoppe E. "*Mathematik und Astronomie in Klassischen Altertum*", Heidelberg 1911.
147. Hoyrup J. "*The Four sides and the Area*", Vita mathematica, N. Y. 1996.
148. Hultsch F. "*Autolykos und Euclid*", Berichte der Verhandlung der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der wissenschaft zu Leipzig, Phil, hist, classe. 38, 1886.
149. Hultsch F. "*Euklides 8*", Pauly-Wissowa II, Leipzig 1907.
150. Hultsch F. "*Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*" 3vols, Berlin 1876-1878 με μια γαλλική μετάφραση από τον Paul ver Eecke.
151. Husserl E. (tr. et intr. J. Derrida) "*L' origine de la Geometrie*", PUF, Paris 1962.
152. Jones Al. "*Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*", Springer, N.Y. 1986.
153. Joseph G. G. "*The Crest of the Peacok*" (Non - European Roots of Mathematics), Norton, London 1991.
154. Kasir S. D. "*The Algebra of Omar Khayyam*", Chelsea, N.Y. 1931.
155. Κηπουρός Χ. "*Ήρωνος Αλεξανδρέως. Ονόματα Γεωμετρικών όρων. Γεωμετρικά*", ΕΜΕ, Αθήνα 1995.
156. Kidd I. G. "*Posidonius Fragmenta*", Cambridge 1988.
157. Klee V. and Wagon S. "*Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*", Math Assoc. Amer, Washington DC.1991.
158. Klein J. "*Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*" (tr. Brann E.), Dover 1992.
159. Knorr W. R. "*Rational diameters and the discovery of incommensurability*", Am. Math. Mon. 105, No 5, 421-429, 1998.
160. Knorr W. R. "*The ancient tradition of Geometric Problems*", Dover, N. Y. 1986.

161. Knorr W. R. "*The practical element in ancient exact sciences*", Synthese 81, No.3, 1989.
162. Knorr W. R. "*The Pre-Euclidean Theory of Incommensurable Magnitudes*", Harvard Un. Press, Cambridge Mass., 1973.
163. Κοντογιάννης Δ. και Ντζιαχρήστος Ε. *"Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας"*, Αθήνα 1999.
164. Kruoll W. "*Proclus, In Platonis republican commentari*", Leipzig 1901 (επαν. Olms G., Hidelsheim 1972).
165. Λάκωνος Β. *"Στοιχεία Γεωμετρίας"*, Αθήνα 1892.
166. Landau E. "*Elementary Number Theory*", 2nd ed Springer New York 1994.
167. Lauenstein H. "*Arithmetik und Geometrie in Raffaels Schule von Athen. Die geheimnisvolle der Tafeln im fuer das Konzept harmonischer Komposition und der ungeahnte Bezug zum Athenatempel von Paestum. Peter*" Lang, Frankfutr / Main 1998.
168. Lentz A. Paully - Wissowa. "*Real - Encyslopädie der Classischen altertumwissenschaft*", Stutgard 1894
169. Levet J. "*P. Gerbert d' Aurillac Traité de Géométrie*", Irem 1997.
170. Liddell G. H. - Scott R. Μέγα λεξικό της ελληνικής γλώσσας, Αθήνα 1948.
171. Liddell H. G. Scott R., Jones H.S. "*A Greek - English Lexicon*", Oxford 1940.
172. Loomis E.S. "*The Pythagorean Proposition*", National Counsil of Teachers of Mathematics, Wasington 1968.
173. Loria G. *"Ιστορία των Μαθηματικών"* (Μετάφραση Μ.Κωβαίου), ΕΜΕ, Αθήνα 1971.
174. Lueneburg H. "*Leonardi Pisani oder Lesevergnuegen eines Mathematikers*", Mannheim B.I. Wissenschaflverlag 1993.
175. Mackenzie J.D. "*Dialogue and proof*", History of mathematics, Clayton / aust. 1980
176. Maddalena A. "*I Pitagorici*", Atena, Bari 1954.
177. Maeenpaeae P. von Plato, J. "*The logic of Euclidean construction procedures*", Acta Philos. Fenn. 49, 1990.
178. Martin G. E. "*Geometric constructions*", Springer, New York, 1998.
179. Matvievskaya G. "*The theory of quadratic irrationals in medieval oriental mathematics*", King, David A. (ed) et al., New York 1987.
