Μαθηματικά προσανατολισμού
Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων
Εκφωνήσεις

5-5-2023

273 ασκήσεις

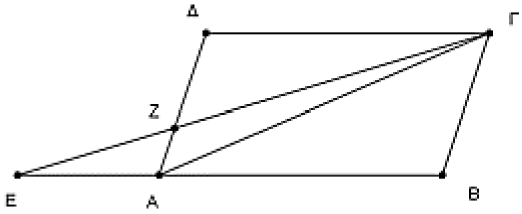
Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

Διανύσματα

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο



21165. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

22055. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A'\Gamma'}$.

α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς ΒΑ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και (Μονάδες 3)

(ii) το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$. (Μονάδες 3)

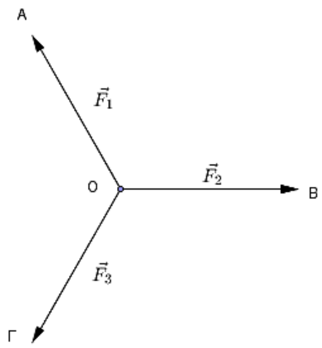
β) i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{B'\Gamma'}$. (Μονάδες 10)

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$. (Μονάδες 3)

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

Θέμα 4ο



22068. Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120°, έτσι ώστε το υλικό σημείο Ο να ισορροπεί.

α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας; (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ και $\vec{F_3}$ είναι αντίθετα. (Μονάδες 5)

γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ και $\vec{F_1}+\vec{F_2}$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο Ο), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $A\hat{O}\Delta=B\hat{O}\Delta=60^\circ$. (Μονάδες 5) **ii.** $O\hat{\Delta}B=60^\circ$. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F_1}|=|\vec{F_2}|=|\vec{F_3}|$. (Μονάδες 5)

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θέμα 2ο

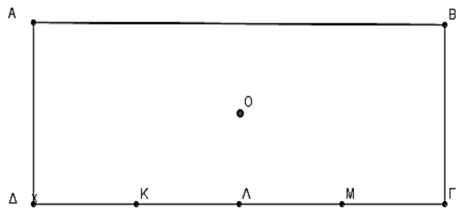
15010. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΔ}$ και $\overrightarrow{ΓΕ}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΒΔ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΓΕ} = \overrightarrow{ΓΑ} + \overrightarrow{ΓΒ}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = \overrightarrow{ΓΒ}$. (Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ}$ είναι αντίθετα. (Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Α Δ, και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

22042. Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.
Αν $\overrightarrow{ΔΚ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΔΑ} = \vec{β}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{α}$ και $\vec{β}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α) $\overrightarrow{ΔΓ}$ (Μονάδες 8) **β)** $\overrightarrow{ΜΑ}$ (Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{ΟΔ}$ (Μονάδες 9)

Θέμα 4ο

21885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΑΒ} = κ \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = λ \cdot \overrightarrow{ΑΕ}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{β}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α}$ και $\vec{β}$. (Μονάδες 8)

β) i. Αν κ=λ , να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΓ} // \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = κ|\overrightarrow{ΔΕ}|$. (Μονάδες 10)

ii. Αν κ=λ=2, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ αι να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

Συντεταγμένες διανύσματος
Θέμα 2ο

14666. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και $\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

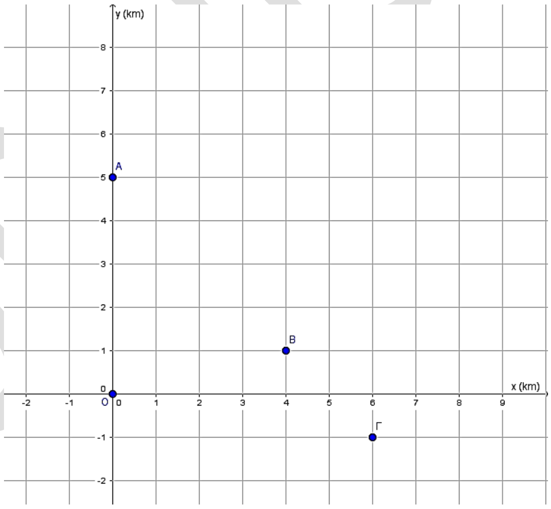
γ) Αν τα $\vec{\beta},\vec{w},\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

15002. Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$. (Μονάδες 11)

β)
- **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 6)
- **ii.** Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 8)

15043. Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού Β από τον οικισμό Α είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού Β από τον οικισμό Γ. (Μονάδες 12)

15854. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,\,-4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 8)

16147. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=3\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{\beta}=\sqrt{2}\,\vec{i}$, $\vec{\gamma}=-3\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(-1,1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (Μονάδες 9)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Οx. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 6)

16151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,3)$ και $\vec{\beta}=\left(-\sqrt{3},1\right)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$. (Μονάδες 9)

16579. Δίνονται τα σημεία Α(2,1) και Β(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

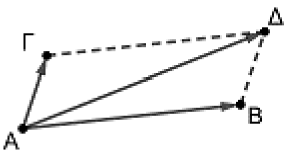
α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=(-8,-12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

(Μονάδες 10)

16580. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(11, 5), Γ(3, 7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:



α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ. (Μονάδες 05)

16581. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(−1, 6), Β(1, 2) και Γ(3, −2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 07)

17070. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και Α, Β, Γ και Δ. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

19038. Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

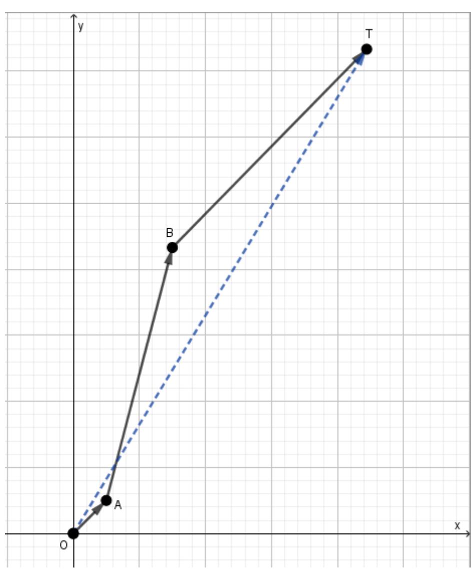
α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

18878. Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο Ο) τρείς μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο Α, στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο Β και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο Τ. Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$\overrightarrow{OA}=(1,1)$, $\overrightarrow{AB}=(2,4)$, $\overrightarrow{BT}=\left(2,5\sqrt{3}-5\right)$, όπως φαίνονται στο σχήμα.



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT}=\left(5,5\sqrt{3}\right)$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

(Μονάδες 12)

21681. Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 10)
β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 7)

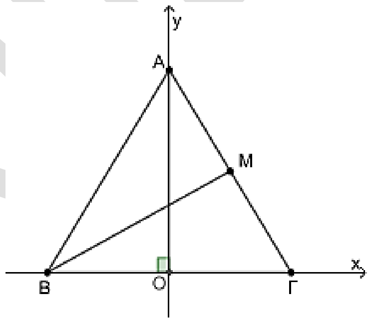
22038. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7. (Μονάδες 13)

22060. Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
(Μονάδες 12)
β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ; (Μονάδες 13)

22557. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΟ.
Η κορυφή Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές Β και Γ είναι σημεία του άξονα x΄x, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $A(0,8)$, $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$. (Μονάδες 9)
ii. $M(3,4)$. (Μονάδες 9)
β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ. (Μονάδες 7)

22044. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία Α, Β, Γ.
(Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

Θέμα 4ο

17076. Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)
δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει
$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

17077. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως
$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β ως συνάρτηση του λ. (Μονάδες 7)
γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων Α και Β να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
Θέμα 2ο

14586. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\vec{AM}$ και $\vec{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\vec{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{AM}$. (Μονάδες 8)

14953. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5), B(7,8), \Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\hat{BA\Gamma}$. (Μονάδες 5)

15038. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=15$. (Μονάδες 10)

15073. Δίνονται τα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

15186. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(6,3), Δ(1, −2) και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0). (Μονάδες 8)

β) $\vec{MN}=(1,-2)$ και $\vec{\Delta\Gamma}=(8,4)$. (Μονάδες 8)

γ) $\vec{MN}\perp\vec{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

15252. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}=(2,1)$ και $\vec{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{B\Gamma}=(1,-2)$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ. (Μονάδες 9)

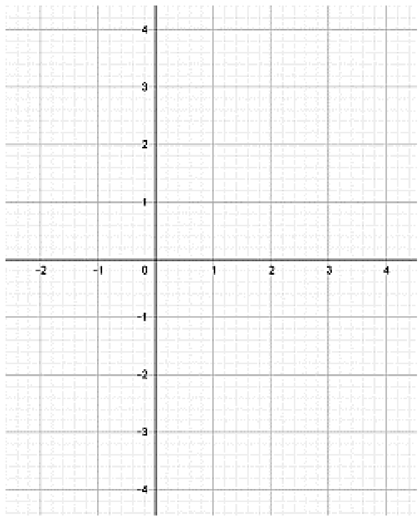
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

15317. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

β) i. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ (Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα. (Μονάδες 3)



15379.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. (Μονάδες 12)

15463. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$. (Μονάδες 8)

15658.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο Κ(2,1).

