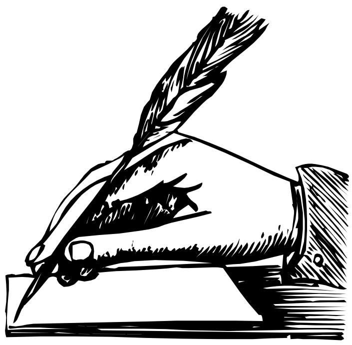
mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016

Λύσεις των θεμάτων



Έκδοση 1η **(18/05/2016, 23:00)**

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=54288

Συνεργάστηκαν οι:

Ανδρέας Βαρβεράκης, Σπύρος Βασιλόπουλος, Βασίλης Κακαβάς, Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης, Νίκος Κατσίπης, Χρήστος Κυριαζής, Στάθης Κούτρας, Γρηγόρης Κωστάκος, Θάνος Μάγκος, Βαγγέλης Μουρούκος, Ροδόλφος Μπόρης Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Γιώργος Ρίζος, Γιώργος Ροδόπουλος, Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(\alpha,\ \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,\ x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0,\ \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις $f,\ g$ λέγονται ίσες.

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to \mathbb{R}$, αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\alpha)-G(\beta).$$

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνον αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη Μ και μία ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 262, (περίπτωση i)

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 246

Α4. **α)** **Λάθος,** Σχολικό Βιβλίο σελ. 334

β) **Σωστό**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 166

γ) **Λάθος,** Σχολικό Βιβλίο σελ. 252

δ) **Σωστό,** Σχολικό Βιβλίο σελ. 152

ε) **Σωστό**, Σχολικό Βιβλίο σελ. 195

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in IR$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ:

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$.

- Για $x>0$ έχουμε $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- Για $x<0$ έχουμε $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

Β2. Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=\dfrac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$.

Είναι

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}=0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}>0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2>0\Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|<\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}<0 \overset{(x^2+1)^3>0}{\Leftrightarrow} -6x^2+2<0\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{3}\Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή } x>\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα η f κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Η συνάρτηση έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ δηλαδή στα σημεία

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right) \text{ και } B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right).$$

B3. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού είναι συνεχής στο IR.
Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

και ομοίως

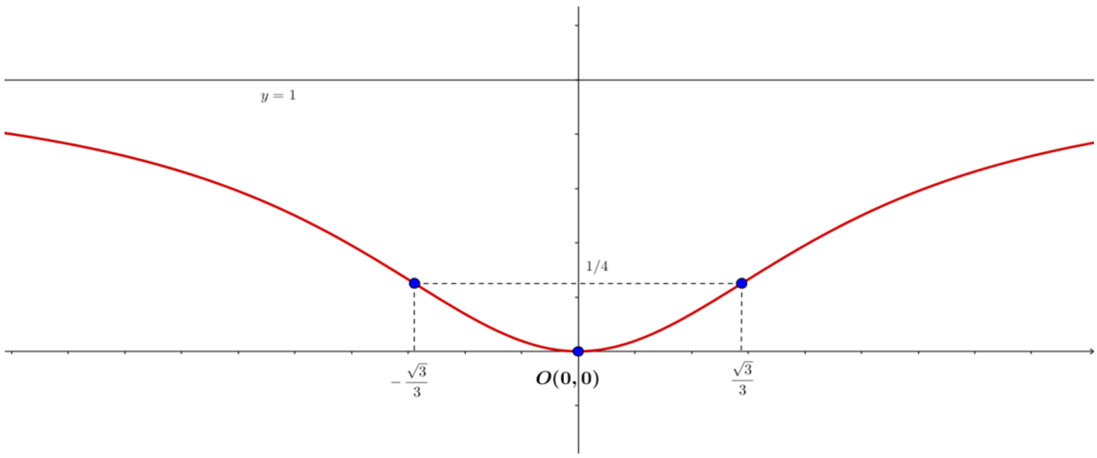
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1\,.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4. Η μονοτονία, τα ακρότατα, η καμπυλότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−		−	0	+		+	
$f''(x)$		−	0	+		+	0	−	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘		↗	$\frac{1}{4}$	↗	1

Με βάση τα συμπεράσματα των Β1, Β2, Β3, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f.



Σχόλιο: Η παρατήρηση ότι η f είναι άρτια διευκολύνει την επίλυση του θέματος.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f\left(x+3\right)-f\left(x\right) \quad \text{όταν } x\in[0,+\infty).$$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

Γ1. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x^2}-x^2-1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'\left(x\right)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$.