180. Mau J. "*Eukleides 3*", στο Die Klein Pauly, II σελ. 416-419, Stuttgart 1967.
181. Meschkowski H. "*Ways of Thought of Great Mathemaricians*", Reidel, Boston 1964.
182. Michel H. P. "*De Pythagore a Euclide*", Les Belles Lettres, Paris 1950.
183. Milhaud G. "*Les Philosophes - geaometers de la Grece*", Al can F. Paris 1900 (επαν. Arno 1976).

184. Moise E. E. "Elementary Geometry from an Advanced Stand-point", Addisson-Wesley, 1963.
185. Molodsci V. "*Istorikomathematiceskie iseldovania*" (ρωσ.) Nauka, Moscow - Leningrad 1942.
186. Morrow G. "*Proclus, A Commentary of the first book of Euclid's Elements*", Princeton 1970.
187. Mueller I. "*Euclid's Elements and the axiomatic method*", British J. Philos. Sci., 20, 1969.
188. Mueller I. "*Greek Mathematics and Greek Logic*", in Corcoran J. "*Ancient Logic and its modern Interpretation*", Dordrecht, p.p. 35-70, 1974.
189. Mueller I. "*On mathematics. Essays on ancient mathematics and its later development based on a conference*", Oberwolfach, Germany, August 19-25, 1990, Apeiron 24, 1992.
190. Mueller I. "*Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*", Cambridge, Massachussetts – London, MIT 1981.
191. Mugler C. "*Dictionaire historique de la terminologie geometriques des Greecs*", Les belles Letres, Paris 1958.
192. Mugler C. "*Euclide, Extrait des Elements*", Paris 1967.
193. Murata T. "*A tentative reconstruction of the formation process of Book XIII of Euclid's Elements*" Comment. Math. Univ. St. Pauli 38, No.1 1989.
194. Netz R. "*The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*", Cambridge, 1999.
195. Neuenschwander E. "*Die ersten vier Bücher der Elemente Eucklids*", Archive for History of Exact Sciences 9, p.p.325-380, 1973.
196. Niebel E. "*Untezsuchungen uber die Bedeutung der geometrischen Konstruction in der Antike*", Kant-Studien v.76, Cologne 1959.
197. Niven I. M., Zuckerman H.S. and Mongomery H. L. "*An Introduction to the Theory of Numbers*", Wiley N.Y. 1991.
198. O' Meara D. J. "*Pythagoras Revised*", Oxford 1989.
199. Plato "*Theaetetus*" (tr Mc Dowell J.), Oxford 1973.
200. Porphyrius, "*Fragmenta*" (Ed. A. Smith), Stutgardiae et Lipsiae 1993.
201. Porphyry "*On Aristotle' s Categories*" (Trans. S. K. Strange), N. Y. 1992.
202. Raven E. J. "*Pythagoreans and Elatics*", Ares, Chicago 1948.
203. Reed D., "*Figures of thougth Mathematics and mathematical texts*", Routleds London 1995.
204. Reidemeister K. "*Das exacte Denke der Griechen*", Kroll, Hamburg 1949.
205. Reidemeister K. "*Die Arithmetik der Griechen*", de Gruyer, Berlin 1940.
206. Rey A. "*Les Mathematiques en Grece au milieu de v' siecle*", Gauthier, Paris 1935.
207. Russo L. "*The definitions of fundamental geometrie entities contained in book I of Euclid's Elements*", Arch. Hist. Exact. Sci. 52, No 3, 1998.
208. Sabra L. A. "*Simpicius Proof of Euclid's Parallels Postulate*", Journal of the Warburg and Courtauld Institutes 32, p.p. 1-24, 1969.

209. Sabra L. A. "*Thabit ibn Qüra on Euclid's Parallels Postulaté*", Journal of the Warburg and conrtau institutes, p.p. 19-32, 1968.
210. Saccheri G. "*Euclides Vindicatus*", G. B. Halssted, Chicago 1920, (επαν. Chelsea 1956).
211. Sachs E. "*Die fünf platonischen Körper*", Berlin 1917.
212. Saito K. "*Book II of Euclid’s Elemente in the light of the theory of Conic Sections*", Historia Scientiarum , 28, 1985.