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο Α είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, Β είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ΑΒ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι Α(4,- 1) και Β(3, 2). (Μονάδες 5)

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$. (Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και $|\overrightarrow{K\Gamma}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. (Μονάδες 10)

15825.Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$. (Μονάδες 7)

15852.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$. (Μονάδες 12)

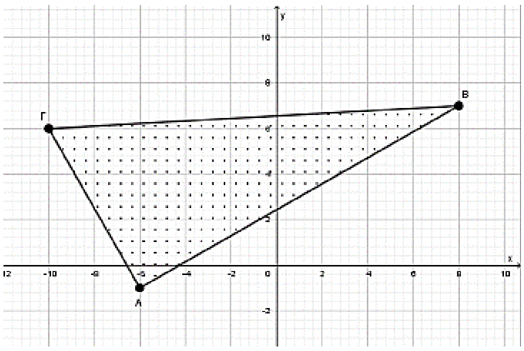
15996.Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

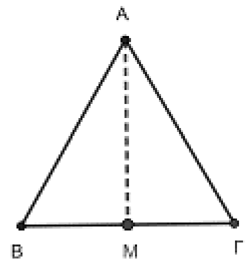
(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο ΑΒΓ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)



16141. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ **ii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ **iii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)$

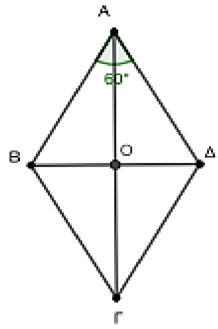
iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)$ **v.** $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)$ (Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **ii.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$ **iii.** $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)

16144. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $A=60^\circ$.



Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

β) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)

16426. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-3,2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(x,y)$ όταν $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

16427. Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

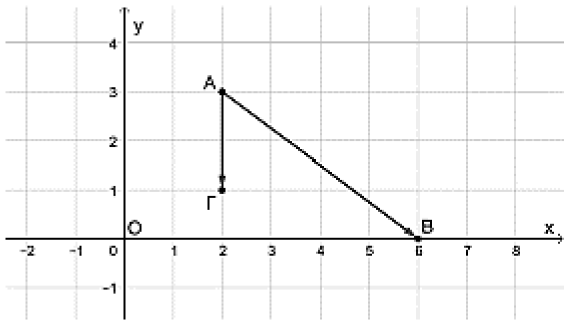
β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 13)

16428. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}|=\dfrac{1}{2}$ και $\left|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\dfrac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

17075. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου .



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0,-2)$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

20685. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1),\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία Α(−1,2), Β(β, 0), Γ(0, γ).

Τα διανύσματα $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι β = 1. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\dfrac{9}{5}$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

20732. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}|=4|\vec{\alpha}|$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$. (Μονάδες 7)

20733. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 05)

20773.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. (Μονάδες 08)

β) Αν $\vec{u}=(4,-1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v}=(1,\kappa)$. (Μονάδες 09)

γ) Για $\kappa=4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος. (Μονάδες 08)

20888.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=5$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

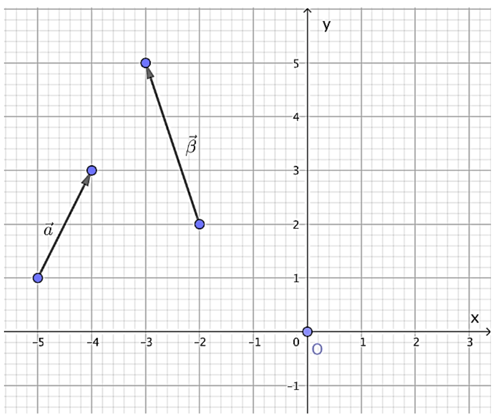
β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

20914.Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)



21682.Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,2)$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-5,-10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$. (Μονάδες 14)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$. (Μονάδες 11)

22040.Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1. (Μονάδες 13)

22170. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3), \vec{\beta}=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}=\left(x^2, x-1\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}=(3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά; (Μονάδες 09)

22554. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x΄x, y΄y τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}-\vec{j}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-3\vec{j}$. (Μονάδες 8)

ii. $\overrightarrow{OM}=\vec{j}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}$. (Μονάδες 9)

4ο Θέμα

15042. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ, τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa$ και $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

15320. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$. (Μονάδες 9)

ii. $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$. (Μονάδες 9)

β) Αν $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

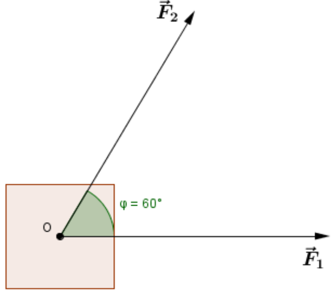
18520.α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\beta}\right|^2 \quad (1)$$ (Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. (Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1). (Μονάδες 04)



γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$.

Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της. (Μονάδες 10)

18547. Δίνονται τα σημεία $A(0,-1)$, $B(\lambda,1)$ και $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda=-2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

20938. Θεωρούμε τρίγωνο ΟΑΒ, με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=(6,8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-4,\ |\vec{\alpha}|-2\right)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΟΑΓΒ να αποτελεί παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά ΟΑ με τη διαγώνιο ΑΒ του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ. (Μονάδες 07)

22063.α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$.

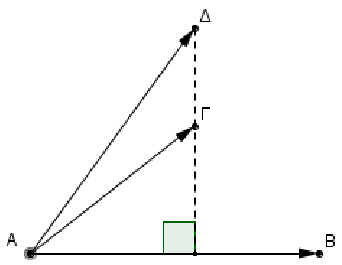
Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$. (Μονάδες 5) **ii)** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. (Μονάδες 5) **iii)** $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$. (Μονάδες 5)

22064.α) Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$:

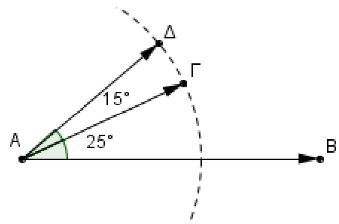
i) είναι αριθμοί ή διανύσματα; **ii)** μπορούν να συγκριθούν; (Μονάδες 5)

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:



i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **ii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **iii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ (Μονάδες 10)

γ) Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο Α) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:



i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

(Μονάδες 10)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

3ο Θέμα

18243. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\alpha-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|,|\vec{\delta}|$. (Μονάδες 8)

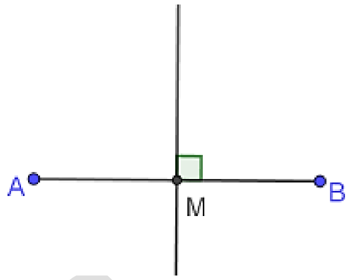
δ) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})$. (Μονάδες 5)

Ευθεία

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

15027. Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

15044. Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.
α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 5)
ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $M(3,2)$. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 15)

15271. Δίνονται τα σημεία Α(- 3, 2), Β(1, 6) και Γ(- 13,- 7) .
α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y = x + 5$. (Μονάδες 7)
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ. (Μονάδες 10)

15986. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3).
α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$. (Μονάδες 12)
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ $(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ε). (Μονάδες 13)

16002. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,- 2) και Γ(5, 2) . Αν το σημείο $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι Β(1,- 1) . (Μονάδες 9)
β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ. (Μονάδες 10)

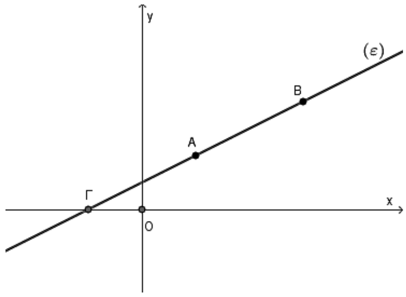
18236. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(- 1, 5) και Β(2, 1) . Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0). (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε:
i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ (Μονάδες 6)
ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ. (Μονάδες 7)

18351. Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:
α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)
β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ. (Μονάδες 8)
γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 9)

21662. Δίνεται η ευθεία ε: $-x + y - 2 = 0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).
α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε:
i. την εξίσωση της ευθείας ε΄ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε. (Μονάδες 5)
ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε΄. (Μονάδες 5)

iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε. (Μονάδες 5)

20868. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε).



α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε). (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

21162. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,-6) . Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 8)

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 9)

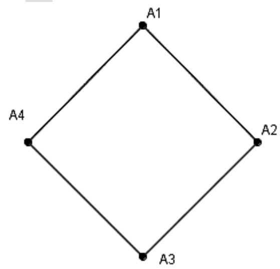
21964. Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1). (Μονάδες 6)

β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y=-x+2$. (Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1). (Μονάδες 11)

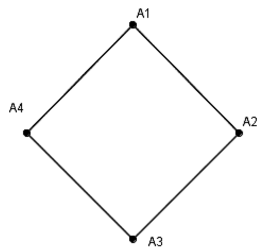
22047. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών; (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_2}{\lambda_4}=2$. (Μονάδες 10)

22049. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών; (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1\cdot\lambda_2+\lambda_2\cdot\lambda_3+\lambda_3\cdot\lambda_4+\lambda_4\cdot\lambda_1=-4$. (Μονάδες 10)

22071. Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1). (Μονάδες 08)

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3). (Μονάδες 07)

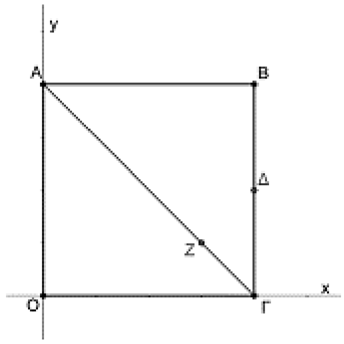
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ. (Μονάδες 10)

22092. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,4). Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x-2y+5=0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y=x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1,1)$. (Μονάδες 12)

β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.
(Μονάδες 13)

22173.Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.



