Japanese Temple Geometry

算額
sangaku

Λαγουδάκος Γεώργιος

Μελίσσια 2019

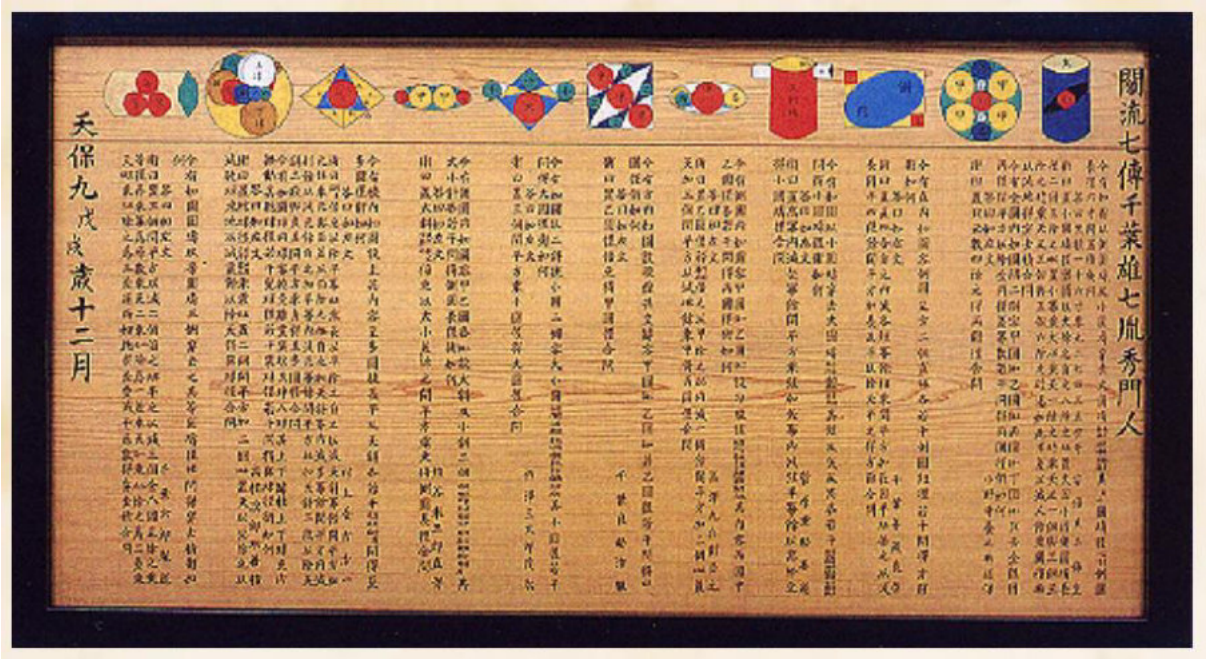
Περιεχόμενα

SANGAKU η παραδοσιακή Ιαπωνική Γεωμετρία

Θα επισκεφθούμε σε μία άλλη εποχή, μία χώρα με διαφορετική κουλτούρα από την δική μας. Θα ταξιδέψουμε στην Ιαπωνία στις αρχές του 17ου αιώνα. Η περίοδος αυτή της ιστορίας της Ιαπωνίας λέγεται Edo (1603-1867), είναι μία περίοδος όπου η χώρα είναι αποκομμένη από τον υπόλοιπο κόσμο. Το εξωτερικό εμπόριο απαγορεύονταν και μία φορά το χρόνο μόνο ένα Γερμανικό πλοίο πλησίαζε στο Nagasaki.

Επειδή η πρόσβαση σε όλες τις μορφές του δυτικού πολιτισμού ήταν αδύνατη, περιορίστηκε και η διείσδυση όλων των δυτικών επιστημονικών ιδεών και επιτευγμάτων.

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου απομόνωσης, ένα νέο είδος Ιαπωνικών μαθηματικών ήκμασε. Οι Ιάπωνες μαθηματικοί, οι σαμουράι, οι έμποροι και οι αγρότες, θα λύσουν μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων γεωμετρίας. Θα καταγράψουν τις προσπάθειές τους σε ξύλινες πινακίδες και θα κρεμάσουν τα έργα αυτά κάτω από τις στέγες των ναών.



Τα μαθηματικά αυτά προβλήματα ονομάζονται **sangaku**, μια λέξη που σημαίνει μαθηματική πινακίδα, και συνοδευόταν πάντα με την πρόκληση «Λύστε αυτό αν μπορείτε»! Το πιο παλιό sangaku που σώζεται είναι του 1683 σε ναό στην περιφέρεια Tochigi και το πιο πρόσφατο του 1870 στο ναό Ubara.

Η πλειοψηφία των προβλημάτων που εμφανίζονται στα **sangaku** είναι γεωμετρικά με κύκλους και τρίγωνα. Στα προβλήματα σπάνια δινόταν και η λύση, κάτι που ερμηνεύεται σαν πρόκληση για εύρεση της λύσης.

Τα sangaku δημιουργήθηκαν από άνδρες , γυναίκες και παιδιά όλων των κοινωνικών τάξεων. Γιαυτό υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία από θέματα, από πολύ εύκολα ως και σε πολύ δύσκολα που απαιτούν εξειδικευμένες γνώσεις για να λυθούν.

Τα έργα αυτά είναι γραμμένα σε μια γλώσσα που ονομάζεται Kanbun, η οποία χρησιμοποιούσε κινεζικούς χαρακτήρες και ουσιαστικά κινεζική γραμματική. Η χρήση Kanbun έπαιξε ένα ρόλο παρόμοιο με τα Λατινικά στη Δύση οπότε όποιος χρησιμοποιούσε τη γλώσσα αυτή ήταν μορφωμένος. Για αυτό το λόγο η πλειοψηφία των δημιουργών sangaku ήταν μέλη της τάξης των σαμουράι.

Ο μεγάλος αριθμός των Sangaku οφείλεται μάλλον, στην εκλαΐκευση της γεωμετρίας. Έτσι οι όμορφες και μυστηριώδεις ξύλινες πινακίδες που εμφανίζονται σε χώρους λατρείας, βοήθησαν να αποκτήσουν τα μαθηματικά ένα ιδιαίτερο ρόλο στην ιαπωνική κουλτούρα.

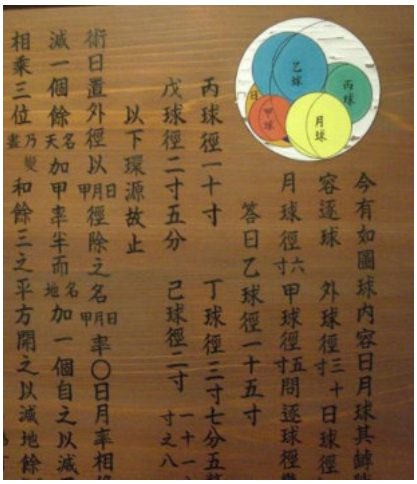
Η κίνηση αυτή μοιάζει με την αντίστοιχη Πλατωνική θεώρηση. Ας μη ξεχνούμε την προμετωπίδα της Ακαδημίας του Πλάτωνα «**Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω**». Η αντίληψη ότι η Γεωμετρία είναι ένα πολύ καλό μέσο για να μπορεί κάποιος να φιλοσοφεί μας οδηγεί στην θέση ότι η Γεωμετρία και η προσήλωση που απαιτεί η λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος βοηθά να ασχοληθεί κάποιος με βαθύτερα φιλοσοφικά ερωτήματα, αλλά και να αποκτήσει έναν βαθμό συνειδητότητας που απαιτείται για να βρεθεί κάποιος σε ένα ιερό χώρο.

Στο ελληνικό σχολείο του 21ου αιώνα η ενασχόληση με τα προβλήματα αυτά μπορεί να αποτελέσει την αφορμή να μάθουν οι μαθητές να επιλύουν ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας μαθηματικά εργαλεία που γνωρίζουν, χωρίς όμως να γνωρίζουν την ύλη πάνω στην οποία βασίζεται η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

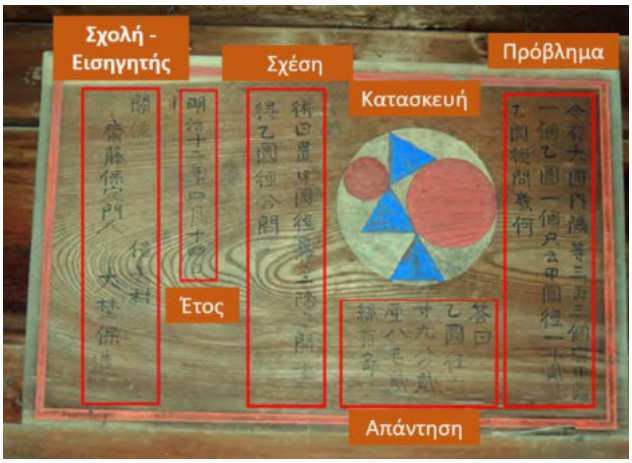
Μπορούν να χρησιμοποιήσουν Ευκλείδεια γεωμετρία, αναλυτική γεωμετρία, τριγωνομετρία αλλά και μεθόδους και τεχνικές ανάλυσης. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων αλλά και στάσεις ως προς την αναγκαιότητα για έρευνα και δημιουργία.

Ναός στην περιοχή της Fukushima

Το sangaku που υπάρχει στην προμετωπίδα του ναού

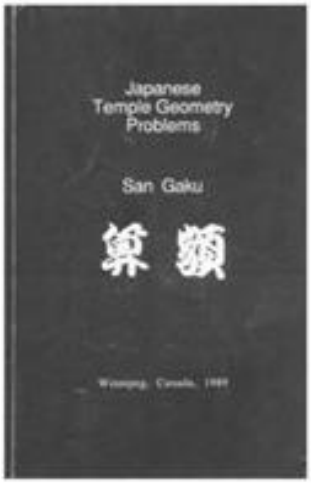


Σε ένα sangaku παρουσιάζονται ένα πλήθος στοιχείων όπως η σχολή και το όνομα του εισηγητή, η ημερομηνία διατύπωσης της άσκησης, το σχήμα και η εκφώνηση καθώς και η απάντηση του προβλήματος.



Τα έργα αυτά στην Ελληνική βιβλιογραφία αναφέρονται αποσπασματικά σε πολύ περιορισμένο αριθμό δημοσιευμάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε το άρθρο στο περιοδικό **Quantum τεύχος Μαρτίου – Απριλίου 1995** με τίτλο **Γεωμετρία της παγόδας του George Berzseny**, στη μεταπτυχιακή εργασία της **Γεωργίας Γκρίτζαλη** με τίτλο «**Ιστορία των προβλημάτων στα μαθηματικά**» (σελ. 117), στην εργασία του **Λυγάτσικα Ζήνων** με τίτλο **Sangakou 19,999 προβλήματα στη γεωμετρία Π.ΓΕΛ Βαρβακείου σχολής** και στο περιοδικό «**Απολλώνιος**» της **Ε.Μ.Ε. Ημαθίας τεύχος 4ο** το άρθρο του **Γιάννη Απλακίδη SAN-GAKU «πολύχρωμα γεωμετρικά προβλήματα από την Ιαπωνία».**

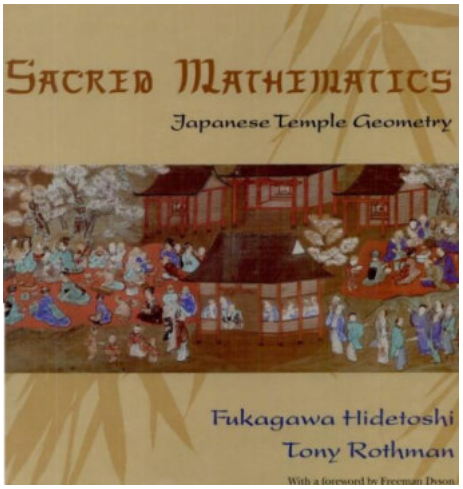
Στην διεθνή βιβλιογραφία κεντρικό ρόλο έχει η εργασία του **Hidetoshi Fukagawa** που μαζί με τον **Daniel Pedoe** δημοσίευσε το 1989 την πρώτη συλλογή Sangaku στο βιβλίο "**Japanese temple geometry problems**"



Ακολούθησαν :
το βιβλίο "**Traditional Japanese mathematics problems from the 18th and 19th centuries**" του **Fukagawa και Sokolowsky**.


Hidetoshi Fukagawa

το "**sacred mathematics**" των **Fukagawa και Rothman**. Αλλά και πλήθος άλλων άρθρων στην Αμερικάνικη Μαθηματική Εταιρεία και papers Αμερικάνικων και Ιαπωνικών πανεπιστημίων (δες βιβλιογραφία).