Είναι $x^2\geq0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq1\Leftrightarrow e^{x^2}-1\geq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x<0,\quad f'(x)>0\ \Leftrightarrow\ x>0\quad \text{και}\quad f'(x)=0\ \Leftrightarrow x=0.$$

Αφού είναι συνεχής, η μονοτονία της φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$\searrow$ Ο. ε $\nearrow$

Επομένως η f(x) έχει ελάχιστο στο x=0 το f(0) = 0, οπότε

$$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)\geq0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0.

Άρα η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Γ2. Επειδή $e^{x^2}-x^2-1\geq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η δοσμένη σχέση δίνει ισοδύναμα ότι:

$$|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow(e^{x^2}-x^2-1)^2=0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow x=0.$$

Άρα, η f έχει μοναδική ρίζα το $x=0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό.

Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Έτσι:

- αν $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$,
- αν $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

Επειδή, $f(0)=0$, θα είναι:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ \text{για κάθε } x\in[0,+\infty) \text{ ή } f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ \text{για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

Επίσης, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό.
Επομένως η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

Έτσι:

- αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$,
- αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, τότε σε αυτό το διάστημα είναι $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

Επειδή, $f(0)=0$, τότε

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ \text{για κάθε } x\in(-\infty,0] \text{ ή } f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ \text{για κάθε } x\in(-\infty,0].$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω,
η f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους:

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in IR$ ή β) $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1),\ x\in IR$ ή

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & \text{αν } x>0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & \text{αν } x\le 0 \end{cases}$ ή δ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & \text{αν } x<0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & \text{αν } x\ge 0 \end{cases}$

Γ3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR, με

$$f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$$

και

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right).$$

Επειδή $x^2\ge 0$ για κάθε $x\in IR$ είναι $e^{x^2}\ge 1$.

Επίσης είναι $4x^2e^{x^2}\ge 0$ για κάθε $x\in IR$, οπότε $f''(x)\ge 0$ για κάθε $x\in IR$ και $f''(x)=0$ αν και μόνο αν $x=0$.

Οπότε, αφού η f' είναι συνεχής στο $x=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η f θα είναι κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x)=f'(x+3)-f'(x).$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο IR, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)\subseteq IR$.

Αφού για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $x+3>x$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα έχουμε:

$$f'(x+3)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και $1-1$.

Η εξίσωση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, για $x\in[0,+\infty)$ γράφεται ισοδύναμα :

$$h(|\eta\mu x|)=h(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x.$$

Ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$, για $x\in\mathbb{R}$, με το ίσον να ισχύει μόνο αν $x=0$.

Αν $x\ge0$ προκύπτει $|\eta\mu x|\le x$, με το ίσον να ισχύει μόνο αν $x=0$.

Άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)\cdot\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Δ1. Έχουμε διαδοχικά

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot \eta\mu x\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\cdot \eta\mu x\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0=\pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi.$$

Επίσης, για $x\neq 0$, είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 = 0, (ως παραγωγίσιμη), θα είναι $f(0)=0$, οπότε f(π) = π.

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1.$$

Άρα $f'(0)=1$.

Δ2.

α) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in IR$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και το x_0 είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού . Άρα από το θεώρημα Fermat παίρνουμε ότι $f'(x_0)=0$.

Οι συναρτήσεις στα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης είναι παραγωγίσιμες (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, οπότε η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο IR (ως σύνθεση παραγωγίσιμων), η f(f(x)) είναι παραγωγίσιμη στο IR (ως σύνθεση παραγωγίσιμων) και η e^x είναι παραγωγίσιμη στο IR) και ίσες συναρτήσεις άρα και οι παράγωγοί τους είναι ίσες. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης παίρνουμε :

$$e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$$

Αυτή για $x=x_0$ δίνει :

$$e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=0,$$

που είναι άτοπο, αφού $f'(x_0)=f'(0)=1\neq 0$. Άρα τελικά η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

β) Αφού η $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in IR$ και η f' είναι συνεχής, από την υπόθεση προκύπτει ότι η f' θα διατηρεί το πρόσημό της στο IR και με

$$f'(0)=1>0\Rightarrow f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in IR$$

και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ3. Αφού η f(x) είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο IR, άρα $f(IR)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$ και εφόσον έχει σύνολο τιμών το IR (δεδομένο), επομένως, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$.