213. Sarton G. "*Introduction to the Theory of Science*", Biblioteca Mathematica I, 1900.
214. Sarton G., "*Ancient science and Modern Civilization*", Lincoln, Nebr. 1954.
215. Schmitz M. "*Euklids Geometrie und ihre mathematiktheoretische Grundlegung in der neuplatonischen Philosophie des Proklos*", Epistemata, Wuerzburger Wiss. Schr., Wuerzburg 1991.
216. Simon M. "*Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*", Teubner, Leipzig 1901.
217. Simplicius "*Corollaries on Place and Time*" (Trans J. U. Urmson), Durkworth, London 1992.
218. Simplicius "*In Aristotelis physicorum libros comentarius*" (Ed. H. Diels), Vol. 2, Berlin 1882 – 1885.
219. Simplicius "*On Aristotle Physics 6*" (Trans. D. Konstan), London 1989.
220. Smith A. "*Porphyrius, Fragmenta*", Teubner, Stutgardiae et Lipsiae 1993.
221. Smith E. D. "*History of Mathematics*", N.Y. 1923 – 25 (επαν. Dover, 1958).
222. Sodan R. A. "*Porfirio φιλόσοφος ιστορία*", κείμενο αραβικό ελληνικό, Milano 1997.
223. Spengel L. "*Eudemi, Phodii Peripatetici, Fragmenta quae supersut*", Berolini 1866.
224. Σταμάτη Ε. "*Απολλωνίου Κωνικά*", τόμοι 4, Τ.Ε.Ε. , Αθήνα 1975.
225. Σταμάτη Ε. "*Ευκλείδη: Περί διαιρέσεων*", Αθήνα 1957.
226. Σταμάτη Ε. "*Η Ελληνική Επιστήμη*", Αθήνα 1968.
227. Σταμάτης Ε. "*Ευκλείδου Στερεομετρία*" ΟΕΔΒ 1952
228. Stein H. "*Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its retation to modern mathematics*", Synthese 84, No.2 1990.
229. Stevens H. F. and S. H. Hall. "*Euclid’s Elements*", Mc Millan, London 1894.
230. Suter H. "*Des Kommentar des Pappus zum X Buche der Eucklides aus der arabischen Übersetzung des Abü Othman al-Dimashki ins Deutsche übertragen*", Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der medizin 4, p.p. 9-78, 1922.
231. Suter Heinrich "*Das Mathematiken – Verzeichniss im Fihrist*", Abhandlungen sur Geschichte der Mathematik, p.p. 1-87, Leipzig 1892.
232. Szabo Arpad "*Die Entfaltung der Griechischen Mathematik*", Bibl. Institute, Mannheim 1994.

233. Szabo Arpad "*Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*", μετάφραση Φ. Βασιλείου, Τ.Ε.Ε. Αθήνα 1973.
234. Taisbak C. M. "*A table of half sums and differences. Ancient tricks with numbers*", Centaurus 36, No 1 1993.
235. Taisbak C.M. "*Coloured quadrangles A. guide to the tenth book of Euclid's Elements*", Museum Tusculanum Press, Copenhagen 1982.
236. Taisbak C.M. "*Elements of Euclid's data*" Edmonto: Academic Printing and Publishing, Apeiron 1992.
237. Taisbak C.M. "*Zeuthen and Euclid's Data 86. Algebra or a lemma about intersecting hyperbolas*" Centaurus 38, No.2-3, 1996.
238. Tannery P. "*La Geometrie Greque*", Paris 1887 (επαν. Olms G., Hidelsheim 1988)
239. Tannery P. "*Mémoires Scientifiques*" (pub. J-L. Heiberg & H.-G. Zenthen), vol. I Paris 1876, (επαν. Gambay, J. 1995).
240. Tannery P. "*Pour l' histoire des lignes et surfaces courbes dans l' antiquité*", Bulletin des Sciences mathématiques, 1883-1884.
241. Tannery P. "*Sur l' authenticité des axiomes d' Euclide*", Bulletin des Sciences mathématiques, t VIII p.p. 162-175,1884.
242. Tannery P. "*Sur la locution εξ' ισου*", Revue des études grecques, t. X, p.p. 14-18,1897.
243. Taylor E. A. "*Commentary on Plato's Timaeus*", Oxford 1928.
244. Taylor T. "*The Philosophical and mathematical Commedaries of Proclus on the First Book of Euclid's Elements*", Wissenschafthiche Buchgesellschaft, London 1788-1789 και 1791.