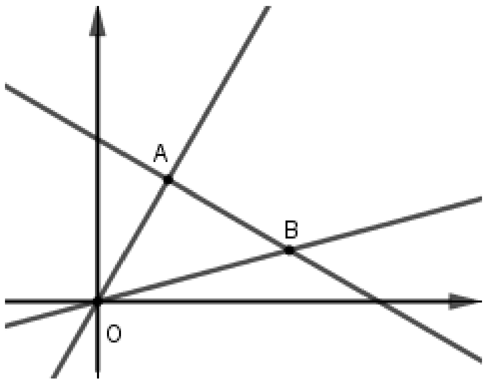
α) Να βρείτε:
i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 07)
ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ. (Μονάδες 09)
β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (Μονάδες 09)

4ο Θέμα

14970.Δίνεται η ευθεία $y=\lambda(x-2)+\lambda-2,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1).
α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda=1$ και όταν $\lambda=2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο Μ των δυο ευθειών. (Μονάδες 7)
Έστω $M(1,-2)$
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε:
i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 6)
ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

14978.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) ,Β(3,3) .
α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. (Μονάδες 4)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

15029.Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.
(Μονάδες 6)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.
(Μονάδες 6)
γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$. (Μονάδες 7)
δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.
(Μονάδες 6)

15275. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).
α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:
i. Την εξίσωση της. (Μονάδες 2)
ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 5)
β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ. (Μονάδες 6)
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 6)
iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται. (Μονάδες 6)

16003. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha:(\alpha-4)x-2\alpha y+\alpha+4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν α = 0 και όταν α = 1 και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 6)
γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
i. Να αποδείξετε ότι $0<\alpha<4$. (Μονάδες 6)
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει (ΟΑ)= 2(ΟΒ) (Μονάδες 5)

17078. Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

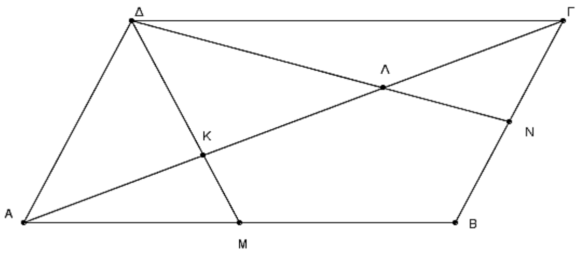
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση $y=-\alpha x+5\alpha$. (Μονάδες 6)
ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. (Μονάδες 7)
iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

18568. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 04)
β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y΄y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο Ε, τότε:
i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. (Μονάδες 10)
ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{E\Gamma}$. (Μονάδες 06)
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ. (Μονάδες 05)

22065. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$. Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ενώ Κ και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔΜ και ΔΝ την διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΓ, ΔΜ, ΔΝ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ. (Μονάδες 10)
δ) Να δείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα. (Μονάδες 5)

3ο Θέμα

15178. Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x+(\mu+2)y=0,\ \mu\in\mathbb{R}$ (1).

α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 02)

β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 03)

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ, προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 09)

Γενική μορφή ευθείας

2ο Θέμα

15657.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+y=6$ και $\varepsilon_1: x-2y=-2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M . (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x-y=4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 13)

16766.Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x-3y=4$ και $9x+3y=6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1,-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

22059.Δίνεται το σημείο $A(1,-3)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x+6y=1$.

α) Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας ε. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε. (Μονάδες 15)

22072.Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

22171. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x-y=5$ και $\varepsilon_2: x-y+1=0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους M. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M(3,4) και είναι κάθετη στην (ε_2). (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1). (Μονάδες 05)

4ο Θέμα

15004.α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$. (Μονάδες 5)

β) Αν $\varepsilon_1: 3x-4y-4=0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x-y-1=0$ είναι $\hat{\varphi}=45^o$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2. (Μονάδες 4)

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3. (Μονάδες 8)

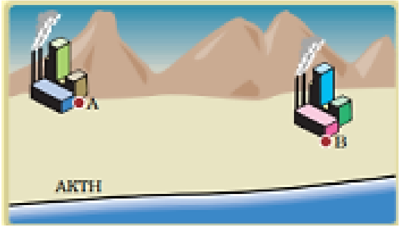
15253.Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

- **i.** είναι παράλληλες στον $x'x$. (Μονάδες 4)
- **ii.** είναι παράλληλες στον $y'y$. (Μονάδες 4)
- **iii.** διέρχονται από το (0,0) . (Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 8)



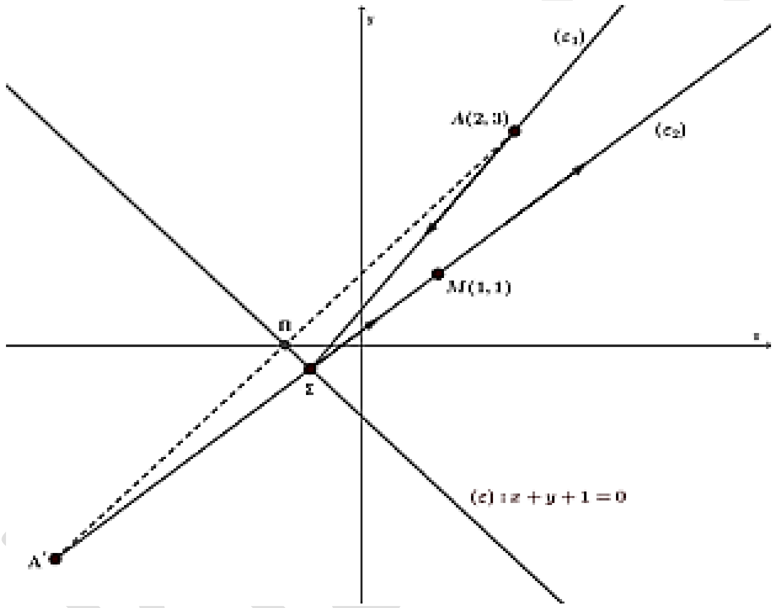
15475. Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες Α(2,1), Β(4,3), βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 10)

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι Ν(4,1), να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό. (Μονάδες 7)

15439. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, , μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4.-3)$. (Μονάδες 5)

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α΄, Σ, Μ, , τότε να βρείτε την εξίσωσή της. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 5)

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1). (Μονάδες 4)

18244. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

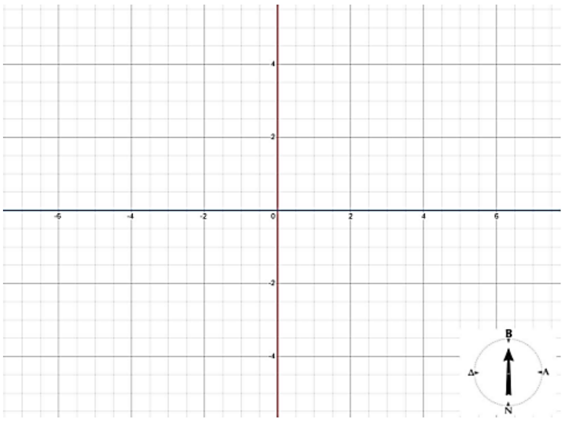
α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι 15°. (Μονάδες 3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 10)

16477. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας ε_λ: $\lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$ όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο O(0,0) .



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ . (Μονάδες 10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. (Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο Ρ βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το Ρ έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους. (Μονάδες 10)

21160. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία O(0, 0), B(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 8)

21652. Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται. (Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ε_λ και η_λ . (Μονάδες 7)

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το Μ κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$. (Μονάδες 6)

Εμβαδόν τριγώνου – Απόσταση σημείου από ευθεία
2ο Θέμα

15440. Δίνονται τα σημεία $A(0,2), B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 9)

β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

16194. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 8\chi + \psi - 28 = 0$, $(\varepsilon_2) : \chi - \psi + 1 = 0$, $(\varepsilon_3) : 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3). (Μονάδες 08)

16425. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2. (Μονάδες 13)

16759. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3). (Μονάδες 8)

16769. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 09)

β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του Μ.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 16)

16771. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο Β. (Μονάδες 09)

β) Αν Β(5,0):

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

16774. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 09)

16810. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).

α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

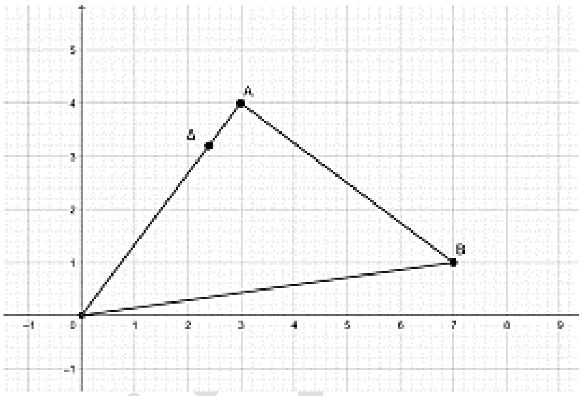
18240. Δίνεται το σημείο Α(1, 2) και η ευθεία (ε): y =x + 3.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε) . (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) ,(ε) . (Μονάδες 10)

17805.Δίνεται το τρίγωνο ΑΟΒ με Α(3, 4), Β(7,1), Ο η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς ΑΟ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.
(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. (Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι $(OAB)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Να δείξετε ότι $(A\Delta B)=\frac{1}{5}(OAB)$. (Μονάδες 10)

18733.Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA)=(MB)$. (Μονάδες 9)

18979.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,1) είναι σημείο της ευθείας ε_1. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_2. (Μονάδες 10)

20885.Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x΄x και y΄y, είναι: Ε = 8. (Μονάδες 13)

20864.Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x+y-6=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y+2=0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 12)

β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1. (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2. (Μονάδες 8)

20926.Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x-2y=1$ και τα σημεία Α(0,2), Β(1,0) .