Η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές για $x\in(\alpha,\ +\infty)$, με α > 0, συνεπώς:

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}\Rightarrow-\frac{2}{f(x)}\le\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}$$

Είναι όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0.$$

Δ4. Στο ολοκλήρωμα $\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx$ θέτουμε $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$. Επομένως:

$$x=1\Rightarrow u=0 \text{ και } x=e^\pi\Rightarrow u=\pi.$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi f(u)du:\ (1).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR άρα και στο [0, π] και ισχύει f(0) = 0, f(π) = π, θα είναι

$$0\le u\le\pi\Rightarrow f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(u)\le\pi$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα, αφού το ίσον δεν ισχύει παντού (βλέπε και τη χρήσιμη πρόταση με την απόδειξή της στις εναλλακτικές λύσεις στο τέλος του Δελτίου),

$$0<\int_0^\pi f(u)du<\int_0^\pi \pi du=\pi^2\Rightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$$

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Γ1. Ισχύει η ανισότητα $e^y\ge y+1$ με το ίσον να ισχύει αν και μόνο αν y = 0, οπότε $e^{x^2}\ge x^2+1$ με ισότητα αν και μόνο αν x = 0. Άρα η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, έχει μοναδική λύση το $x=0$.

Γ1. Ισχύει ότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x=1$.

Άρα, αν $x=e^y$, $y\in IR$, τότε $\ln e^y\le e^y-1$, οπότε $e^y\ge y+1$, για κάθε $y\in IR$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $y=0$.

Άρα, $e^{x^2}\ge x^2+1$, για κάθε $x\in IR$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x^2=0$, δηλαδή μόνο αν $x=0$.

Οπότε, η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, έχει μοναδική λύση το $x=0$.

Γ1. Η εξίσωση γράφεται $g(x^2)=0$ όπου $g(x)=e^x-x-1$ η οποία έχει παράγωγο $g'(x)=e^x-1$.

Για $x>0$ είναι $g'(x)>0$, για $x<0$ είναι $g'(x)<0$ και για $x=0$ είναι $g'(0)=0$.

Συνεπώς η g ως συνεχής στο IR είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $g(0)=0$. Συνεπώς η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=0$ είναι η $x=0$. Άρα η αρχική εξίσωση γίνεται $g(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

ΣΧΟΛΙΟ: Το ότι η μοναδική λύση της $g(x)=0$ είναι το 0 μπορεί να αποδειχθεί μέσω της γνωστής ανισότητας $e^x \geq x+1$ με ισότητα μόνο στο 0, αφού όμως πρώτα αποδειχθεί.

Γ3. Είναι $f'(x)=(e^{x^2}-x^2-1)'=2x(e^{x^2}-1),\ x\in R$.

Τώρα για $0\leq x_1<x_2 \Rightarrow 0\leq x_1^2<x_2^2 \Rightarrow 1\leq e^{x_1^2}<e^{x_2^2} \Rightarrow 0\leq e^{x_1^2}-1<e^{x_2^2}-1$ (1)

Ακόμη ισχύει ότι $0\leq 2x_1<2x_2$ (2) και πολλαπλασιάζοντας τις (1),(2) προκύπτει ότι

$$2x_1(e^{x_1^2}-1)<2x_2(e^{x_2^2}-1) \Rightarrow 0\leq f'(x_1)<f'(x_2)$$

που σημαίνει ότι η f' είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$f'(-x)=-2x\left(e^{(-x)^2}-1\right)=-f'(x),\ x\in R$$

επομένως για $x_1<x_2\leq 0 \Rightarrow -x_1>-x_2\geq 0$ άρα από προηγούμενο

$$f'(-x_1)>f'(-x_2) \Rightarrow -f'(x_1)>-f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$$

που σημαίνει ότι η f' είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και επειδή η f' συνεχής στο $x=0$ η f' είναι γνήσια αύξουσα στο IR άρα η f κυρτή στο IR.

Γ4. Θα δείξουμε ότι η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

Υποθέτουμε λοιπόν, αντίθετα, ότι υπάρχει $x_0>0$ που να είναι λύση της εξίσωσης.