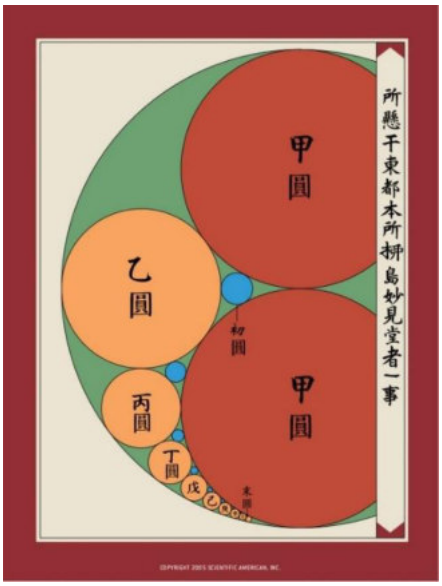


Η συλλογή που ακολουθεί είναι μία προσπάθεια ενασχόλησης με τα υπέροχα αυτά προβλήματα στο Ελληνικό σχολείο με μαθητές κυρίως της Β' Λυκείου. Μία προσπάθεια να ενταχθούν τα θέματα αυτά στο αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας της Γεωμετρίας και Μαθηματικών προσανατολισμού.

Αποτελεί πρόκληση στον καθένα να επιχειρήσει την επίλυση των γεωμετρικών αυτών προβλημάτων.

Ας επιχειρήσουμε …

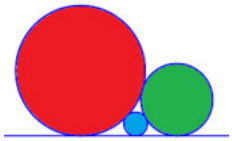
να λύσουμε, να κατασκευάσουμε αλλά και να δημιουργήσουμε αληθινά γεωμετρικά έργα τέχνης…



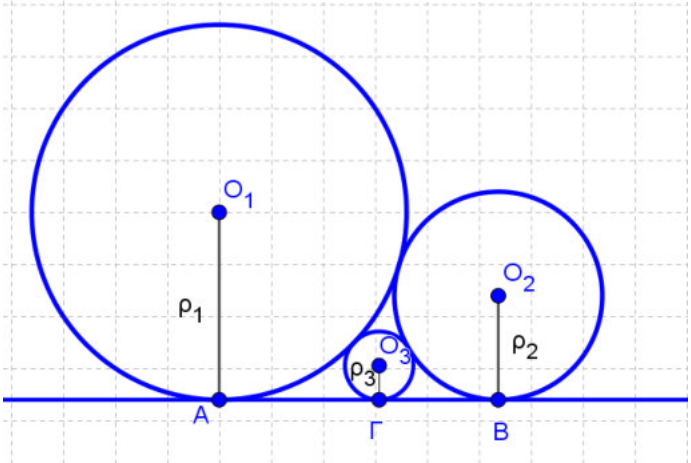
Μερικά ακόμα Sangaku


奉納
定間流算法
御神徳 学問の神として崇敬され、進学・受験など学問の向上を叶えられます。

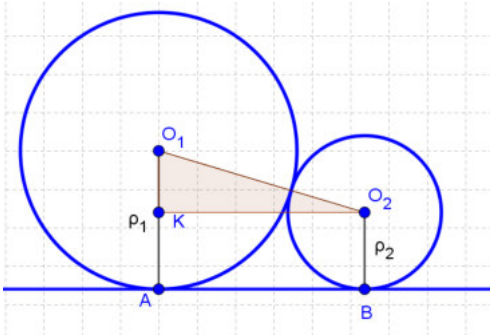

奉納
再興流 當國司郎境新田邑住
清水藏之助信輔門弟等
今如圖有約殷宮負關内容長方圖形只云
東方面圖形七寸
約一百八十二寸
答曰
殷二百四十二寸九分
術曰圖形乘東方面除以圖
内減餘是以自東冪二段内減餘平方
内減人餘除以東
除土得數爲三乘冪乘水得約合問又以大乘約除以土得殷
合問
今如圖有三斜内容天地人圖四箇而人圖徑二箇等寸只云
天圖徑八寸又云人圖四寸五分問大中小斜幾何
大斜四十一寸四分二釐七毫
答曰 中斜二十九寸五分三釐三毫
小斜一寸五分三釐四毫
術曰以天圖徑除人圖徑平方
内減以餘除實加五分
内減一箇餘以之除甲加
中冪別以子一箇内減餘除
除乙以得除秋乘
位和乘天圖徑得大斜合問又以春冬和除中實乘大斜得中
斜合問又以春冬和除小實乘大斜得小斜合問
今如圖有約殷宮大圖天地人小圖六箇而小圖徑二箇
等寸只云天地人圖徑三和乘大圖徑以得約殷宮三和冪所
四萬六千二百一十六步問約殷幾何
答曰 殷八十二寸五分二釐七毫
術曰置二圖間平方得内減一箇餘
列智乘仁別以仁一箇内減以餘除子加五分内減一
箇以餘除正加正一箇是以自智仁乘四和以之除只云數
問平方爲實乘乙得約合問又以甲乘實得殷合問
今如圖有大圖内容小圖三箇只云小圖積三和問積所乘小
圖徑三和再自二位所 大圖徑幾何
答曰 大圖徑六十四寸六分四釐一毫
術曰置圖法七分九厘今五絲是爲四十八段天位別置三箇
間平方爲十八段以之天位内減餘除六段以之乙内減
以止餘天位所爲四段加入甲五百七十六段除六十四段以
之除只云數問五方爲實別列乙加二箇乘實除以乙得大圖
徑步問
今如圖有大圖内容小圖三箇只云小圖積三和問積所乘小
圖徑三和再自二位所 大圖徑幾何
答曰 大圖徑六十四寸六分四釐一毫
術曰置圖法七分九厘今五絲是爲四十八段天位別置三箇
間平方爲十八段以之天位内減餘除六段以之乙内減
以止餘天位所爲四段加入甲五百七十六段除六十四段以
之除只云數問五方爲實別列乙加二箇乘實除以乙得大圖
徑步問
第一 永熊邑 内山 文藏
第二 原市場邑 河合和太吉
第三 四野口邑 富田甚重良
第四 境新田邑 北原 實吉
天保八丁酉歲仲冬吉辰
武水別神社御供所 復元工事竣工記念 復元奉納
平成二十一年十一月吉日
長野市南県町一〇三五-三 宮崎一治



Πρόβλημα 1ο



Δίνονται οι κύκλοι (Ο1,ρ1), (Ο2,ρ2) και (Ο3,ρ3) που εφάπτονται ανά δύο όπως και μιας ευθείας (ε). Δείτε ότι ισχύει η σχέση : $\frac{1}{\sqrt{\rho_3}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}+\frac{1}{\sqrt{\rho_2}}$



Βοηθητική πρόταση

Αν οι κύκλοι (O_1,ρ_1) και (O_2,ρ_2) εφάπτονται μεταξύ τους και μιας ευθείας (ε) , τότε για το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ ισχύει : $AB=2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_2}$

<u>Απόδειξη</u>

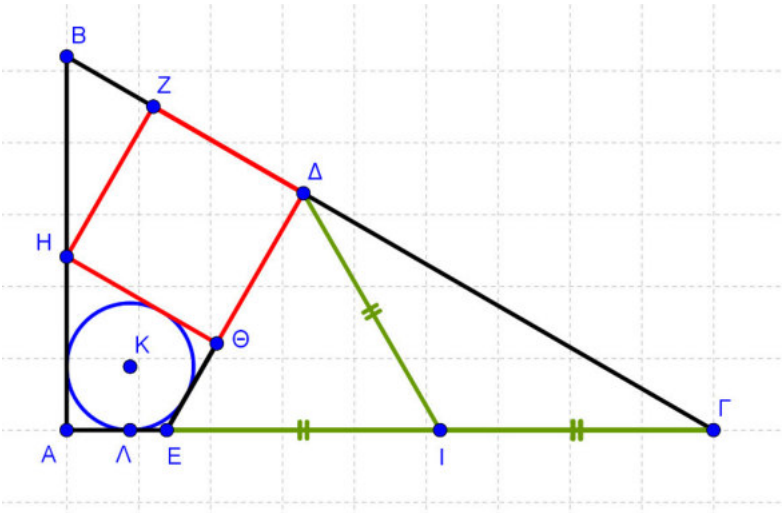
Φέρνουμε την O_2K κάθετη στην O_1A. Από Π.Θ στο O_1O_2K έχουμε

$$KO_2^{\,2}=O_1O_2^{\,2}-O_1K^2 \Leftrightarrow KO_2^{\,2}=(\rho_1+\rho_2)^2-(\rho_1-\rho_2)^2 \Leftrightarrow KO_2=2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_2}$$

Από το σχήμα έχουμε ότι

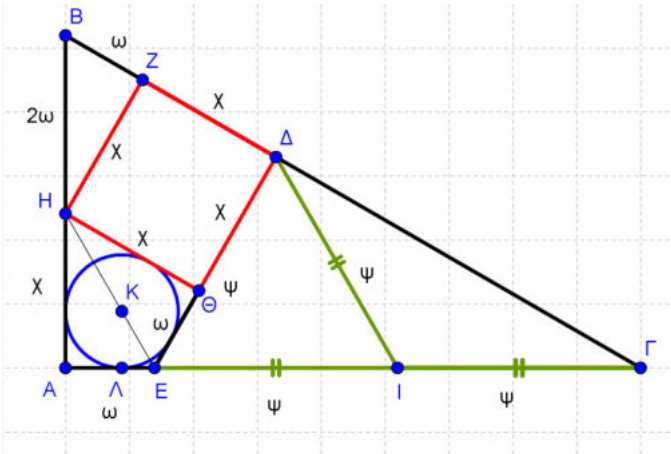
$$AB=A\Gamma+\Gamma B \overset{\text{βοηθητική πρόταση}}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_2}=2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_3}+2\sqrt{\rho_2\cdot\rho_3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho_3}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}+\frac{1}{\sqrt{\rho_2}}$$

Πρόβλημα 2ο



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε εγγράψει ένα τετράγωνο ΗΘΔΖ το ισόπλευρο ΕΔΙ, το ισοσκελές ΔΙΓ και τον κύκλο (Κ,ρ) εγγεγραμμένο στο τετράπλευρο ΗΘΕΑ.
Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΑΓ-ΑΒ

Απόδειξη



Επειδή το ΕΔΓ είναι ορθογώνιο και ισχύει ΕΔ=ΔΙ=ΕΙ=ΙΓ έχουμε ότι Γ=30ο και Β=60ο .

Όμοια στο ΒΗΖ έχουμε Β=60ο και Η=30ο , άρα αν ονομάσουμε ΒΖ=ω τότε ΒΗ=2ω.

Τα σημεία Η,Κ και Ε είναι συνευθειακά (γιατί;) , οπότε τα τρίγωνα ΒΗΖ, ΗΘΕ και ΗΑΕ είναι ίσα.

Αν ονομάσουμε την πλευρά του τετραγώνου χ και τις ΔΙ=ΕΔ=ΕΙ=ΙΓ=ψ

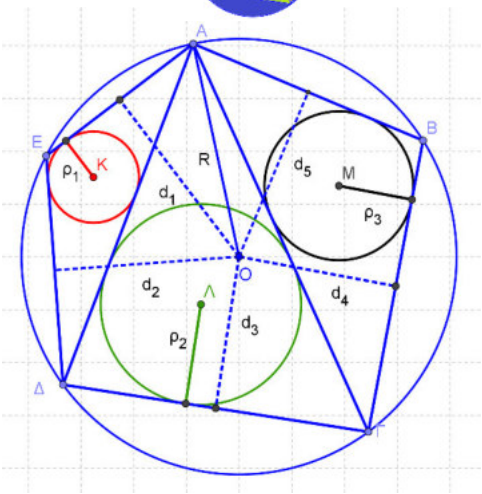
Τότε από τα παραπάνω έχουμε : ΗΑ=χ, ΑΕ=ΕΘ=ω.

Άρα ΑΓ-ΑΒ=(ω+2ψ)-(χ+2ω)=2ψ-χ-ω

Αλλά ΕΔ=ΕΘ+ΘΔ, άρα ισχύει ότι ψ=χ+ω

Οπότε ΑΓ_ΑΒ=2ψ-χ-ω=ψ=χ+ω=ΒΔ.