245. Thaer C. "*Euclid, Die Elemente*", Loeb Cl. Lib., Darmstadt 1989.
246. Thaer C. "*Euclid, Die Data von Euclid*", Springer, Berlin 1962.
247. Thomas – Stanford C. "*Early editions of Euclid's Elements*" (ed. Alan Wofsy), Fine Arts, San Francisco 1977.
248. Thomas I. "*Selections illustrating the history of Greek Mathematics*", vol.2, Loeb Classical Library, London 1980.
249. Thorup A. "*A pre-Euclidean theory of proportions*", Arch. Hist Exact. Sci. 45, No 1, 1992.
250. Todhunter I. "*The Elements of Euclid, for the use of Schools and Colleges*", London 1882.
251. Unguru S. "*Greek mathematics and mathematical induction*" Physis, Nuova Der. 28, No 2 1991.
252. Unguru S. "*On the Need to Rewrite the History of Greek mathematics*", Archive of Hist. Of Exact Scrienses, p.p. 67-113, 1975.
253. Van Der Waerden B. L. "*Science Awakening*", Noordhoff, Groningen 1954.
254. Van Der Waerden B.L. "*Die Pythagoreer*" Artemis, Zurich 1979.
255. Van der Waerden, B.L., "*Die Postulate und Konstruktionen in der fruehgrieschen Greometrie*" Arch. Hist. Exact Sci. 18, 1978.
256. Van Pesch G.J. "*De Procli fontibus*", Leiden 1900

257. Ver Eecke P. "*Pappus Alexandrini. La collection mathematique*", Bruges, Paris 1933.
258. Ver Eecke P. "*Proclus de Lycie, Les Commentares sur le premier livre des Elements d'Euclide*", Paris 1948.
259. Vinogradov I. M. "*Elements of Number Theory*", 5^{th} rev. Ed, Dover, New York 1964.
260. Vitrac B. "*La definition V.8 des Elements d' Euclide*", Centaurus 38, No.2-3, 1996.
261. Vitruvius. "*Περί αρχιτεκτονικής*" βιβλία 10, Εγνατία, Θεσσαλονίκη 1988.
262. Vogt H. "*Die Entdeckungeschichte des irrationalen nach Plato usw*", Biblioteca Mathematica vol. 10, 3^{o} τεύχος, σελίδα 155 και 158, 1910.
263. Vogt H. "*Die Lebenzeit Euclids*", Biblioteca Mathematica 13, p.p. 193-200, 1913.
264. Von Fritz K. "*Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*", de Gruyter, Berlin 1971.
265. Wehrli F. (her). "*Die Schule des Aristoteles*" (Texte und Kommentar), Basel 1953.
266. Weil A. "*Number Theory An Approach Through History From Hammurapi to Legendre*", MA: Birkhauser, Boston 1984.
267. Woepcke F. "*Essai d'une restitution de travaux Perdus d' Apollonius sur les quantités irrationnelles*" Memoires presentés par divers Savants a l' Academie des sciences, vol. 14, p.p. 658-720, 1856.
268. Woepcke F. "*Notice sur des traductions arabes de deux auvrages perdus d' Euclide*", Journal asiatique 18, ser.4^{th}, σελίδες 233-247, 1851.
269. Woepke F. "*Extrait du Fakhrist*", Paris 1853 (επαν. Olms G., Hildesheim 1982).
270. Young G. "*The Arabic textnaltradicions of Euclid' elements*", History of Science 1984, σελ. 147-160.
271. Young J. W.A. "*The Theory of Numbers*" Ch. 7 in Monographs on Topics of Modern Mathematics to the Elementary Field, (W. A. Young) (Ed.) Dover, p.p. 306-349, New York 1955.
272. Zacharias M. "*Das parallelen problem und seine Lösung*", Sam Gössen, Leipzig und Berlin 1937.
273. Zajtsev E.A. "*The notion of measure in early – medieval geometry*", Istor. – Mat. Issled. 35 (1994) (Russian).
274. Zervos P.S. "*On the development of Mathematical Intuition, on the genesis of Geometry, further remarks*", Tensor 26, 1972.
275. Zeuthen H. G. "*Histore des Mathematiques dans l' Antiquitè et le Moyen Age*", Paris 1902.