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε.
(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του Α από το Β και να αποδείξετε ότι η προβολή του Α στην ευθεία ε είναι το Β. (Μονάδες 09)

21260.Δίνεται η ευθεία (ε): $y-2x=0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε). (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$. (Μονάδες 10)

4ο Θέμα

14984. Θεωρούμε τα σημεία Α(− 2,− 3) και Β(7, 9). Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε (ΑΜΒ) = 12 τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y+7=0$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε. (Μονάδες 7)

15194. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,1), Β(4,4) και Γ(3,1).

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε (ΚΑ) = (ΚΒ).
Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ ; (Μονάδες 9)

15273. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α(3,4), Β(2,5) και Γ(- 2,2) και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1,\ 3\alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ) . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

15380. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: $3x+y+\alpha=0$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε. (Μονάδες 8)

β) Για α = 4

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

15433. Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία Α(−1,−2) και Β(3,1). Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση δ: $x+y-1=0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

15681. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ που α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Μ είναι το μέσο της βάσης του ΟΑ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΑΒ είναι ΟΒ : $2\beta x-\alpha y=0$ και ΑΒ: $2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΟΒ και d_2 η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. (Μονάδες 8)
δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)

15692.Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $(x-y)^2 - (x-y) - 6 = 0$. (Μονάδες 4)
ii. Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε. (Μονάδες 4)
Έστω $\varepsilon_1 : x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.
β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha,\ \alpha - \dfrac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες. (Μονάδες 10)
γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών. (Μονάδες 7)

15987.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): y=2 x−1. (Μονάδες 8)
β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0). (Μονάδες 8)
γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. (Μονάδες 9)

16057.Δίνονται τα σημεία Α(2,0), Β(3,4) και $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ. (Μονάδες 5)
ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση (ε):$15x - 8y - 30 = 0$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β . (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ). (Μονάδες 7)

17694.Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).
α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)
β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

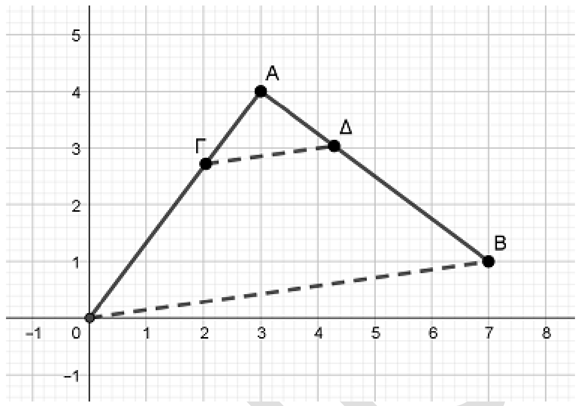
17695.Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2. (Μονάδες 5)
δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x + 3y + 7 = 0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

20861.Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο Μ. (Μονάδες 06)
β) i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy. (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$. (Μονάδες 10)

γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή Ο. (Μονάδες 05)

18732. Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.



α) Αν $\Gamma\left(2,\frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3},3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\Delta // OB$. (Μονάδες 5)

iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$. (Μονάδες 5)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB}$, να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 (ABO)$. (Μονάδες 9)

20655. Δίνονται τα σημεία $A(2,1), B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 03)

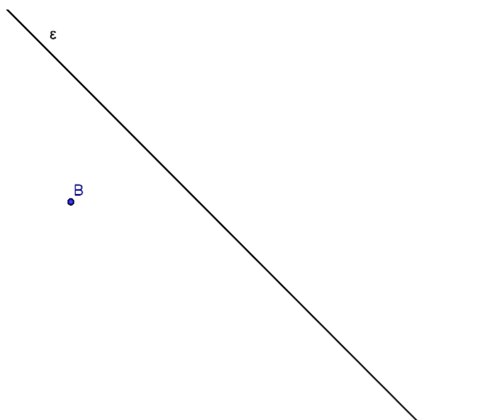
β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$ (Μονάδες 07)

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1: x - 4y - 7 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 4y + 11 = 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 03)

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x - 4y - 7 = 0$ και $x - 4y + 11 = 0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία ΑΓ ». (Μονάδες 05)

20724. Η ευθεία ε με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια Α, Β είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις).
Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π. Να βρείτε :



α) ποια πόλη από τις Α, Β είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου. (Μονάδες 6)

β) τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη Β. (Μονάδες 7)

γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις Α , Β . (Μονάδες 6)

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις Α , Β να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. (Μονάδες 6)

20728. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου $O(0,0), A(3,\sqrt{3}), B(3,3)$. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 7)

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

20939. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής: $(\lambda+1)x + (\lambda-1)y + 2 = 0$, με $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π. (Μονάδες 06)

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό. (Μονάδες 04)

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό Ο, υπάρχουν δύο επιλογές:

1η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό Ο με την πηγή

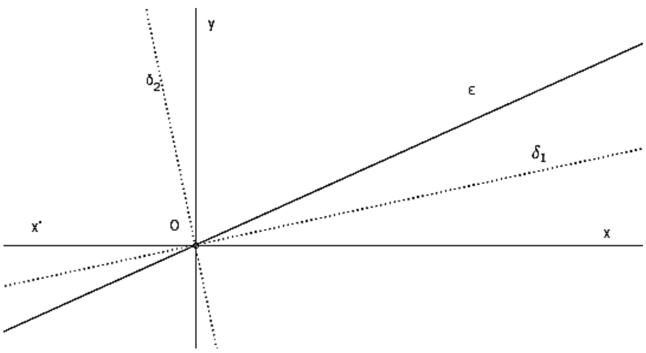
2η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό Ο με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής. (Μονάδες 08)

ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα; (Μονάδες 03)

22067. Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x$ με θετική κλίση λ.



α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι:

$y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$. (Μονάδες 12)

β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι: $y = \lambda_2 x$ με $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}$. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$. (Μονάδες 6)

22073. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)
β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)
ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

22262. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(\mathrm{MAB})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$.
(Μονάδες 7)

22265. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), $\mu \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.
(Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
(Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)
δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

22266. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x-8y+3=0$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)
δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)

3o Θέμα

15152. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: 3x + y + α = 0 με $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β. (Μονάδες 5)
β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.
(Μονάδες 8)
γ) Για α = 4 να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 12)

Κωνικές τομές
Κύκλος
2ο Θέμα

15028. Έστω κύκλος C με κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ=2 και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.
α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 8)
β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)
γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C. (Μονάδες 8)

15680. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο $K(1, 2)$ και η ευθεία ε: $3x+4y+1=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$. (Μονάδες 10)
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)

15994. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+3=0$ (1).
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)
β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)

16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το O(0,0) και διέρχεται από το σημείο A(1,2). (Μονάδες 08)
β) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.
i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο A. (Μονάδες 09)
ii. Να βρεθεί το σημείο B, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 08)

16808. Τα σημεία A(-8, 1), B(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.
α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)
β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 10)

17317. Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.
α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)
β) Αν K(1,2), να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$. (Μονάδες 13)
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. (Μονάδες 7)

18238. Δίνονται τα σημεία A(1,3) και B(- 3,5).
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB. (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι $(KA)=\sqrt{5}$. (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB. (Μονάδες 10)

18239. Δίνεται το σημείο K(- 3,1) και η ευθεία (ε): $4x-3y+5=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 9)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε). (Μονάδες 10)

18241. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C . (Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον y΄y και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx΄ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

18700. Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται το σημείο Α(3, −4).

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στον κύκλο C. (Μονάδες 05)

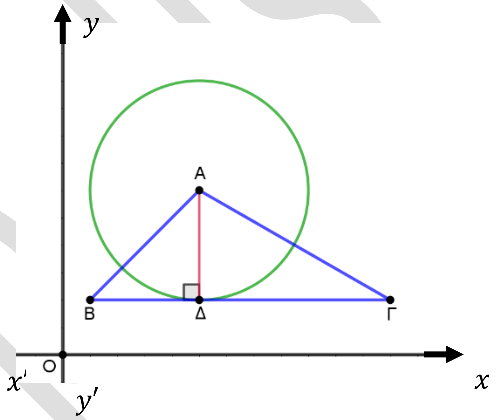
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο Α. (Μονάδες 10)

18749. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(12,2)$ και το ύψος του ΑΔ, όπου Δ σημείο της ΒΓ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Α, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ΒΓ στο σημείο Δ. (Μονάδες 10)



18968. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$:(1).