Πρόβλημα 3ο

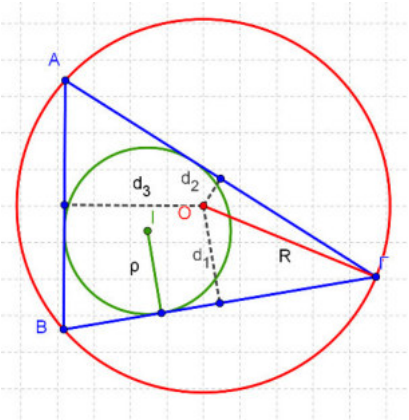


Δίνεται ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Από μία κορυφή του φέρνουμε τις διαγώνιους του. Γράφουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους στα σχηματιζόμενα ν-2 τρίγωνα. Φέρνουμε τις αποστάσεις του κέντρου Ο από τις πλευρές του πολυγώνου. Ισχύει η ισότητα :

$$\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_{\nu-2}=d_1+d_2+\ldots+d_\nu-(n-2)R$$

(θα αποδείξουμε την πρόταση για πεντάγωνο n=5)

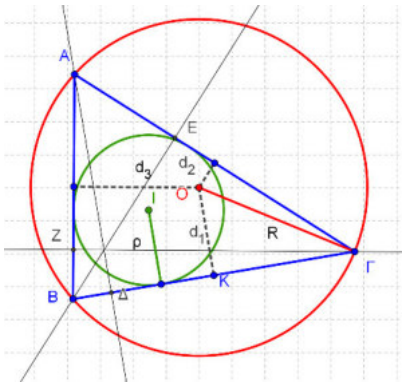
Βοηθητική πρόταση (θεώρημα του Carnot)



Έστω ΑΒΓ τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και (I,ρ) ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο κύκλος. Αν d_1,d_2 και d_3 οι αποστάσεις του περίκεντρου Ο από τις πλευρές α,β,γ του τριγώνου αντίστοιχα, τότε ισχύει : $d_1+d_2+d_3=R+\rho$

<u>Απόδειξη</u>

Φέρνουμε τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΚΓ, ΑΖΓ και ΑΒΕ είναι όμοια (γιατί;)



Άρα θα ισχύουν οι ισότητες :

$$\frac{d_1}{R}=\frac{AE}{\gamma}=\frac{AZ}{\beta}=\frac{AE+AZ}{\gamma+\beta}\Leftrightarrow d_1\cdot(\gamma+\beta)=R\cdot(AE+AZ)$$

Όμοια θα ισχύουν και οι ισότητες :

$$d_2\cdot(\alpha+\gamma)=R\cdot(BZ+B\Delta)\ \text{ και }\ d_3\cdot(\beta+\alpha)=R\cdot(\Gamma E+\Gamma\Delta)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε τελικά ότι :

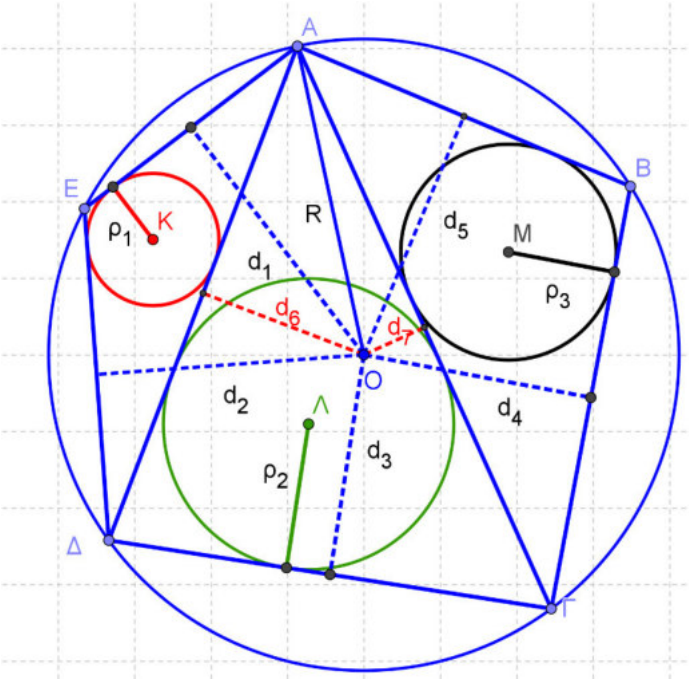
$$d_1\cdot(\beta+\gamma)+d_2\cdot(\gamma+\alpha)+d_3\cdot(\beta+\alpha)=R\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\ \ (1)$$

Αλλά $\quad (AB\Gamma)=\tau\cdot\rho\Leftrightarrow(AOB)+(BO\Gamma)+(\Gamma OA)=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\rho\Leftrightarrow$

$$\frac{d_3\cdot\gamma}{2}+\frac{d_1\cdot\alpha}{2}+\frac{d_2\cdot\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\rho\Leftrightarrow d_1\cdot\alpha+d_2\cdot\beta+d_3\cdot\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\rho\ \ (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε τελικά ότι : $d_1+d_2+d_3=R+\rho$

Σημείωση : Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο και κάποια από τις αποστάσεις είναι εξολοκλήρου εκτός του τριγώνου τότε στην ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε η απόσταση αυτή αφαιρείται αντί να προστίθεται.



Από το θεώρημα του Carnot έχουμε :

Στο τρίγωνο ΑΕΔ : $d_1 + d_2 - d_6 = \rho_1 + R$

Στο τρίγωνο ΑΔΓ : $d_6 + d_7 + d_3 = \rho_2 + R$

Στο τρίγωνο ΑΓΒ : $d_4 + d_5 - d_7 = \rho_3 + R$

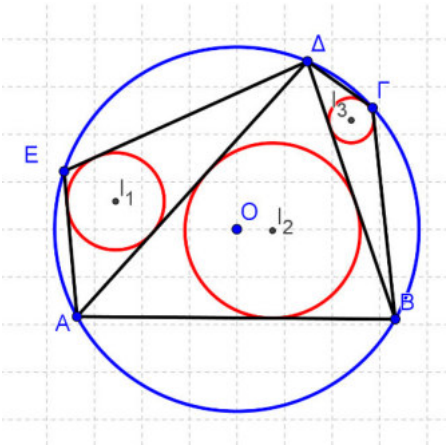
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

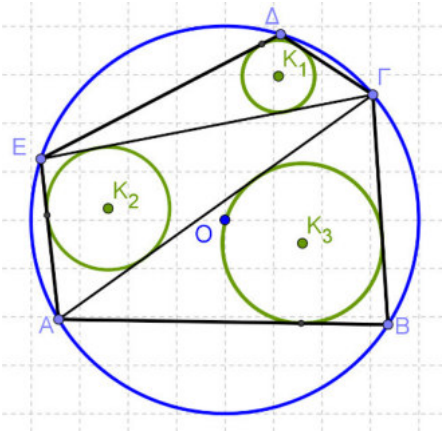
$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 3 \cdot R$$

Άρα :

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 - 3R$$

Πρόβλημα 4ο



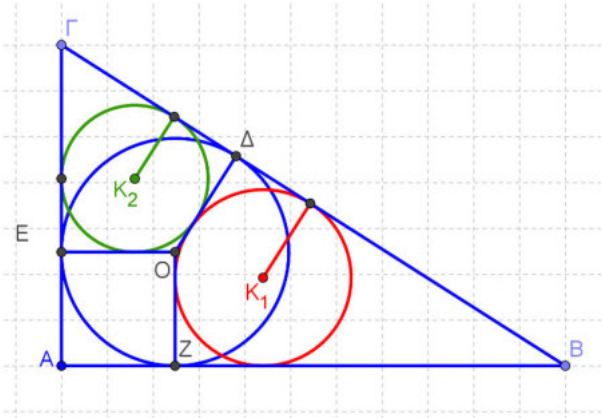


Έστω ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Φέρνουμε διαγώνιους με τυχαίο τρόπο ώστε να το χωρίσουμε σε ν-2 τρίγωνα. Εγγράφουμε σε αυτά τους εγγεγραμμένους κύκλους. Να αποδείξετε ότι σε κάθε περίπτωση χωρισμού του πολυγώνου το άθροισμα των ακτίνων των κύκλων παραμένει σταθερό.

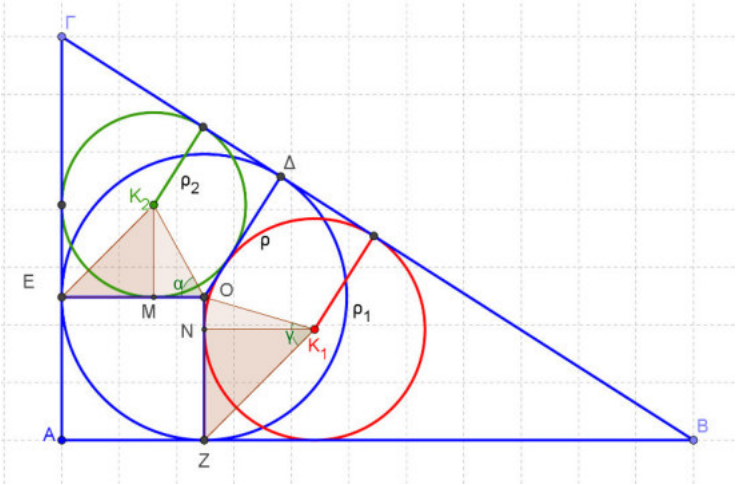
(θα αποδείξουμε την πρόταση για πεντάγωνο)

Απλή εφαρμογή του προηγούμενου προβλήματος …

Πρόβλημα 5ο



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο κύκλος (Ο,ρ). Ονομάζουμε Ζ,Δ,Ε τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές του τριγώνου ΑΒ,ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Γράφουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους των τετραπλεύρων ΓΕΟΔ και ΟΔΒΖ (K_2,ρ_2) και (K_1,ρ_1) αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα : $\rho^2 = 2\cdot\rho_1\cdot\rho_2$



Απόδειξη

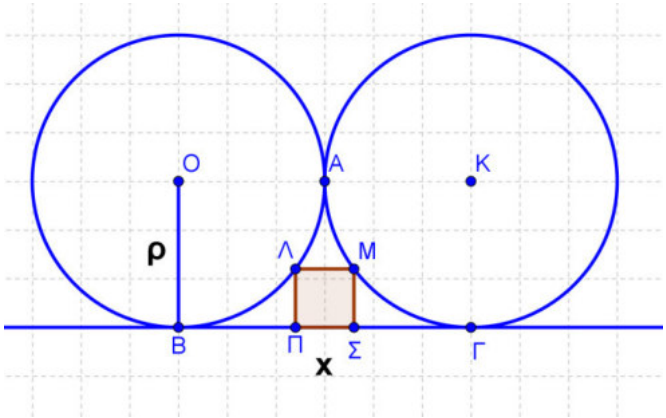
Στο ορθογώνιο τρίγωνο K_2EM από Π.Θ. έχουμε ότι $EK_2 = \rho_2\sqrt{2}$, όμοια στο NK_1Z έχουμε ότι $ZK_1 = \rho_1\sqrt{2}$.

Τα τρίγωνα EK_2O και ZOK_1 είναι όμοια (γιατί;)

Άρα $$\frac{EK_2}{OZ} = \frac{EO}{ZK_1} \Leftrightarrow \frac{\rho_2\sqrt{2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho_1\rho_2$$

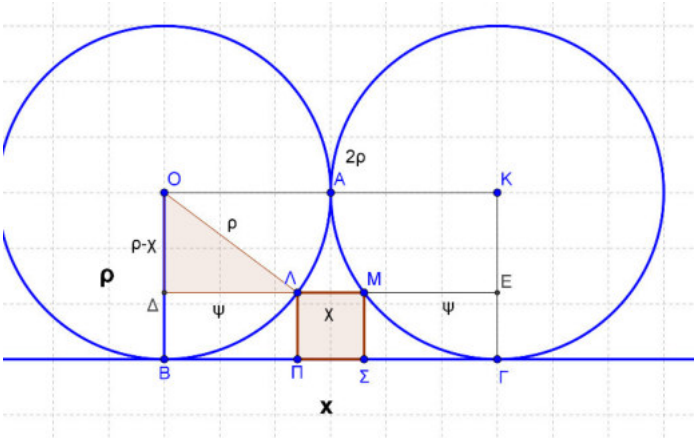
Πρόβλημα 6ο



Το sangaku αυτό είναι ένα από τα 16 κομμάτια από τα οποία αποτελείται η «πινακίδα του δράκου» τοποθετήθηκε στον ναό του Murahisagun στην πόλη Okayama και παρουσιάστηκε το 1873

Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) που εφάπτονται μεταξύ τους όπως και μιας ευθείας (ε). Ένα τετράγωνο ΛΜΣΠ πλευράς χ εγγράφεται όπως στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι : $x = \frac{2}{5}\rho$



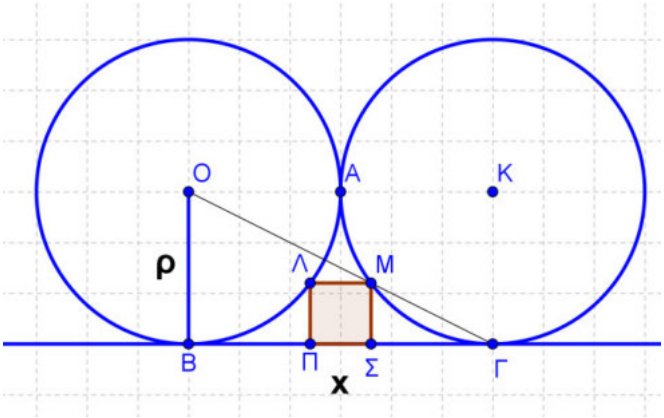
Απόδειξη

Προεκτείνουμε την ΛΜ που τέμνει τις ΟΒ και ΚΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Ονομάζουμε ΔΛ=ΜΕ=ψ. Οπότε 2ψ+χ=2ρ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνα ΟΔΛ από Π.Θ. έχουμε

$$O\Delta^2 + \Delta\Lambda^2 = O\Lambda^2 \Leftrightarrow (\rho-\chi)^2 + \psi^2 = \rho^2 \quad (2)$$

Από (1), (2) απαλείφοντας το ψ καταλήγουμε στην σχέση $x = \frac{2}{5}\rho$.