Ισχύει $|ημx_0|<x_0$ (από τη γνωστή ανισότητα $|ημx|\leq|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$) καθώς επίσης $|ημx_0|<|ημx_0|+3$ και $x_0<x_0+3$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|ημx_0|+3<x_0$ τότε $|ημx_0|<|ημx_0|+3<x_0<x_0+3$ και επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[|ημx_0|,|ημx_0|+3\right],\left[x_0,x_0+3\right]$ άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(|ημx_0|,|ημx_0|+3\right),\xi_2\in\left(x_0,x_0+3\right)$ ώστε η εξίσωση να γράφεται:

$$3f'(\xi_1)=3f'(\xi_2)$$

απ΄όπου $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και 1-1 κι έτσι παίρνουμε $\xi_1=\xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1,ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

- Αν $x_0\leq|ημx_0|+3$ τότε $|ημx_0|<x_0\leq|ημx_0|+3<x_0+3$.

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$f(x_0)-f\left(|ημx_0|\right)=f(x_0+3)-f\left(|ημx_0|+3\right)$$

Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$\left[|\eta\mu x_0|,x_0\right],\left[|\eta\mu x_0|+3,x_0+3\right]$ άρα υπάρχουν $\xi_1\in(|\eta\mu x_0|,x_0)$, $\xi_2\in\left(|\eta\mu x_0|+3,x_0+3\right)$ ώστε η εξίσωση να γράφεται:

$$(x_0-|\eta\mu x_0|)f'(\xi_1)=(x_0-|\eta\mu x_0|)f'(\xi_2)$$

και αφού $x_0-|\eta\mu x_0|\neq 0$ άρα $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) άρα είναι και 1-1 κι έτσι παίρνουμε $\xi_1=\xi_2$, πράγμα άτοπο αφού τα ξ_1,ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Δ1. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$, οπότε κοντά στο 0 έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$

Αφού η f(x) είναι συνεχής στο x_0 = 0, είναι f(0) = 0. Οπότε $f(\pi)=\pi$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=1\Leftrightarrow\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}}=1\Leftrightarrow\frac{f'(0)}{1}=1\Leftrightarrow f'(0)=1.$$

διότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x},x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)\subseteq IR$.

Ισχύει από την υπόθεση $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1\quad(2)$.

Αλλά $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Rightarrow f(x)=g(x)\eta\mu x$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$ άρα

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\left(\lim\limits_{x\to 0}g(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0\overset{f\text{ συνεχη στο }0}{\Rightarrow}f(0)=0\quad(3)$ κι έτσι από την $f(0)+f(\pi)=\pi$ (που έχει δειχθεί προηγουμένως) παίρνουμε $f(\pi)=\pi$

Είναι

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)\overset{\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1}{=}\left(\lim_{x\to 0}g(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$=1\cdot 1=1\Rightarrow f'(0)=1.$$

Δ3. Για κάθε $x>\pi\overset{f\text{ γνησιως αυξουσα}}{\Rightarrow}f(x)>f(\pi)=\pi\overset{f\text{ γνησιως αυξουσα}}{\Rightarrow}f(f(x))>f(\pi)=\pi\Rightarrow$

$f(f(x))+e^x>e^x+\pi\Rightarrow e^{f(x)}+x>e^x+\pi>e^x\Rightarrow e^{f(x)}>e^x-x\quad(1)$.

Για τη συνάρτηση $t(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $t''(x)=e^x>0, x\in\mathbb{R}$ άρα κυρτή στο $\mathbb{R}$, η εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $M(0,1)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=x+1$ και λόγω της κυρτότητας είναι

$$e^x\geqslant x+1\Rightarrow e^x-x\geqslant 1,\ x\in\mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει για $x=0$ ενώ για $x>\pi>0$ είναι $e^x-x>1$.

Έτσι από την (1) παίρνουμε ισοδύναμα

$$\ln e^{f(x)}>\ln\left(e^x-x\right)>\ln 1=0\Leftrightarrow f(x)>\ln\left(e^x-x\right)>0\ \Rightarrow\ 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{\ln\left(e^x-x\right)}\qquad (2).$$

Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\qquad (3).$

Επίσης

$$0\leqslant|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\leqslant|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|\leqslant 2\overset{|f(x)|=f(x),x>\pi}{\Rightarrow}\ 0<\frac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)}\leqslant 2\frac{1}{f(x)}\overset{(8)}{\Leftrightarrow}0<\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leqslant 2\frac{1}{f(x)}\quad (4)$$

Και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right)$$

αλλά από τον κανόνα του De L' Hospital είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty}{=}0\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right)=1-0=1}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty.$$

Έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^x-x\right)\overset{u=e^x-x,x\to+\infty\Rightarrow u\to+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln\left(e^x-x\right)}=0\overset{(2)\text{κριτηριο παρεμβολης}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\overset{(2)\text{κριτηριο παρεμβολης}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=0.\ \text{και με}\ -\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leqslant\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leqslant\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\right)=0$$

από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

<u>Σχόλιο:</u> Με την απόδειξη της ανισότητας (2) που έγινε παραπάνω, το δεδομένο ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ αποδεικνύεται περιττό αλλά χρήσιμο για να είναι η άσκηση πιο προσιτή στους μαθητές. Άρα **<u>καλώς</u>** δόθηκε.