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho = 5$. (10 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους. (08 μονάδες)

γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται». (07 μονάδες)

19039. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \quad (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−1,1) και ακτίνα R = 2. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (Κ,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με −1. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

20890. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,-3), Β(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 15)

21962. Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ. (Μονάδες 7)

21965. Δίνονται τα σημεία Α(2, -4) και Β(0, -2)

α) Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 5)

γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ε): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε). (Μονάδες 9)

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2+(y+2)^2=4$. (Μονάδες 7)

22056.Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x,y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2+y^2\le 9$.
α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy. (Μονάδες 13)
β) Υπάρχει σημείο Α στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}|=4$, όπου Ο η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

22147.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0\ (1)$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα R = 2.
(Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο Α. (Μονάδες 8)

22172.Θεωρούμε την ευθεία ε: 3x – 4y = 0 και το σημείο A(-2,1).
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)
β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α. (Μονάδες 10)
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία (ε).
(Μονάδες 07)

22279.Δίνεται η εξίσωση $(y-1)^2=(3+x)(1-x)\ (1)$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(−1,1) και ακτίνα R = 2. (Μονάδες 9)
β) Η αρχή O(0,0) των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 7)
γ) Η ευθεία (ε): x + y = 2 είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R). (Μονάδες 9)

4ο Θέμα

14954.Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x-y-\mu=0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+1)x+(\mu-1)y-\mu+1=0,\ \mu\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.
(Μονάδες 6)
β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.
(Μονάδες 10)
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)

15030.Δίνεται ο κύκλος $C:(x-2)^2+(y+3)^2=5$ και η ευθεία ε: $2x+y+5=0$.
α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C. (Μονάδες 6)
β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)
γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες (η_1),(η_2) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)
δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών (η_1),(η_2). (Μονάδες 6)

15080.Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-2x-8=0\ (1)$ και $C_2: x^2+y^2-6x+8=0\ (2)$.
α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα K(1,0), Λ(3,0) και ακτίνες $\rho_1=3$, $\rho_2=1$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ). (Μονάδες 5)
ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2. (Μονάδες 9)

15081.Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0$ και $C_2: x^2+y^2-6\sqrt{2}x+9=0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K\left(-\sqrt{2},0\right), \Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1=1, \rho_2=3$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. (Μονάδες 7)

15082.Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: (x-2)^2+(y-3)^2=8$ και $C_2: (x-7)^2+(y+2)^2=18$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2, αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων. (Μονάδες 8)

15177.Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση $c_1: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x-2$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων Ρ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 06)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους. (Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2. (Μονάδες 06)

15189.Δίνονται τα σημεία Α(−2,0) και Β(2, −2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο ΑΒ έχει εξίσωση C: $x^2+(y+1)^2=5$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB)=5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y+7=0$. (Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C. (Μονάδες 6)

15272. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(3, 2) βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 12)

15432.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0$ (1) με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων. (Μονάδες 7)

δ) Για κ = 1 να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο Γ(2,2). (Μονάδες 8)

15628. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5 - 2k = 0$ (Ι), όπου $k \in (0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (Ι) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2, k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$. (Μονάδες 8)

15646. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_1 : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα Κ,Λ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ, των κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα ΒΓ, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.. (Μονάδες 10)

15993. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

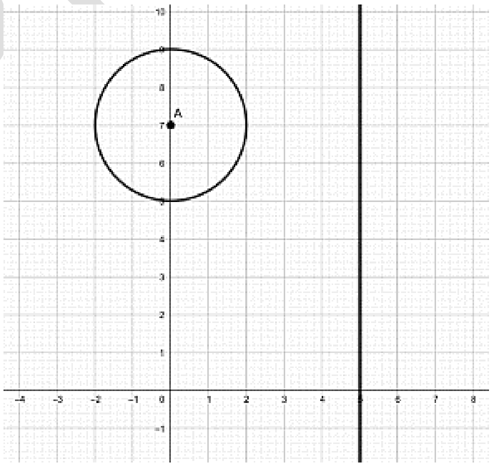
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Αν Α(1,0) και Β(3,0) είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο Μ(α, β) επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$. (Μονάδες 05)

15791. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου Α και την ευθεία (ε) : $x = 5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1. (Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2 . (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ΑΒ σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου Β. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2 , που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε). (Μονάδες 10)

16191. Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x, ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$,να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ (1). (Μονάδες 08)

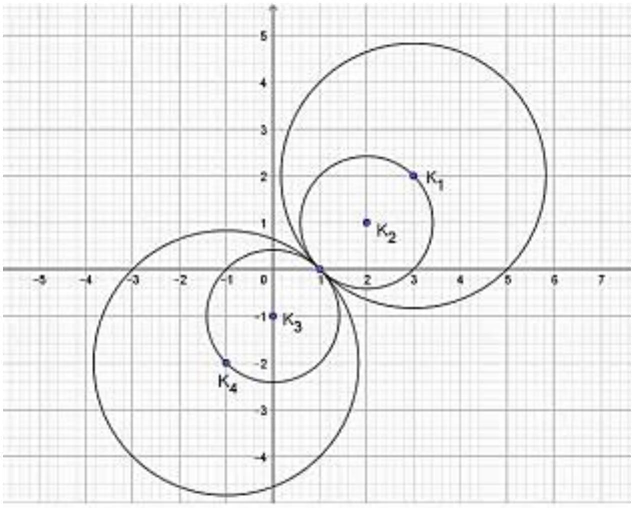
ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λx + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45° ; (Μονάδες 07)

15826. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2(\lambda+1)x-2\lambda y+2\lambda+1=0$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ. (Μονάδες 7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda=0$; (Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1,K_2,K_3,K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1). (Μονάδες 5)

18237. Θεωρούμε τα σημεία Α(-1, 2), Β(3, 2), Γ(1, 4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία ε: $y=x+1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

18247. Δίνονται τα σημεία Ο(0,0), Α(α,0) και Β(0,β) όπου α, β > 0.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 5)

ii. την απόσταση (ΟΜ) . (Μονάδες 5)

β) Αν $(OM)=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM)=\dfrac{(AB)}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ. (Μονάδες 7)

18415. Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία ε: $2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

18416. Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ (3,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$. (Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

18467. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3)$: (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho = 3$. (06 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. (04 μονάδες)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής ΑΒ. (08 μονάδες)

δ) Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y = x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΚΑΒ. (07 μονάδες)

18521. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(2,4) και Γ(3,1).

α) Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma = 90°$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ. (Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 10)

18567. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A\left(2\sqrt{2},0\right)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τις εξισώνεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 08)

18569. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 1$.

α) Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0). (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 150°. (Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β. (Μονάδες 06)

18570. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β

i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

18781. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-6x+5=0$ και $C_2: x^2+y^2=1$.

α) Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση του κύκλου C_1 γράφεται στη μορφή $(x-3)^2+y^2=4$. (Μονάδες 5)

ii. Οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε:

i. Το σημείο επαφής των δύο κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 6)

ii. Την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 4)

γ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά. (Μονάδες 6)

18871. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου. (Μονάδες 07)

β)

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο (c) και διέρχονται από το σημείο Α έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2x-y=5$ και $(\varepsilon_2): x+2y=5$. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, όπου Β και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον κύκλο. (Μονάδες 08)

20091. Τα σημεία A(-7, -1) και B(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 04)

ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ. (Μονάδες 08)

β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y=-12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

20229. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για λ= 0. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

20650.α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x+2$, $\varepsilon_2: y=x-2$ και τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. (Μονάδες 04)

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M, του AB. (Μονάδες 02)

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. (Μονάδες 06)

β) Ο κύκλος (K,ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2. Αν το κέντρο K του κύκλου (K,ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x=\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K, συναρτήσει του λ. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K,ρ), για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 08)

20651.Θεωρούμε τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,4)$.

α) Να βρείτε όλα τα σημεία Μ στον άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C με διάμετρο ΑΒ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία Μ που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά. (Μονάδες 10)

20700.Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν Ο η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x-2)^2+(y-2)^2=8$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y=8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C. (Μονάδες 9)

20863.Δίνονται τα σημεία Α(1,0) και Β(3,0).

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 07)

β) Αν Κείναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ),να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο Κ και διέρχονται από τα σημεία Α και Β συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1,\ \lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία $(\varepsilon): x+\lambda y-1=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c)στο σημείο Α(1,0). (Μονάδες 05)

21154. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

21159.Δίνονται τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) με α, β > 0 και α + β =10 .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή Ο των αξόνων και ένα σημείο Ρ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ για τις διάφορες τιμές των α και β. (Μονάδες 8)

21276.Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

• τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α (λ-1, 2λ+1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

• τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό Σ (- 4, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-1,3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2. (Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ’ ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1. (Μονάδες 6)

21349.Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2+y^2-9x-3y+10=0$ (1) και $4x+3y-10=0$ (2) αντίστοιχα.

α) i. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου (C). (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)

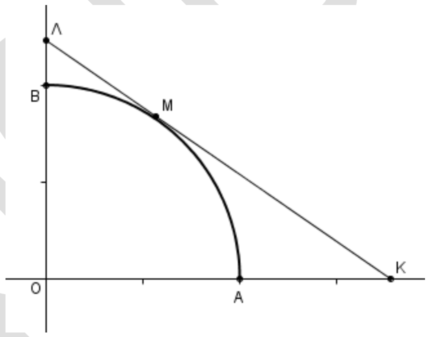
iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C). (Μονάδες 5)

β) Αν είναι Α(1,2) και Β(4, −2), τότε:

iv. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$. (Μονάδες 5)

v. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ο. (Μονάδες 6)

21683.Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2+y^2=4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1,\, y_1),\ 0<x_1<2$ ανάμεσα στα Α, Β.



α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο Μ και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της Κ, Λ με τους άξονες. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος ΚΛ είναι $d=\dfrac{8}{x_1y_1}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το μήκος d_o του τμήματος ΚΛ όταν $x_1=\sqrt{2}$. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το Μ κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d\ge d_o$. (Μονάδες 7)

21696.Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=0$, (1) και η ευθεία $\varepsilon: x-2y+3=0$.