Β' τρόπος

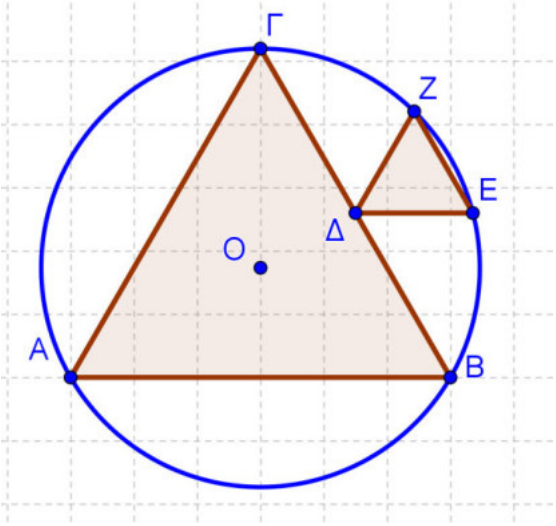
Τα σημεία Ο,Μ,Γ είναι συνευθειακά (γιατί;)

Από τα όμοια τρίγωνα ΓΜΣ και ΟΒΓ έχουμε :

$$\frac{M\Sigma}{\Gamma\Sigma} = \frac{OB}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\chi}{\rho - \frac{\chi}{2}} = \frac{\rho}{2\rho} \Leftrightarrow$$

$$2\chi = \rho - \frac{\chi}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{5\chi}{2} \Leftrightarrow \chi = \frac{2}{5}\rho$$

Πρόβλημα 7ο

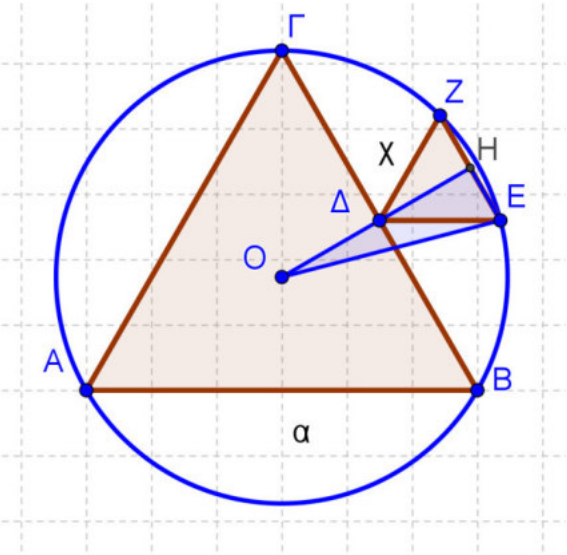


Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΓΒ και ΔΕΖ ισόπλευρο τρίγωνο πλευρά χ (όπως στο σχήμα).

Να αποδείξετε ότι $\chi = \frac{\alpha}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1)$

Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στον ναό Kanzeondo στην καστροπολιτεία Toba και παρουσιάστηκε το 1800 από τον Kobata Atsukuni έναν σπουδαστή στης σχολής Aida

Απόδειξη



Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν :

$$\alpha = \rho\sqrt{3} \Leftrightarrow \rho = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$O\Delta = \alpha_3 = \frac{\rho}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \quad (2)$$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΔΖΕ αντίστοιχα θα είναι :

$$HE = \frac{\chi}{2} \ (3) \ \text{και} \ \Delta H = \frac{\chi\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

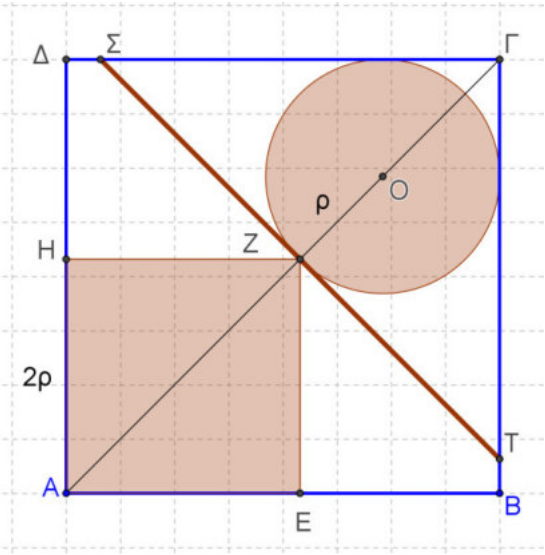
Από Π.Θ. στο ΟΗΕ έχουμε :

$$OH^2 + HE^2 = OE^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{6} + \frac{\chi\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\chi^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{12} + \frac{3\chi^2}{4} + \frac{3\alpha\chi}{6} + \frac{\chi^2}{4} = \frac{\alpha^2}{3} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 12\chi^2 + 6\alpha\chi - 3\alpha^2 = 0$$

Από όπου έχουμε ότι $\chi = \frac{\alpha}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1)$

Πρόβλημα 8ο



Στο διπλανό τετράγωνο πλευράς α έχουμε εγγράψει τετράγωνο ΑΕΖΗ πλευράς 2ρ και κύκλο (Ο,ρ). Η εφαπτόμενη του κύκλου (Ο,ρ) τέμνει το αρχικό τετράγωνο στα σημεία Σ και Τ.

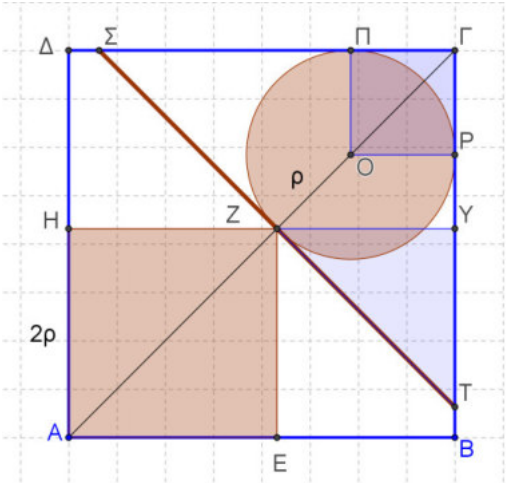
Να αποδείξετε ότι $\Sigma T = \dfrac{2\alpha\cdot(4+5\sqrt{2})}{17}$

Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στον ναό Shimizu στην νομαρχία Nagano και παρουσιάστηκε από τον Kobayashi Syouta το 1828

Απόδειξη

Ισχύει ότι $A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$ κα

$$A\Gamma = AZ + ZO + O\Gamma = 2\rho\sqrt{2} + \rho + \rho\sqrt{2} = \rho\cdot(1+3\sqrt{2})$$



Άρα $\rho = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2}-1)}{17} = \dfrac{\alpha\cdot(6-\sqrt{2})}{17}$

Από Π.Θ στο ΖΥΤ έχουμε

$$ZT^2 = ZY^2 + YT^2 \Leftrightarrow ZT^2 = 2(\alpha-2\rho)^2$$

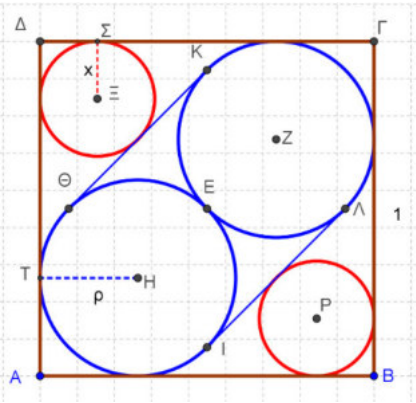
Άρα (α>2ρ)

$$ZT = \sqrt{2}\cdot(\alpha-2\rho) = \sqrt{2}\cdot(\alpha - \frac{2\alpha\cdot(6-\sqrt{2})}{17}) =$$

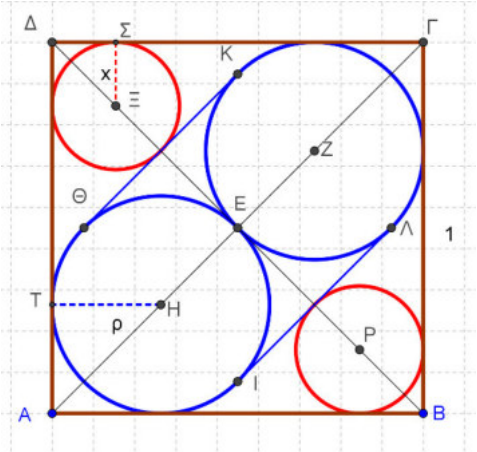
$$= \sqrt{2}\cdot(\frac{5\alpha+2\alpha\sqrt{2}}{17}) = \alpha\cdot\frac{4+5\sqrt{2}}{17}$$

Άρα $\Sigma T = 2\cdot ZT = 2\alpha\cdot\dfrac{4+5\sqrt{2}}{17}$

Πρόβλημα 9ο



Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε εγγράψει (όπως στο σχήμα) δύο κύκλους (Η,ρ) και (Ζ,ρ) που εφάπτονται μεταξύ τους στο Ε. κατασκευάζουμε τις κοινές εφαπτόμενες τους ΘΚ και ΙΛ. Κατασκευάζουμε τους κύκλους (Ρ,χ) και (Ξ,χ) που εφάπτονται των πλευρών του τετραγώνου και των κοινών εφαπτόμενων τμημάτων ΘΚ και ΙΛ. Να υπολογίσετε την ακτίνα χ.



Ισχύουν οι ισότητες :

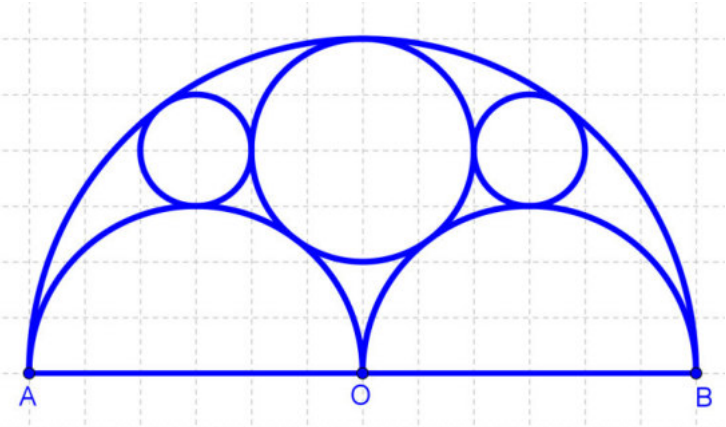
$$\text{ΑΓ} = \text{ΑΗ} + \text{ΗΖ} + \text{ΖΓ} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\rho\sqrt{2} + 2\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\text{ΔΒ} = \text{ΔΞ} + \text{ΞΡ} + \text{ΡΒ} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\chi\sqrt{2} + 2\chi + 2\rho$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \chi(2\sqrt{2}+2) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

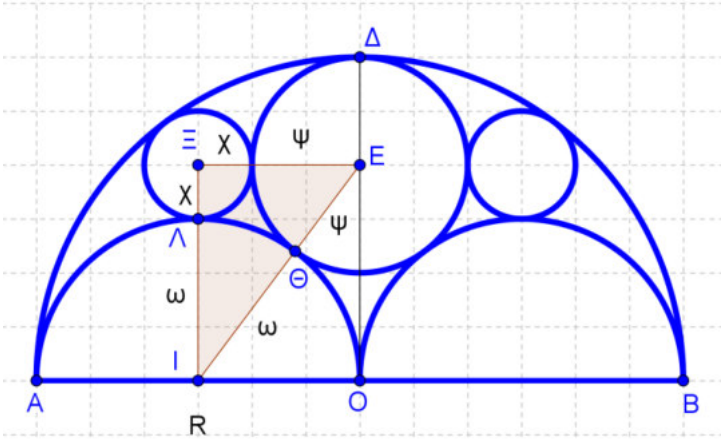
今有如圖方內隔斜容甲乙圓各一個只云甲圓徑一寸問乙圓徑幾何
答曰乙圓徑五分八厘五毛有奇
解曰置乙乘方斜率加甲乙和方斜
又置甲乘方斜率加甲方斜
左相消求矩合
減若之
變換
遍省過乘得
術曰置二個開平方以減二個餘乘甲徑得乙徑
故施答術則如左

Πρόβλημα 10ο



Δίνεται ημιπεριφέρεια ακτίνας R και κατασκευάζουμε μέσα σε αυτή 2 ημιπεριφέρειες και τρεις κύκλους όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των δύο ημικυκλίων και των τριών κύκλων ως συνάρτηση του R.