Δ4. Έστω F αρχική της f. Η αποδεικτέα ισοδύναμα γίνεται:

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2 \Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{F'(\ln x)}{x}dx<\pi^2 \Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\left(F(\ln x)\right)'<\pi^2$$

$$\Leftrightarrow 0<F\left(\ln(e^\pi)\right)-F\left(\ln(1)\right)<\pi^2$$

$$\Leftrightarrow 0<F(\pi)-F(0)<\pi^2 \Leftrightarrow 0<\frac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}<\pi \quad (1)$$

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ για την F στο $[0,\pi]$ αφού πληρούνται οι υποθέσεις, υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(\pi)-F(0)}{\pi-0}$, οπότε από την (1) ισοδύναμα έχουμε ότι:

$0<F'(\xi)<\pi \Leftrightarrow f(0)<f(\xi)<f(\pi)$ που είναι αληθής αφού η f είναι γνήσια αύξουσα.

Δ4. Η αριστερή ανισότητα προφανώς ισχύει διότι η συνάρτηση $\dfrac{f(\ln x)}{x}$ είναι συνεχής, μη αρνητική στο $[1,e^\pi]$ αφού είναι $x\geq 1\Rightarrow \ln x\geq 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\ln x)\geq f(0)\Rightarrow \dfrac{f(\ln x)}{x}\geq 0$ και δε μηδενίζεται παντού στο $[1,e^\pi]$.

Για τη 2η:

$$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_1^{e^\pi}f(\ln x)(\ln x)'dx=\pi^2-\int_1^{e^\pi}\left(f(\ln x)\right)'\ln x\,dx$$

$$=\pi^2-\int_1^{e^\pi}\frac{\ln x}{x}f'(\ln x)dx<\pi^2$$

διότι οι συναρτήσεις $\dfrac{\ln x}{x}$, $f'(\ln x)$ είναι συνεχείς, μη αρνητικές (στο Δ2 αποδείξαμε ότι $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με ισότητα μόνο στο 0) και δε μηδενίζεται παντού στο διάστημα $[1,e^\pi]$.

Άρα $\displaystyle\int_1^{e^\pi}\frac{\ln x}{x}f'(\ln x)dx>0$.

Δ4.

$$1\leq x\leq e^\pi \Leftrightarrow 0\leq \ln x\leq \pi \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0)\leq f(\ln x)\leq f(\pi)\Rightarrow 0\leq\frac{f(\ln x)}{x}\leq\frac{\pi}{x}\overset{(*)}{\Rightarrow}$$

(Στο σημείο αυτό χρησιμοποιείται ότι οι συναρτήσεις $\dfrac{f(\ln x)}{x}$ και $\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{f(\ln x)}{x}$ δεν μηδενίζονται παντού στο $[1,e^\pi]$, π.χ. για $x=e^\pi$ και $x=1$ αντίστοιχα. Βλέπε την πρόταση παρακάτω)

$$\int_1^{e^\pi}0dx<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\int_1^{e^\pi}\frac{\pi}{x}dx\Rightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi[\ln x]_1^{e^\pi}\Rightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi(\ln e^\pi-\ln 1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$$

$(*)$ Χρησιμοποιήθηκε η πρόταση: Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση $g-f$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\ .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση h ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ με $h(x)=g(x)-f(x)$.

Τότε η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, από τα δεδομένα ισχύει $h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, και δε μηδενίζεται παντού στο $[\alpha,\beta]$, οπότε από πρόταση του σχολικού βιβλίου:

$$\int_\alpha^\beta h(x)\,dx>0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta\big(g(x)-f(x)\big)dx>0\ \Rightarrow\int_\alpha^\beta g(x)\,dx-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx>0\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)\,dx<\int_\alpha^\beta g(x)\,dx\ .$$