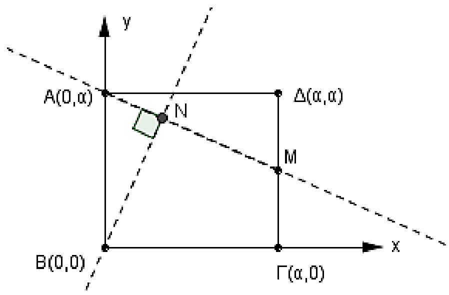
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1,\, \varepsilon_2$ του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2)=2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; (Μονάδες 8)

22061.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς α ($\alpha>0$) και κορυφές $A(0,\alpha)$, $B(0,0)$, $\Gamma(\alpha,0)$ και $\Delta(\alpha,\alpha)$. Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και το τμήμα ΒΝ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. ΑΜ (Μονάδες 5)

ii. ΒΝ (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού. (Μονάδες 10)

22062. Δίνεται η οικογένεια κύκλων

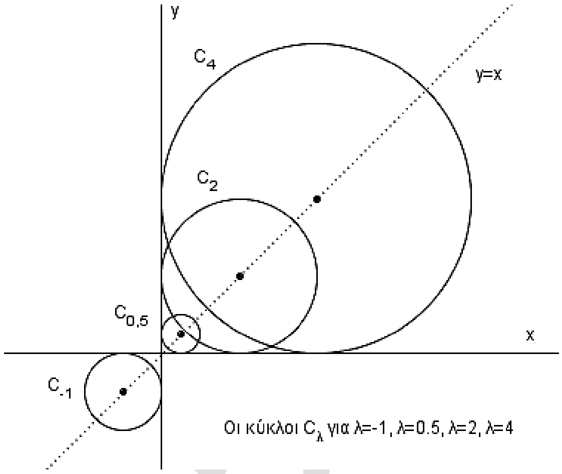
$C_\lambda : (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$, με $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου C_λ, $\lambda \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda \neq 0$.
Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$. (Μονάδες 5)

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = \alpha$ εφάπτεται σε ένα, και μόνο ένα, από τους κύκλους C_λ. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$. (Μονάδες 5)



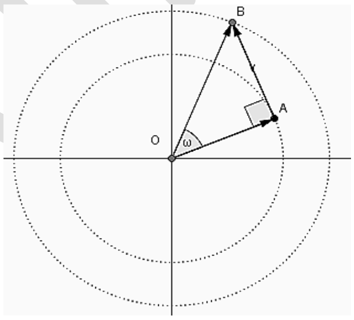
ε) Έστω $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\alpha x + \beta y = 1$ εφάπτεται σε δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ. (Μονάδες 5)

22066. Θεωρούμε το σημείο $A = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και το σημείο $B = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. (Μονάδες 9)

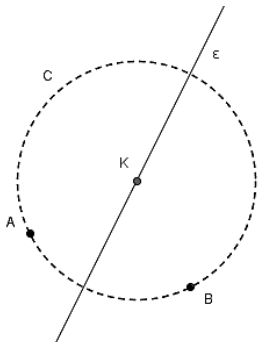


22069. Τα σημεία $A(3,2)$ και $B(6,\ 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο Κ του οποίου διέρχεται η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 7$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του κύκλου C. (Μονάδες 12)

β) την ακτίνα R του κύκλου C. (Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 5)



22214. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y), A(-1,0), B(1,0) για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$. (Μονάδες 07)

22223. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda-1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$. (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ. (Μονάδες 08)

ii. Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ και $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 09)

22239. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x+4y=25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 2.

α) i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού; (Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 08)

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x+y+\lambda-2=0$, με $\lambda\neq0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

22264. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+\lambda y+\lambda-1=0\ (1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x+y+2=0$. (Μονάδες 9)

γ) Για λ = 1, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 9)

22280. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O(0,0) θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2+y^2-6x-8y+21=0\ (1)$ και $x^2+y^2+2x-2y+1=0\ (2)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (Μονάδες 08)

γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N. (Μονάδες 05)

22508. Οι κορυφές Α και Γ, ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία (1,4) και (3,0) αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

33696. Το κέντρο ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ε): y=2x – 1. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα $\rho=3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ): x + y -2 = 0 εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $(x-3)^2+(y-5)^2=18$. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της ευθείας ΚΑ είναι η $x-y+2=0$. (Μονάδες 05)

ii. Είναι Α(0,2). (Μονάδες 04)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (c). (Μονάδες 07)

Παραβολή
2ο Θέμα

18242. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C. (Μονάδες 8)
β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4). (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε). (Μονάδες 9)

18701. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο Α(2,2). (Μονάδες 10)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής. (Μονάδες 9)

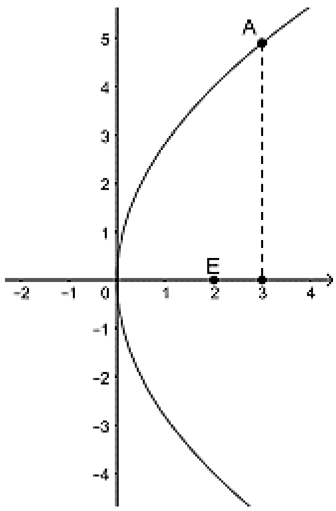
20235. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

21248. Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1 : x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου.

α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x,y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x, y. (Μονάδες 8)
ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M,\delta)$ του σημείου Μ από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y. (Μονάδες 8)
β) Αν ισχύει $(ME) = d(M,\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. (Μονάδες 9)

21306. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή O(0,0) και εστία Ε(2,0), όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$. (Μονάδες 10)
β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. (Μονάδες 06)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο Α. (Μονάδες 09)

21307. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε (0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(- 6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)
γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

22190. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x\ (1)$.

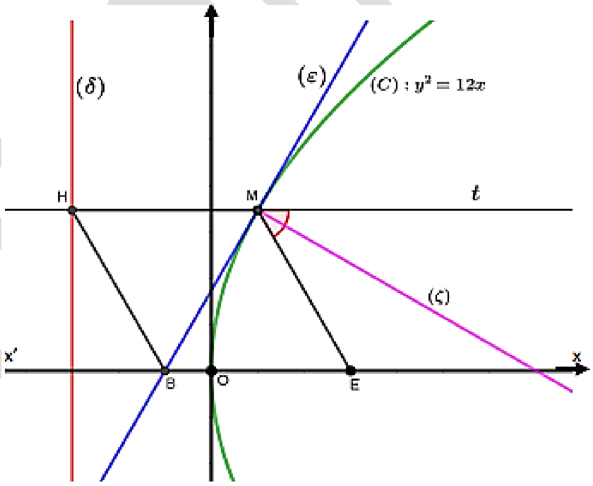
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,-1) είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 05)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της Α(1,-1). (Μονάδες 08)

22267. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x\ (1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ………………….. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(….., …..) και η διευθετούσα έχει εξίσωση …………». (Μονάδες 09)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2). (Μονάδες 08)
γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

4ο Θέμα

15394. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M\left(1, 2\sqrt{3}\right)$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα x΄x, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.



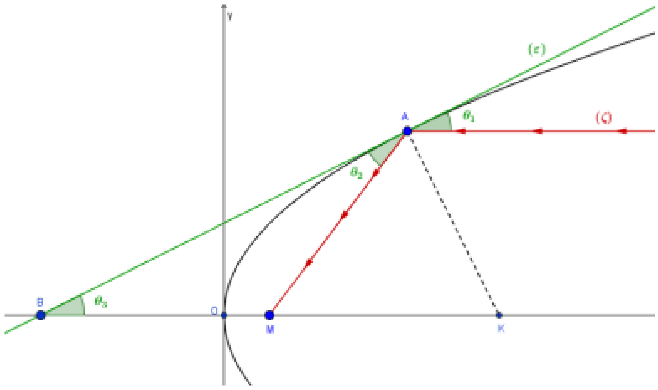
α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$. (Μονάδες 6)

18245. Δίνεται η παραβολή $C:\ y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0\ (1), \lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ. (Μονάδες 6)
δ) Έστω $M(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E. (Μονάδες 7)

18372. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,- 4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.
α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 09)
β) Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ. (Μονάδες 08)
γ) Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

18870. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο A(4,4) και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M.



Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

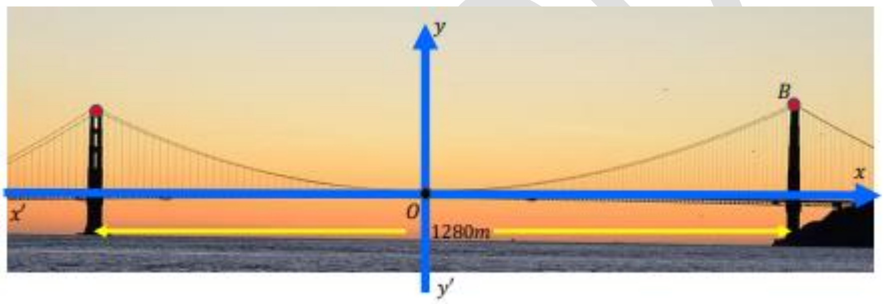
α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής. (Μονάδες 06)

19047. Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους 1280m, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160m. Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ΄αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2 = 2560y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής. (Μονάδες 8)

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $B(640,160)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $E\Delta = EB$. (Μονάδες 8)

20090. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, ένα σημείο της.

α) Αν A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής,

- **i.** Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M και A συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του σημείου M. (Μονάδες 05)
- **ii.** Αν E είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο M για το οποίο $(MAE) = \frac{5}{8}$ τ.μ. (Μονάδες 12)

β) Αν $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AMEM΄ είναι ρόμβος, όπου E είναι η εστία της παραβολής και M΄ το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x. (Μονάδες 08)

20862. Δίνονται τα σημεία $M(-2,2)$, $E\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση $y=\dfrac{1}{2}$.