Υπολογισμοί



Έστω ω,ψ,χ οι ζητούμενες ακτίνες.

Προφανώς $\chi+\psi=\omega=\frac{R}{2}$ (1) , και από Π.Θ. στο ΞΙΕ :

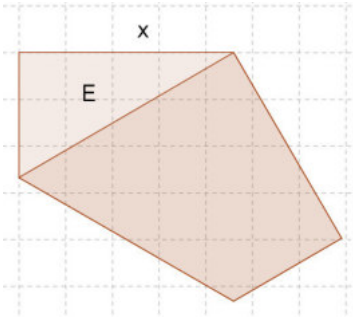
$$(\chi+\psi)^2+(\chi+\omega)^2=(\psi+\omega)^2 \Leftrightarrow (\frac{R}{2})^2+(\chi+\frac{R}{2})^2=(\psi+\frac{R}{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{R^2}{4}+\chi^2+\chi\cdot R+\frac{R^2}{4}=\psi^2+\psi\cdot R+\frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \frac{R^2}{4}=(\psi-\chi)\cdot(\psi+\chi)+(\psi-\chi)\cdot R \Leftrightarrow$$

$$\frac{R^2}{4}=(\psi-\chi)\cdot\frac{R}{2}+(\psi-\chi)\cdot R \Leftrightarrow \frac{R}{4}=\frac{3}{2}(\psi-\chi) \Leftrightarrow \psi-\chi=\frac{R}{6} \quad (2)$$

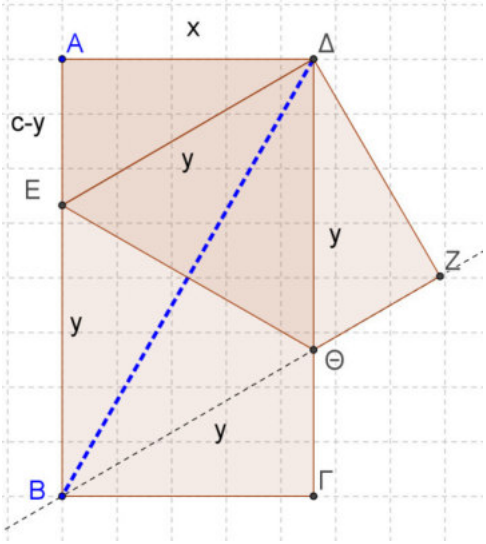
Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι : $\psi=\frac{R}{3}$ και $\chi=\frac{R}{6}$

Πρόβλημα 11ο



Δίνεται ένα φύλλο χαρτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπου η μεγαλύτερη πλευρά του είναι c. Διπλώνουμε το χαρτί ώστε δύο απέναντι κορυφές του να πέσουν η μία πάνω στην άλλη. Ποια πρέπει να είναι η δεύτερη διάσταση του ορθογωνίου ώστε το εμβαδόν Ε το σχηματιζόμενου τριγώνου να γίνεται μέγιστο.

Απάντηση



Από Π.Θ. στο ΑΕΔ έχουμε :

$$AE^2 + A\Delta^2 = E\Delta^2 \Leftrightarrow (c-y)^2 + x^2 = y^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2 + y^2 - 2cy + x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \frac{c^2 + x^2}{2c}$$

Οπότε : $E = \frac{x \cdot (c-y)}{2} \Leftrightarrow E(x) = \frac{x \cdot (c - \frac{x^2 + c^2}{2c})}{2} \Leftrightarrow$

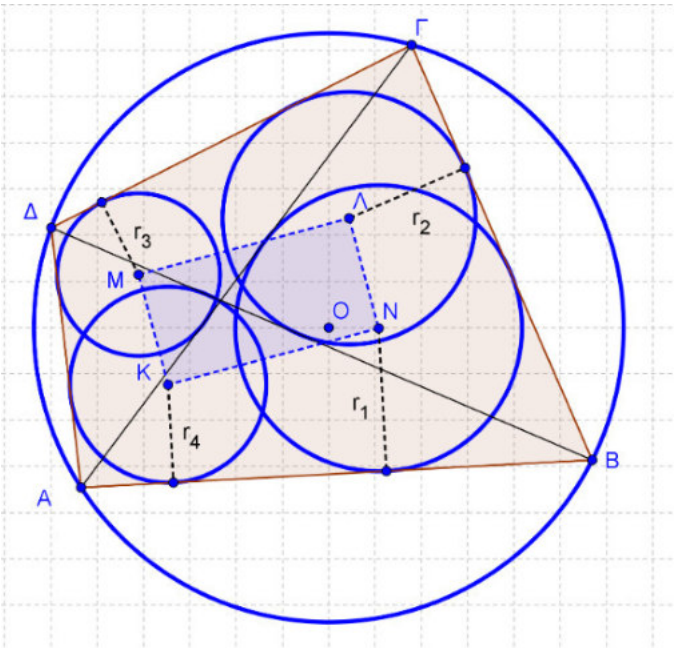
$$\ldots \Leftrightarrow E(x) = \frac{c^2 \cdot x - x^3}{4c}$$

Με $E'(x) = \frac{1}{4c} \cdot (c^2 - 3x^2)$ και

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow c^2 = 3x^2 \Leftrightarrow c = x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{c\sqrt{3}}{3}$$

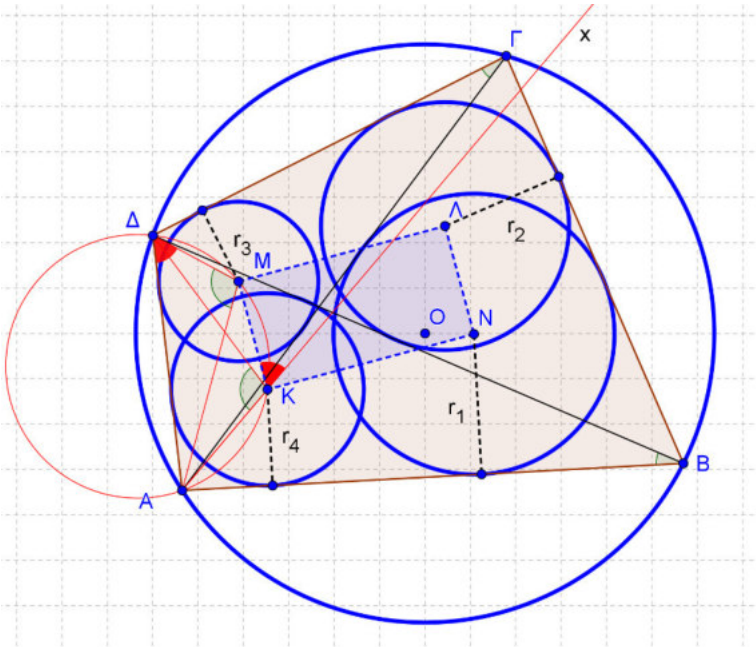
Ας παρατηρήσουμε ότι για την τιμή αυτή του χ έχουμε $y = \frac{2}{3}c$, οπότε στο ορθογώνιο ΑΕΔ είναι $AE = \frac{1}{3}y$, άρα $A\Delta E = 30^o$ και $E\Delta\Theta = 60^o$, δηλαδή το εμβαδόν Ε του τριγώνου γίνεται μέγιστον όταν το τρίγωνο ΕΔΘ είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 12ο



Δίνεται τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Γράφουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους (Ν,r_1), (Λ,r_2), (Μ,r_3), (Κ,r_4) των τριγώνων ΑΓΒ, ΔΓΒ, ΑΔΓ και ΔΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το ΜΛΝΚ είναι ορθογώνιο και ότι ισχύει η ισότητα $r_1+r_3=r_2+r_4$



Απόδειξη

Πρέπει να είναι γνωστό ότι

$\Delta MA = 90^o + \frac{\Delta \Gamma A}{2}$. Οπότε θα είναι

και $\Delta KA = 90^o + \frac{\Delta BA}{2}$,επειδή

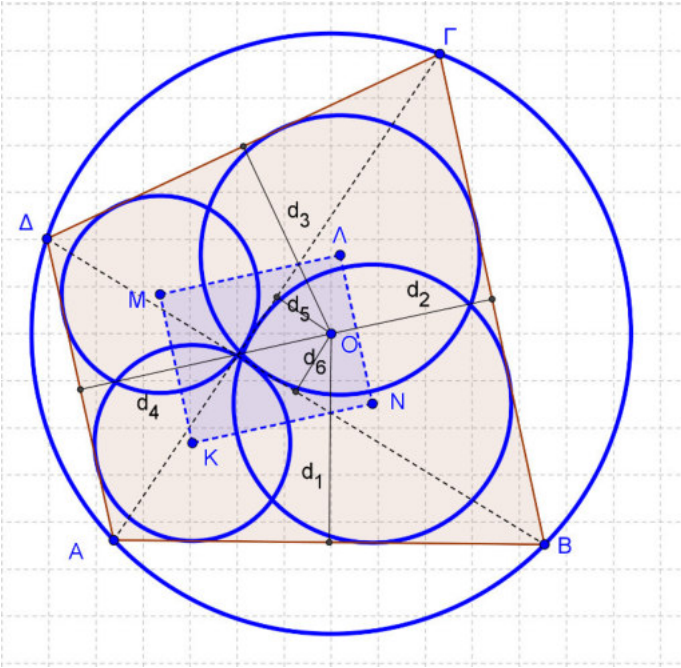
$\Delta \Gamma A = \Delta BA$ έχουμε τελικά ότι

$\Delta MA = \Delta KA$, άρα το τετράπλευρο ΔΜΚΑ είναι εγγράψιμο. Οπότε θα ισχύει και $M\Delta A = MK\chi$. Όμοια καταλήγουμε ότι το τετράπλευρο ΚΝΒΑ είναι εγγράψιμο και ότι $\chi KN = NBA$

Άρα

$$MK\chi + \chi KN = A\Delta M + NBA \Leftrightarrow MKN = \frac{A\Delta\Gamma + \Gamma BA}{2} \Leftrightarrow MKN = 90^o$$

Όμοια και για τις άλλες γωνίες του ΜΛΝΚ, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.



Θα αποδείξουμε ότι $r_1+r_3=r_2+r_4$

Εφαρμόζοντας το Θ. Carnot στα τρίγωνα :

ΑΔΒ : $d_1+d_4-d_6=r_4+R$ (1)

ΔΒΓ : $d_2+d_3+d_6=r_2+R$ (2)

ΑΒΓ : $d_1+d_2+d_5=r_1+R$ (3)

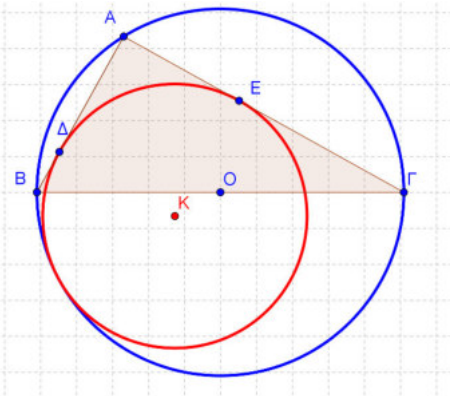
ΑΔΓ : $d_3+d_4-d_5=r_3+R$ (4)

(1)+(2) : $d_1+d_2+d_3+d_4=r_4+r_2+2R$

(3)+(4) : $d_1+d_2+d_3+d_4=r_1+r_3+2R$

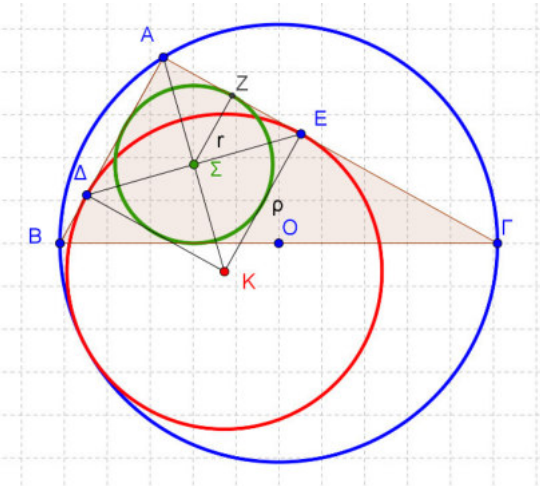
Άρα $r_2+r_4=r_1+r_3$

Πρόβλημα 13ο



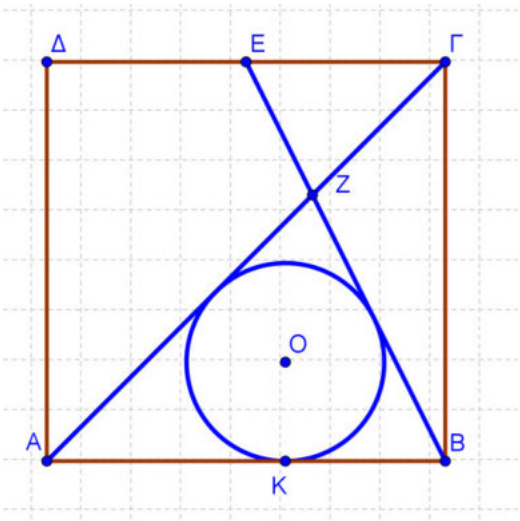
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (A =90ο) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Γράφουμε κύκλο (Κ,ρ) που εφάπτεται των ΑΒ,ΑΓ και του κύκλου (Ο,R) . Να αποδείξετε ότι ρ=β+γ-α

(Όπου α,β,γ οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ)

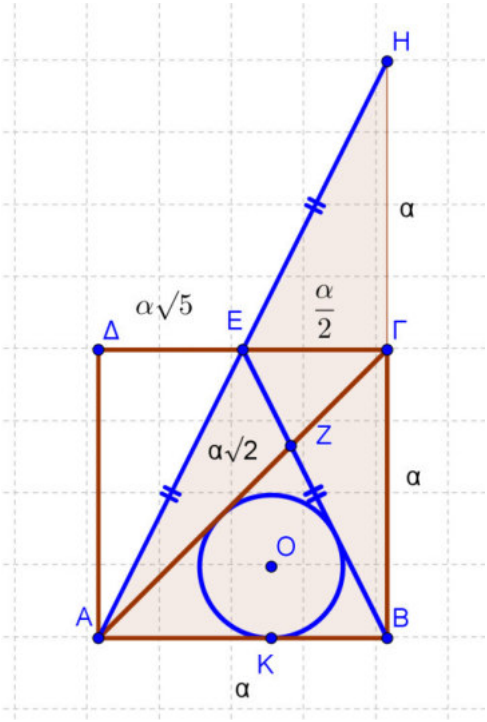


Αν κατασκευάσουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ, παρατηρήστε ότι ρ=2r. Όμως ισχύει ότι 2r=β+γ-α, άρα …

Πρόβλημα 14ο



Στο διπλανό τετράγωνο ονομάζουμε Ε μέσο της ΔΓ. Φέρνουμε την ΕΒ που τέμνει την διαγώνιο ΑΓ στο Ζ. Κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΖ. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.



Υπολογισμός

Έστω Η το σημείο τομής της ΑΕ και της ΓΒ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΗ έχουμε ΑΒ=α, ΗΒ=2α, οπότε $AH = \alpha\sqrt{5}$ και άρα $EB = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$. Στο ορθογώνιο ΑΒΓ είναι $A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$. Επειδή οι ΑΓ και ΕΒ είναι διάμεσοι το σημείο Ζ θα είναι το βαρύκεντρο οπότε στο ΑΖΒ θα είναι $AB = \alpha$, $BZ = \frac{2}{3}\cdot EB = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{3}$ και

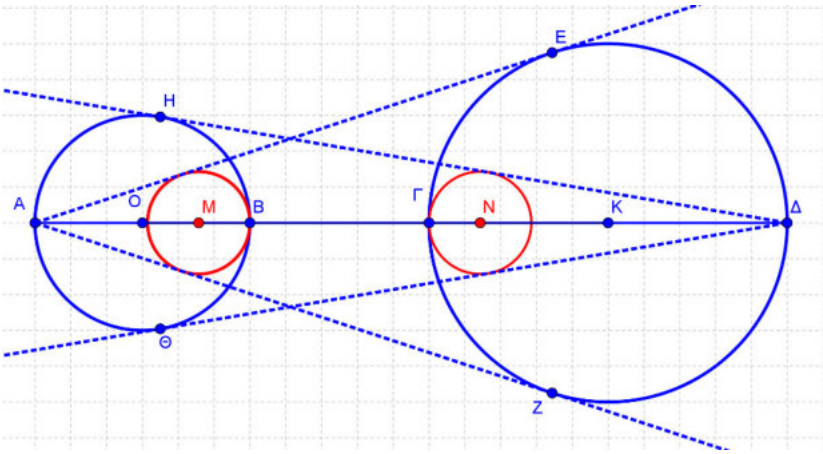
$$AZ = \frac{2}{3}\cdot A\Gamma = \frac{2}{3}\cdot\alpha\sqrt{2} = \frac{2\alpha\sqrt{2}}{3} .$$

Επίσης $E = (AZB) = \frac{2}{3}\cdot(AB\Gamma) = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{3}$.

Στο ΑΒΖ έχουμε :

$$E = \tau\cdot\rho \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{3} = \frac{\alpha + \frac{2\alpha\sqrt{2}}{3} + \frac{\alpha\sqrt{5}}{3}}{2}\cdot\rho \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = \frac{2\alpha}{3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

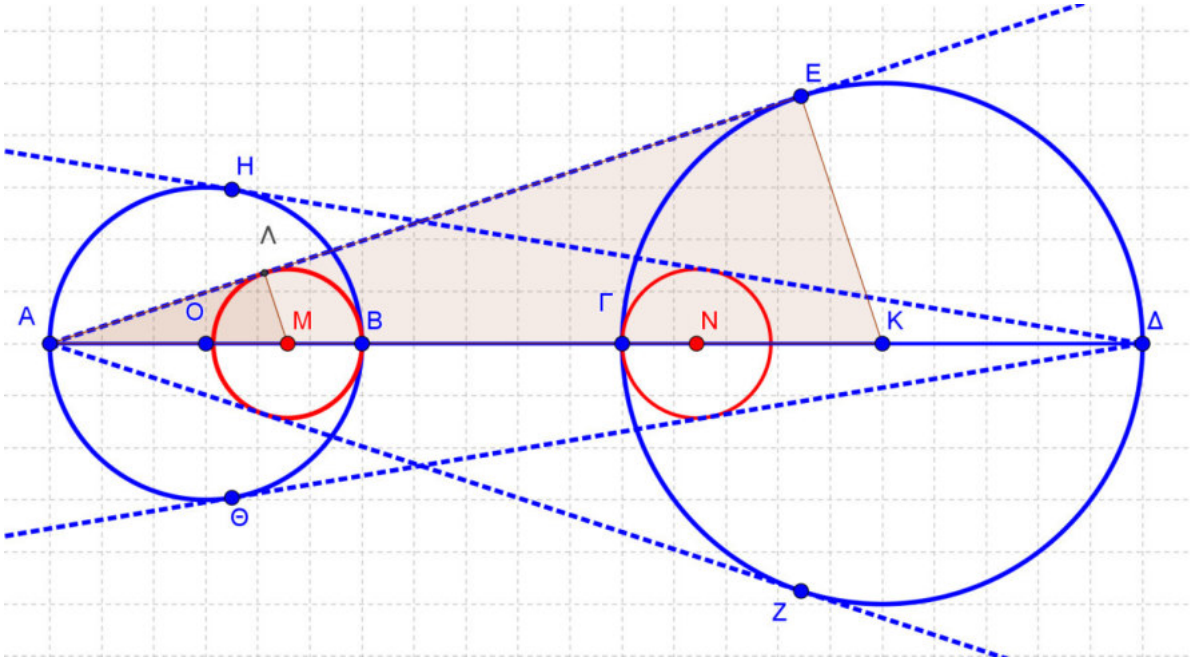
Πρόβλημα 15ο



Δίνονται οι κύκλοι (Ο,ρ_1) και (Κ,ρ_2). Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α,Β,Γ και Δ όπως στο σχήμα. Ονομάζουμε ΒΓ=α. Κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες ΑΕ και ΑΖ, όπως και τις ΔΗ και ΔΘ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που εφάπτεται των ΑΕ,ΑΖ και του (Ο,ρ_1) και ο κύκλος που εφάπτεται των ΔΗ,ΔΘ και του (Κ,ρ_2) είναι ίσοι με ακτίνα

$$r = \frac{2\cdot\rho_1\cdot\rho_2}{2\rho_1+\alpha+2\rho_2}$$

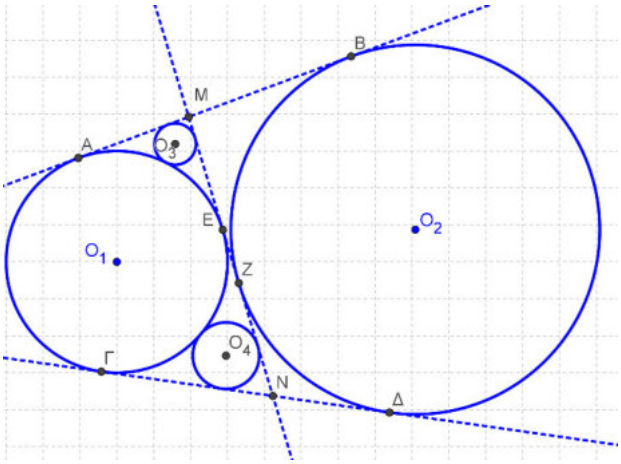
Απόδειξη



Τα τρίγωνα ΑΛΜ και ΑΕΚ είναι όμοια, άρα :

$$\frac{\Lambda M}{AM}=\frac{KE}{AK}\Leftrightarrow\frac{r}{2\rho_1-r}=\frac{\rho_2}{2\rho_1+\alpha+\rho_2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow r=\frac{2\cdot\rho_1\cdot\rho_2}{2\rho_1+\alpha+2\rho_2}$$

Πρόβλημα 16ο

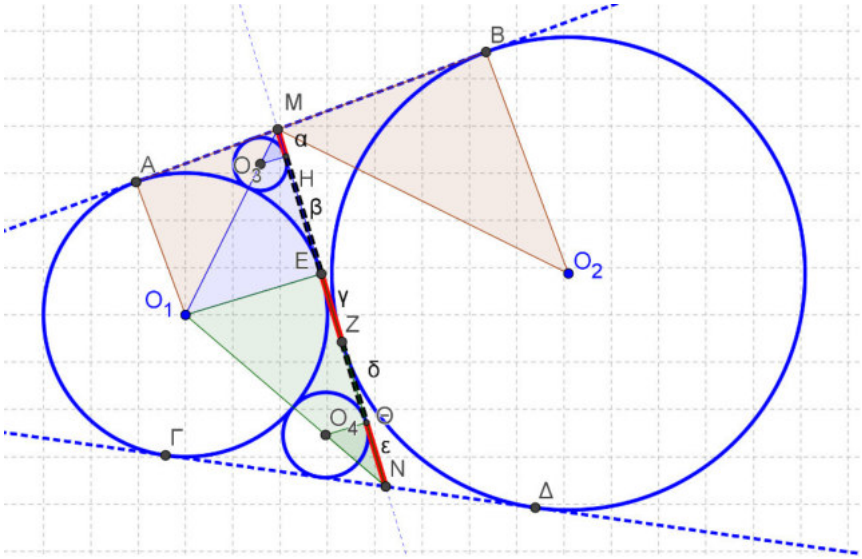


Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι κύκλοι (O_1,ρ_1) και (O_2,ρ_2). Κατασκευάζουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες ΑΒ και ΓΔ, όπως και την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη ΜΝ. Κατασκευάζουμε τους κύκλους (O_3,ρ_3) και (O_4,ρ_4) που εφάπτονται ενός κύκλου της ΜΝ και μιας εκ των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων (όπως στο σχήμα)

Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\rho_2 = \frac{4\rho_1^{\,2}\cdot\sqrt{\rho_3\cdot\rho_4}}{(\rho_1-\rho_3)\cdot(\rho_1-\rho_4)}$$

Απόδειξη



Από τα όμοια τρίγωνα AO_1M και MO_2B ισχύει :

$$\frac{\rho_1}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\rho_2} \quad (1)$$

Από τα όμοια τρίγωνα MO_3H και MEO_1 ισχύει : $\dfrac{\rho_1}{\rho_3} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ (2)