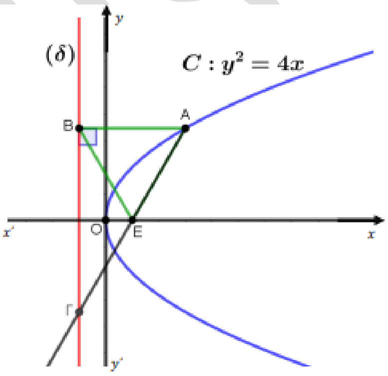
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το σημείο Μ και σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο Ε και την ευθεία (ζ). (Μονάδες 06)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της καμπύλης $C:\ x^2+2y=0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1), με εξίσωση $y=x+4$. (Μονάδες 07)

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης C και των ευθειών (ε_1) και (η). Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$. (Μονάδες 07)

20684. Ένα σημείο $A(x_A,\ y_A)$ της παραβολής $C:\ y^2=4x$ με $x_A>0,\ \ y_A>0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία ΑΕ τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ, έτσι όμως ώστε η εστία Ε της παραβολής C, να είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Επίσης, από το σημείο Α φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω Β το σημείο τομής, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

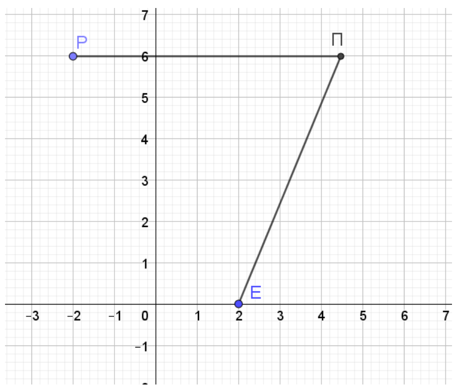


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $x_A=3$ και $y_A=2\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

21653. Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa,\lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο Ε(2,0) και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2,\lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(\Pi E)=(\Pi P)$.



α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2,\lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $\Pi P\perp(\delta)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa,\lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 7)

δ) Αν $y^2=8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π. (Μονάδες 8)

20092. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$, το σημείο της $M\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

$\varepsilon:\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}+1=0$.

α) i. Να δείξετε ότι h ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την ε. (Μονάδες 07)

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει του άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ. (Μονάδες 05)
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με η παράλληλή στην ε. (Μονάδες 08)
ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ε; (Μονάδες 05)

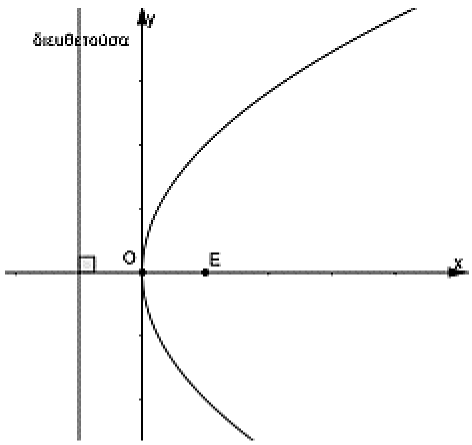
21690.Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε. (Μονάδες 8)
β) Έστω $M(x_o, y_o)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M, \varepsilon) = \dfrac{(y_o + 2)^2 + 6}{5}$. (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία. (Μονάδες 5)
δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε. (Μονάδες 4)

21883.Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 4y$ και η ευθεία $y = x - 2$.
α) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων 0xy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε. (Μονάδες 8)
γ) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από την ευθεία ε είναι $d(M,\varepsilon) = \dfrac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Μ της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία . (Μονάδες 6)

22465.Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον x΄x. Η απόσταση της εστίας Ε από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η Ε(2,0), η διευθετούσα της είναι η δ : x= -2 και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της Α(2,4) είναι η ε: $y = x + 2$. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της Α(2,4). (Μονάδες 7)

22275.Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).
α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

1ο Θέμα

21152.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα η $\vec{\eta} = (A, B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο Ε(1,0).

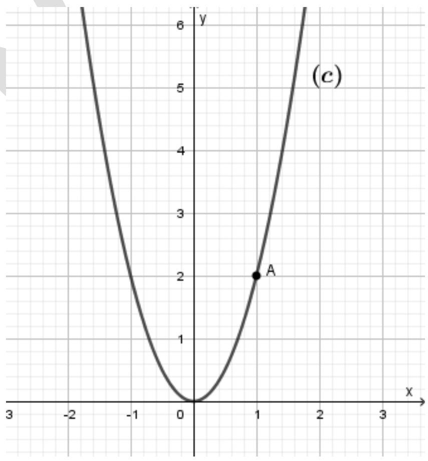
v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. (Μονάδες 15)

3ο Θέμα

20866. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον y΄y και διέρχεται από το σημείο Α(1,2)



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα της παραβολής. (Μονάδες 04)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο Α΄(-1,2). (Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα y΄y και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε. (Μονάδες 07)

Έλλειψη
2ο Θέμα

20658. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha=4$, $\beta=2$ και $\gamma=2\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

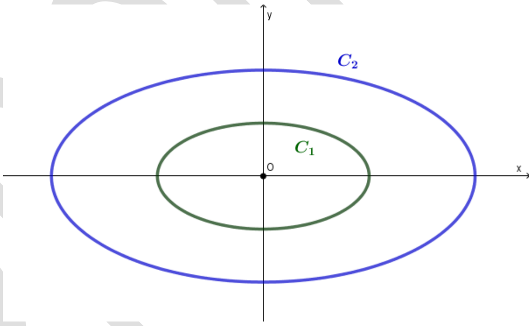
β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c). (Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2+y^2=16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.(Μονάδες 09)

20718. Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της. (Μονάδες 8)
β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 9)

20865. Δίνονται οι ελλείψεις
$C_1: x^2+4y^2=4$, $C_2: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων. (Μονάδες 14)
β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές. (Μονάδες 11)

20883. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2+25y^2=400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ΄, ΑΑ΄ του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε΄. (Μονάδες 12)
β) Αν Ε΄(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε΄ και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y. (Μονάδες 13)

21308. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)
β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)
γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Β(0,4). (Μονάδες 08)

21647. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E΄(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:
α) την εξίσωση της C. (Μονάδες 10)
β) την εκκεντρότητά της C. (Μονάδες 7)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4,\frac{9}{5}\right)$. (Μονάδες 8)

21648. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E΄(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4,\frac{12}{5})$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε την εξίσωση της C. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4,\frac{12}{5})$. (Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\sqrt{1369}=37$

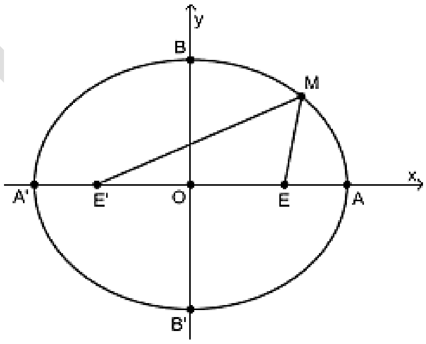
22168.Δίνονται η παραβολή $y^2=2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο A(1,2), να βρείτε:
i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)
ii. Την εστία E της παραβολής. (Μονάδες 05)
β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O, αν η μια εστία της είναι το σημείο E(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)

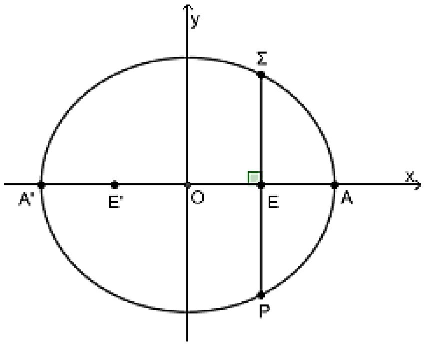
22192.Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1\,(1)$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E΄. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0,9) είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 05)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της B(0,9). (Μονάδες 10)

22268.Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\,(1)$.
α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ……………….. Οι εστίες της E και E΄ , έχουν συντεταγμένες E(….., …..) και E΄(….., …..) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ….. και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ………».
(Μονάδες 15)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της B(0,-2). (Μονάδες 10)

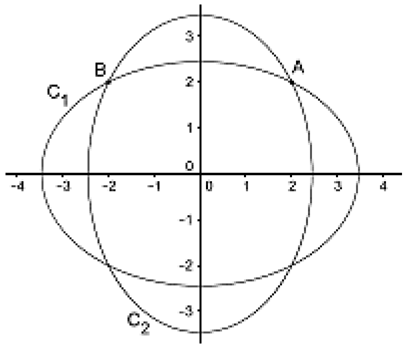
22556.Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0), A(5,0), B'(0,-4)$ και $B(0,4)$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A)=10$ και $(B'B)=8$.
(Μονάδες 10)
ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.
(Μονάδες 10)
β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης.
Να αποδείξετε ότι $(ME')+(ME)=10$. (Μονάδες 5)



22558.Η έλλειψη του διπλανού σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A)=8$.
α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.
(Μονάδες 12)
β) Έστω Σ και P τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία E(2,0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική τεταγμένη.
i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$. (Μονάδες 8)
ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣP. (Μονάδες 5)



22564. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ και $C_2: \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$.