Η ΗΕ είναι κοινή εφαπτόμενη των δύο κύκλων, άρα :

$$\beta = 2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_3} \quad (3)$$

Όμοια θα ισχύουν και οι σχέσεις $\dfrac{\rho_1}{\rho_4} = \dfrac{\gamma+\delta+\varepsilon}{\varepsilon}$ (4) και $\gamma+\delta = 2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_4}$ (5)

Επίσης ισχύει ότι $MZ = NE \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \varepsilon+\delta+\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta = \varepsilon+\delta$ (6)

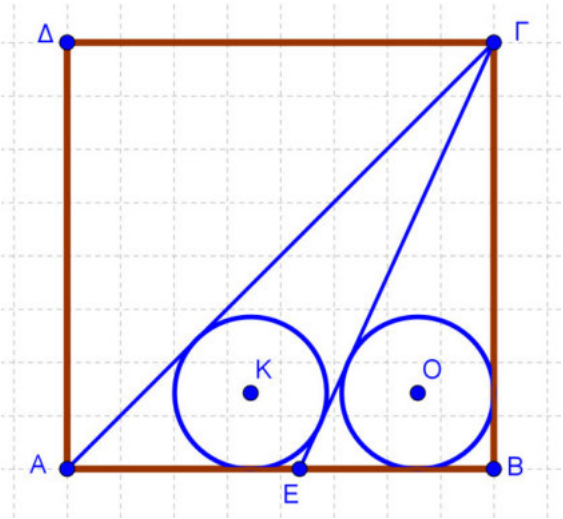
Από (2),(3) έχουμε $\alpha = \dfrac{2\rho_3\cdot\sqrt{\rho_1\cdot\rho_3}}{\rho_1-\rho_3}$ (7) , και από (4),(5) $\varepsilon = \dfrac{2\rho_4\cdot\sqrt{\rho_1\cdot\rho_4}}{\rho_1-\rho_4}$ (8)

Από την (1) έχουμε :

$$\rho_1\cdot\rho_2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta+\gamma) = \left(\frac{2\rho_3\cdot\sqrt{\rho_1\cdot\rho_3}}{\rho_1-\rho_3} + 2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_3}\right)\cdot\left(\frac{2\rho_4\cdot\sqrt{\rho_1\cdot\rho_4}}{\rho_1-\rho_4} + 2\sqrt{\rho_1\cdot\rho_4}\right) \Leftrightarrow$$

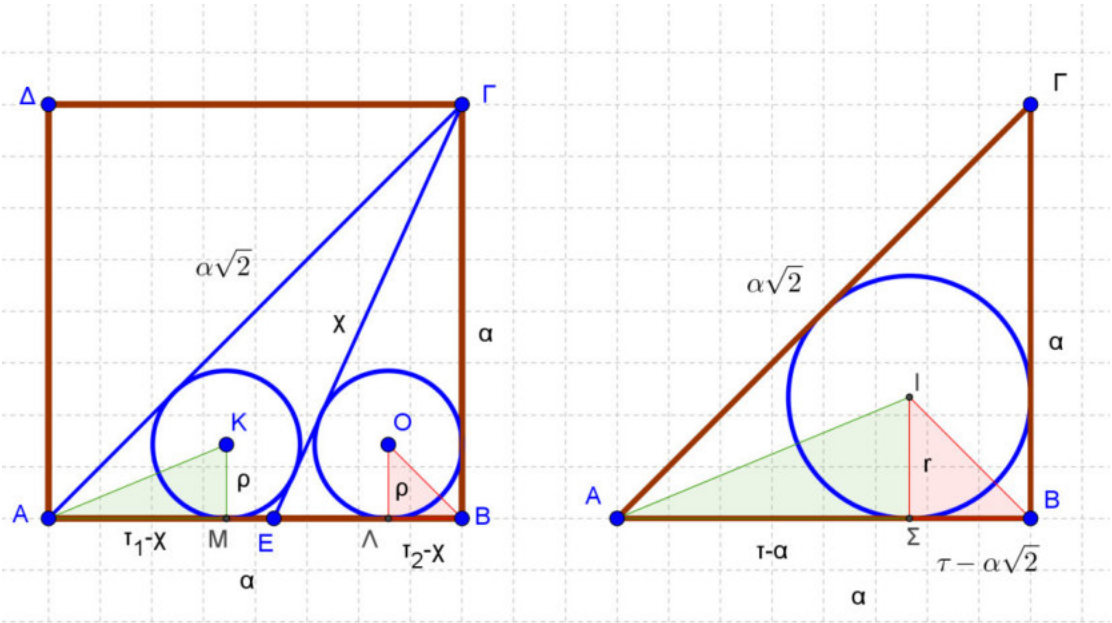
$$\rho_1\cdot\rho_2 = \frac{2\rho_1\cdot\sqrt{\rho_1\cdot\rho_3}}{\rho_1-\rho_3}\cdot\frac{2\rho_1\cdot\sqrt{\rho_1\cdot\rho_4}}{\rho_1-\rho_4} \Leftrightarrow \rho_2 = \frac{4\rho_1^{\,2}\cdot\sqrt{\rho_3\cdot\rho_4}}{(\rho_1-\rho_3)\cdot(\rho_1-\rho_4)}$$

Πρόβλημα 17ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και την διαγώνιό του ΑΓ. Επίσης έχουμε φέρει το τμήμα ΓΕ ώστε οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΕΒ να είναι ίση. Να βρείτε την ακτίνα των κύκλων συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.

Απόδειξη : Ο σκοπός είναι να βρεθεί το ΓΕ=χ



Αν τ_1,τ_2 , τ η ημιπερίμετροι των τριγώνων ΑΓΕ, ΓΕΒ και ΑΒΓ και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ τότε ισχύουν οι σχέσεις :

$$\tau_1+\tau_2=\tau+\chi \Leftrightarrow \tau_1\cdot\rho+\tau_2\cdot\rho=\tau\cdot\rho+\chi\cdot\rho \Leftrightarrow (\text{ΑΓΕ})+(\text{ΓΕΒ})=\rho\cdot(\tau+\chi) \Leftrightarrow$$

$$(\text{ΑΒΓ})=\rho\cdot(\tau+\chi) \Leftrightarrow \tau\cdot r=\rho\cdot(\tau+\chi) \Leftrightarrow \chi=\frac{r\cdot\tau}{\rho}-\tau \quad (1)$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΜΚ και ΑΙΣ έχουμε : $\frac{r}{\rho}=\frac{\tau_1-\chi}{\tau-\alpha}$ (2) και από τα όμοια τρίγωνα ΟΛΒ και ΙΣΒ έχουμε : $\frac{r}{\rho}=\frac{\tau-\alpha\sqrt{2}}{\tau_2-\chi}$ (3)

Από (1) και (2) έχουμε : $\dfrac{\tau\cdot(\tau-\alpha)}{\tau_1-\chi}-\tau=\chi \Leftrightarrow \tau(\tau-\alpha)-\tau\cdot\tau_1+\tau\cdot\chi=\tau_1\cdot\chi-\chi^2$

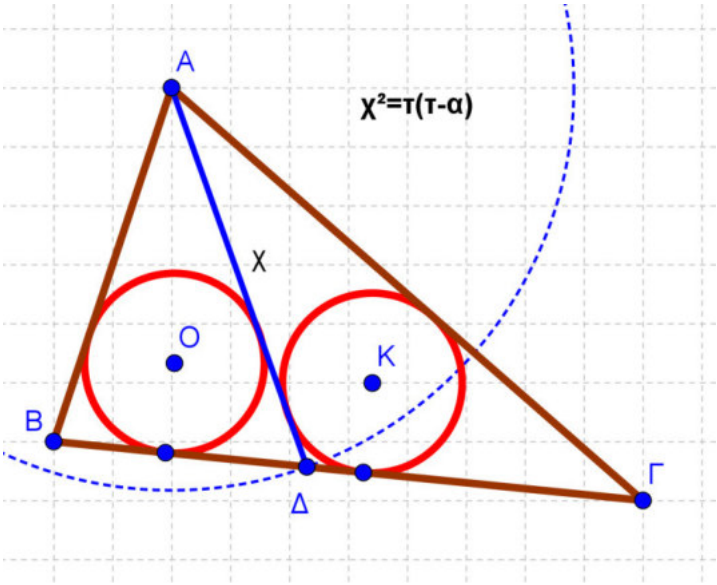
Από (1) και (3) όμοια έχουμε $\tau(\tau-\alpha\sqrt{2})-\tau\cdot\tau_2+\tau\cdot\chi=\tau_2\cdot\chi-\chi^2$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνοντας υπόψιν μας ότι $\tau_1+\tau_2=\tau+\chi$, καταλήγουμε στην ισότητα $\chi^2=\tau(\tau-\alpha)\Leftrightarrow \chi=\sqrt{(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow \chi=\alpha\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

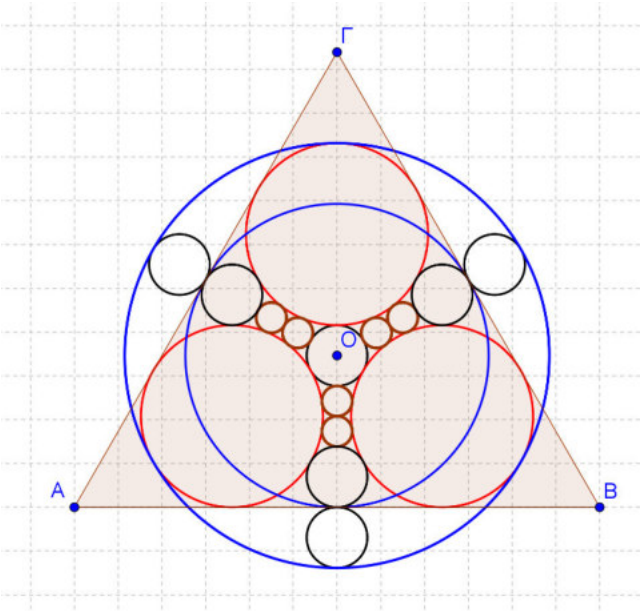
Πρόβλημα 18ο

Γενίκευση του προηγούμενου είναι το sangaku που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απλώς το τρίγωνο στο οποίο εγγράφονται οι δύο ίσοι κύκλοι είναι τυχαίο. Πάλι ο σκοπός είναι να βρεθεί το μήκος την τέμνουσας ΑΔ διότι μετά μπορούμε να χωρίσουμε το δοσμένο τρίγωνο σε δύο άλλα και να εγγράψουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους.

Ο υπολογισμός γίνεται με την ίδια τεχνική όπως το προηγούμενο πρόβλημα.



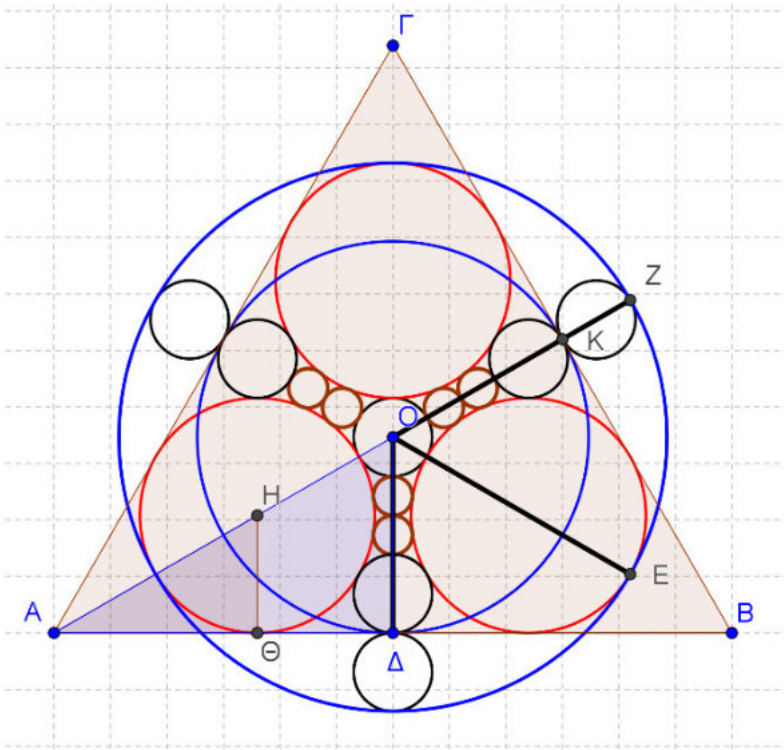
Πρόβλημα 19ο



Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε κατασκευάσει τον εγγεγραμμένο κύκλο του ακτίνας ρ. Έχουμε επίσης εγγράψει τρεις «κόκκινους» κύκλους ακτίνας ρ_1, επτά «μαύρους» ακτίνας ρ_2 και έξι «καφέ» ακτίνας ρ_3. Στο τέλος έχουμε και τον κύκλο που περιγράφει τους προηγούμενους. Να αποδείξετε ότι :

$$\rho_1 = \frac{3}{5}\rho \ , \ \rho_2 = \frac{1}{5}\rho \ , \ \rho_3 = \frac{1}{10}\rho$$