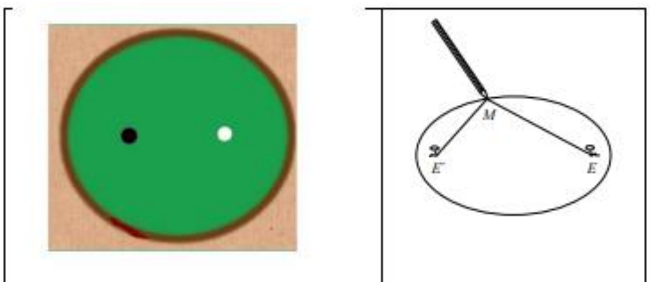
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β είναι αντίστοιχα $x+2y-6=0$ και $-2x+y-6=0$.
(Μονάδες 10)
γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες. (Μονάδες 5)

4ο Θέμα

22273. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (1)$.
α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :
i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.
ii. Των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

20722. Έστω $K(x,y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE)+(KE')=10$, όπου Ε(3,0) και Ε΄(-3,0).
α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
Έστω $C: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και $(\varepsilon): 3x+5y=25$.
β) Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M. (Μονάδες 7)
γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε. (Μονάδες 6)
δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $E\hat{M}E'$ και να βρείτε την εξίσωσή της. (Μονάδες 6)

20726. Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E'. Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).



Σχήμα 1 Σχήμα 2

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C. (Μονάδες 10)

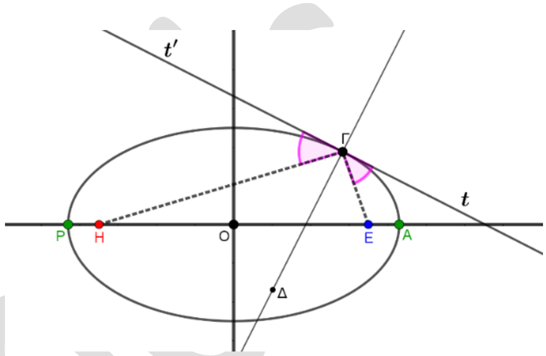
β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της. (Μονάδες 5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E. Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

20666. Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι ΡΗ =147,5 εκατομμύρια km και η μέγιστη ΑΗ = 152,5 εκατομμύρια km. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία Η και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του ΗΕ και x΄x τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας y΄y είναι η μεσοκάθετος του ΗΕ. Τέλος, η ευθεία ΓΔ είναι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε $(\text{PA}) = 300 \text{ km}$, $(\text{HE}) = 5 \text{ km}$ και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{1}{60}$.

(Μονάδες 10)

β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΗΓΕ. (Μονάδες 8)

γ) Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{\Gamma}H$ και $t\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

Υπερβολή
2ο Θέμα

16128. Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε΄ και Ε. (Μονάδες 10)

β) Αν το Ν είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $\left|(NE')-(NE)\right|$. (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

17942. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της. (Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην (C). (Μονάδες 13)

20721. Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C. (Μονάδες 8)

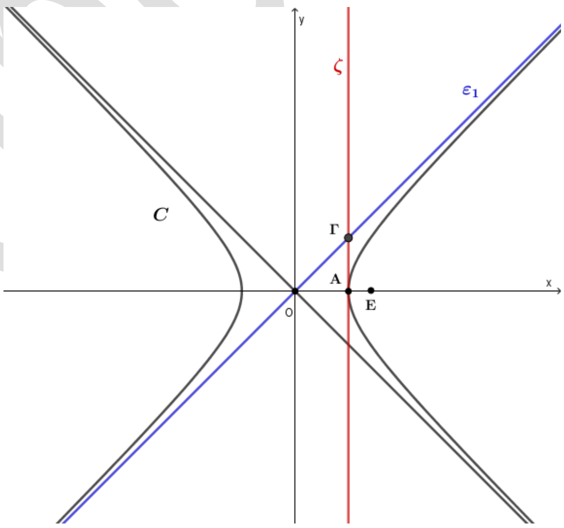
γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 9)

20869. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C:\ x^2-y^2=1$, η εστία της Ε, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.

α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες ε_1, ε_2 της υπερβολής. (Μονάδες 10)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ. (Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$. (Μονάδες 08)



21218. Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2-y^2=1$, $(C_2): y^2-x^2=1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1\left(\sqrt{2},0\right)$, $E_1'\left(-\sqrt{2},0\right)$. (Μονάδες 12)

β) Αν E_2, E_2' οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E_1'E_2'$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 13)

21649. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C. (Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C. (Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5,\frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

21651. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5,\frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

22169. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με ασύμπτωτη την $y=\frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)
ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ στο σημείο της $\left(5,\frac{9}{4}\right)$. (Μονάδες 10)

22196. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2-y^2=25$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής. (Μονάδες 10)
γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

22269. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ (1).

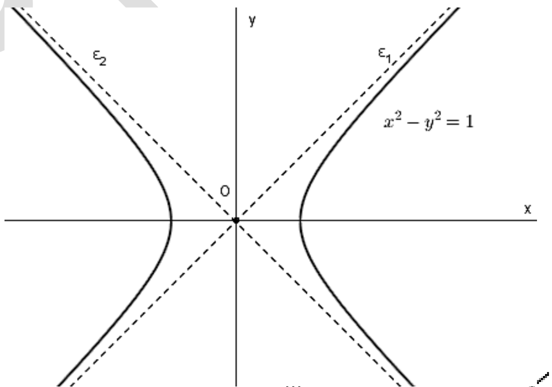
α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :
i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.
ii. Την εκκεντρότητά της.
iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A\left(\sqrt{5},\frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 10)

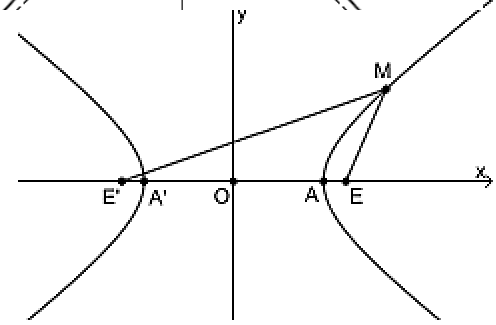
22051. Δίνεται η υπερβολή $x^2-y^2=1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:

α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα. (Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 12)



22559. Η υπερβολή στο διπλανό σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.



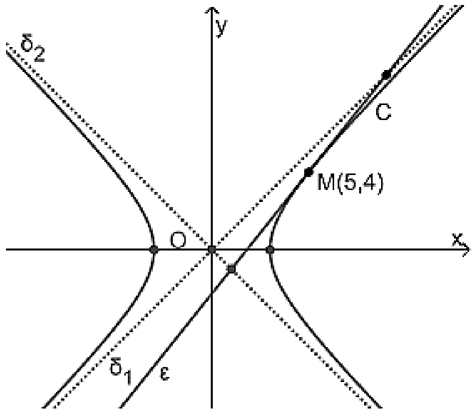
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω Μ ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $\left|(ME')-(ME)\right|=16$. (Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την εστία Ε΄. (Μονάδες 5)

22561. Στο διπλανό σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1, δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της M(5,4).



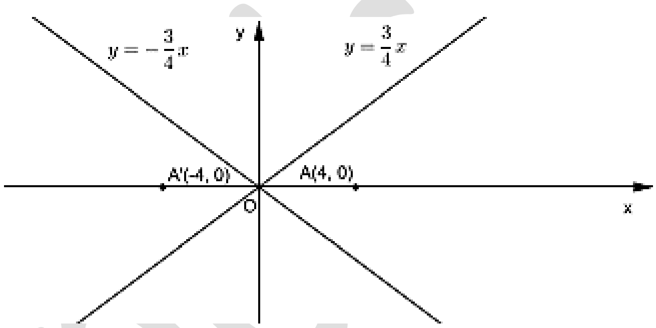
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$. (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2. (Μονάδες 9)

22567. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. α = 4 και β = 3. (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C. (Μονάδες 5)

22566. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

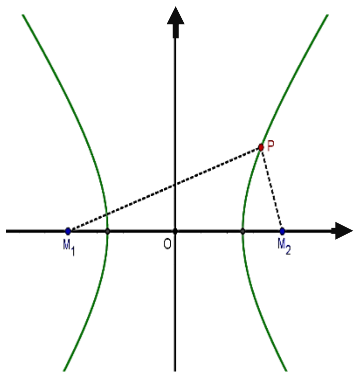
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι A(1,0) και A΄(-1,0) (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$ (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

20653. Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2.

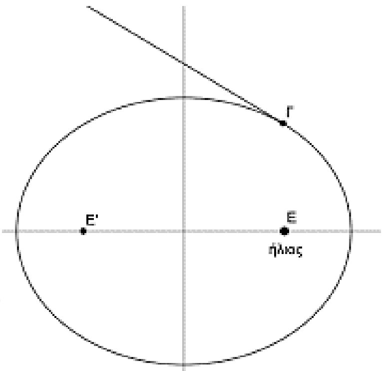


α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1) - (PM_2) = 1360$ m. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2. (Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι $1378\ \text{m}$, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{111^2}=1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2=1369$. (Μονάδες 9)

22174. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.



α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Οy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5). (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με $x > 0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών; (Μονάδες 07)

21657. Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα xx' της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C. (Μονάδες 6)

ii. την εκκεντρότητα της C. (Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C. (Μονάδες 8)

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C; Αιτιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

32206. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5,\frac{9}{4})$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της. (Μονάδες 6)

Δίνεται ότι $\sqrt{1681}=41$.

3ο Θέμα

17944. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, εστιακή απόσταση $EE'=2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2, \beta=\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Α ' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

1ο Θέμα

21973.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2=2px$, έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2+y^2=\alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$. (Μονάδες 15)