Απόδειξη



Από το σχήμα έχουμε :

$$3\rho_2 + 4\rho_3 = \rho \quad (1)$$

$$2\rho_1 + \rho_2 = 5\rho_2 + 4\rho_3 = R \Leftrightarrow$$
$$\rho_1 = 2\rho_2 + 2\rho_3 \quad (2)$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΗΘ και ΑΟΔ έχουμε :

$$\frac{AH}{H\Theta} = \frac{AO}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{AH}{\rho_1} = \frac{2OK}{\rho} \Leftrightarrow$$
$$\frac{AH}{\rho_1} = \frac{2\rho}{\rho} \Leftrightarrow AH = 2\rho_1$$

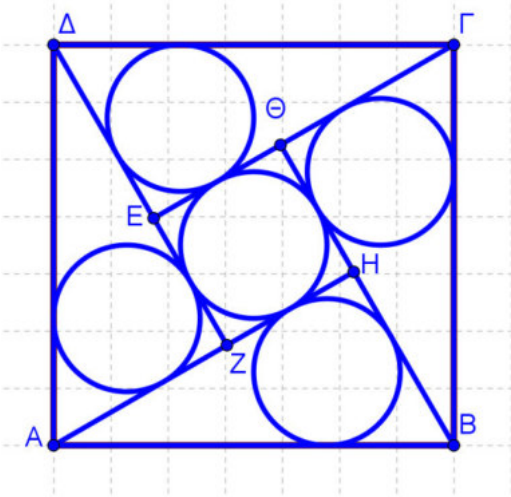
Άρα θα ισχύει και

$$AO = 2OK \Leftrightarrow$$
$$3\rho_1 + \rho_2 = 2\rho \quad (3)$$

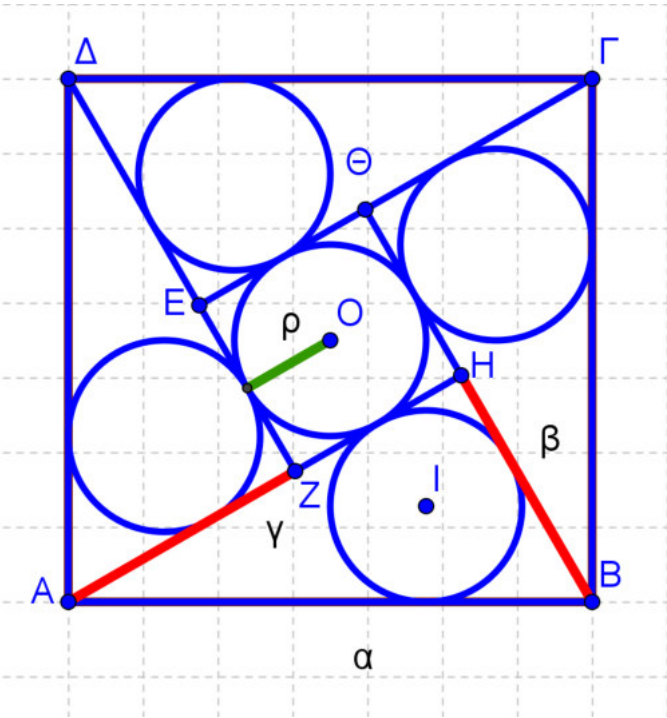
Από (1),(2) και (3) έχουμε τελικά ότι :

$$\rho_1 = \frac{3}{5}\rho \ , \ \rho_2 = \frac{1}{5}\rho \ , \ \rho_3 = \frac{1}{10}\rho$$

Πρόβλημα 20ο



Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε εγγράψει πέντε ίσους κύκλους όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ακτίνα τους συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.



Υπολογισμός

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ για την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ισχύει :

$$\rho = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΑΗΒ είναι ίσα άρα ΑΖ=ΗΒ=β, οπότε :

$$ZH = \gamma-\beta \Leftrightarrow 2\rho = \gamma-\beta \Leftrightarrow \rho = \frac{\gamma-\beta}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι : $\beta = \frac{\alpha}{2}$ άρα

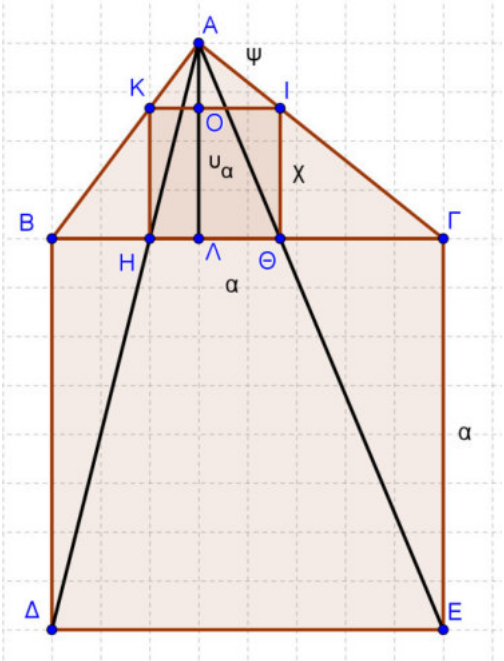
Στο ΑΗΒ ορθογώνιο θα έχουμε :

$$AB = \alpha,\ HB = \frac{\alpha}{2},\ AH \overset{\Pi.\Theta.}{=} \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$, οπότε

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\alpha(3+\sqrt{3})}{4}$$ και $(AHB) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$. Από τον τύπο Ε=τρ

τελικά έχουμε $\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}}{\frac{\alpha(3+\sqrt{3})}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})} = \frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{4}$.

Πριν εξετάσουμε τα παρακάτω προβλήματα καλό είναι να μάθουμε πως γίνεται η εγγραφή τετραγώνου σε τυχαίο τρίγωνο καθώς και τις βασικές σχέσεις που ισχύουν.



<u>Κατασκευή εγγράψιμου τετραγώνου</u>

Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΒΔΕΓ. Ονομάζουμε Η και Θ τα σημεία τομής των ΑΔ και ΑΕ με την ΒΓ αντίστοιχα. Το τμήμα ΗΘ είναι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου (γιατί;)

<u>Σχέσεις που ισχύουν</u>

Από τα όμοια τρίγωνα ΚΑΙ και ΑΒΓ έχουμε :

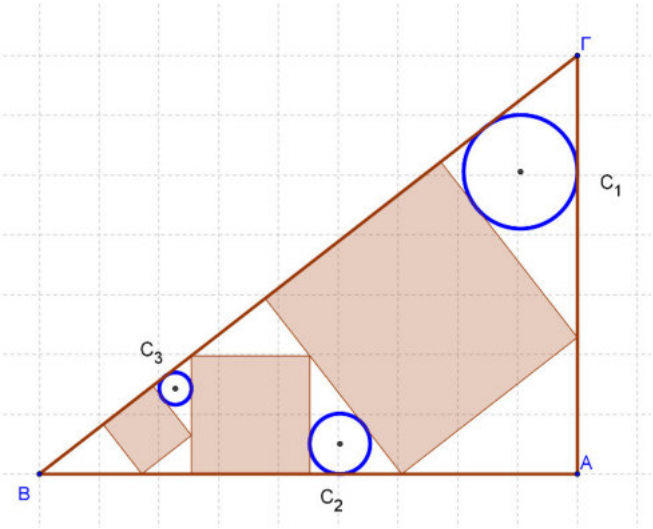
$$\frac{\text{ΑΟ}}{\text{ΚΙ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΒΓ}} \Leftrightarrow \frac{\upsilon_\alpha - \chi}{\chi} = \frac{\upsilon_\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \chi = \frac{\alpha + \upsilon_\alpha}{\alpha \cdot \upsilon_\alpha} \quad (1)$$

<u>Στην περίπτωση όπου το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α θα έχουμε επιπλέον ότι</u> :

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΚΙ και ΑΒΓ ισχύει : $\frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \chi = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \psi$ (2) αλλά από τα όμοια τρίγωνα ΙΘΓ και ΑΒΓ ισχύει ότι : $\frac{\chi}{\gamma} = \frac{\beta - \psi}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\chi = \gamma\beta - \gamma\psi \Leftrightarrow \psi = \frac{\gamma\beta - \alpha\chi}{\gamma}$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε $\chi = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma\beta - \alpha\chi}{\gamma} \Leftrightarrow \beta\gamma\chi = \alpha\beta\gamma - \alpha^2\chi \Leftrightarrow \chi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta\gamma}$ (4) !!

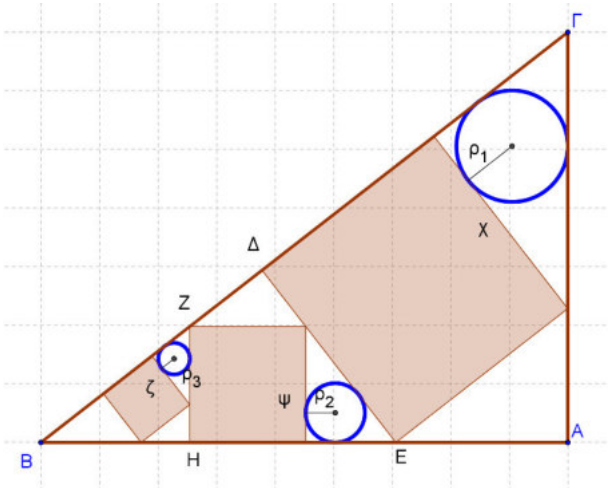
Πρόβλημα 21ο



Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε εγγράψει τετράγωνα και τρεις κύκλους όπως στο σχήμα.
Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα :

$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_3}$, όπου ρ_1,ρ_2,ρ_3 οι ακτίνες των τριών κύκλων C_1,C_2 και C_3 αντίστοιχα.

Απόδειξη



Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται έχουμε τις ισότητες :

$\frac{\rho_1}{\chi}=\frac{\rho_2}{\psi}=\frac{\rho_3}{\zeta}$.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\psi}{\chi}=\frac{\zeta}{\psi}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ έχουμε εγγράψει τετράγωνο πλευράς ψ άρα θα ισχύει ότι :

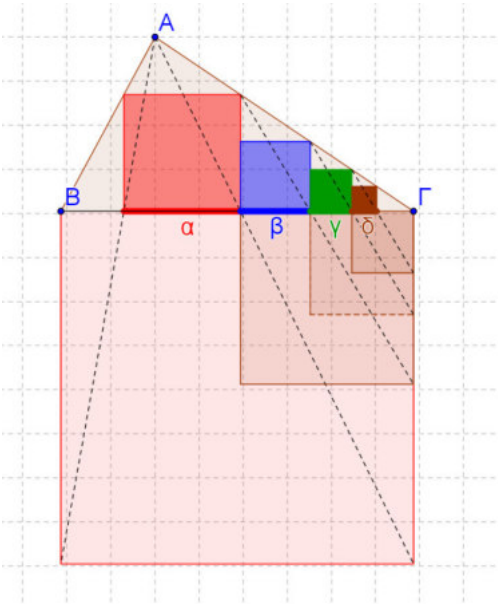
$$\psi=\frac{B\Delta\cdot\Delta E\cdot BE}{BE^2+B\Delta\cdot\Delta E}\Leftrightarrow\frac{\psi}{\Delta E}=\frac{B\Delta\cdot BE}{BE^2+B\Delta\cdot\Delta E}\Leftrightarrow\frac{\psi}{\chi}=\frac{\frac{B\Delta}{BE}}{1+\frac{B\Delta}{BE}\cdot\frac{\Delta E}{BE}}\Leftrightarrow\frac{\psi}{\chi}=\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\alpha}}$$

Άρα $\frac{\psi}{\chi}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\alpha^2+\beta\cdot\gamma}$ (1) . ‘Ομοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΖ έχουμε εγγράψει τετράγωνο πλευρά ζ οπότε θα έχουμε :

$$\zeta=\frac{BH\cdot ZH\cdot BZ}{BZ^2+BH\cdot ZH}\Leftrightarrow\frac{\zeta}{\psi}=\frac{BH\cdot BZ}{BZ^2+BH\cdot ZH}\Leftrightarrow\frac{\zeta}{\psi}=\frac{\frac{BH}{BZ}}{1+\frac{BH}{BZ}\cdot\frac{ZH}{BZ}}\Leftrightarrow\frac{\zeta}{\psi}=\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\alpha}}$$

Άρα $\frac{\zeta}{\psi}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2+\gamma\beta}$ (2). Από (1),(2) έχουμε το ζητούμενο.

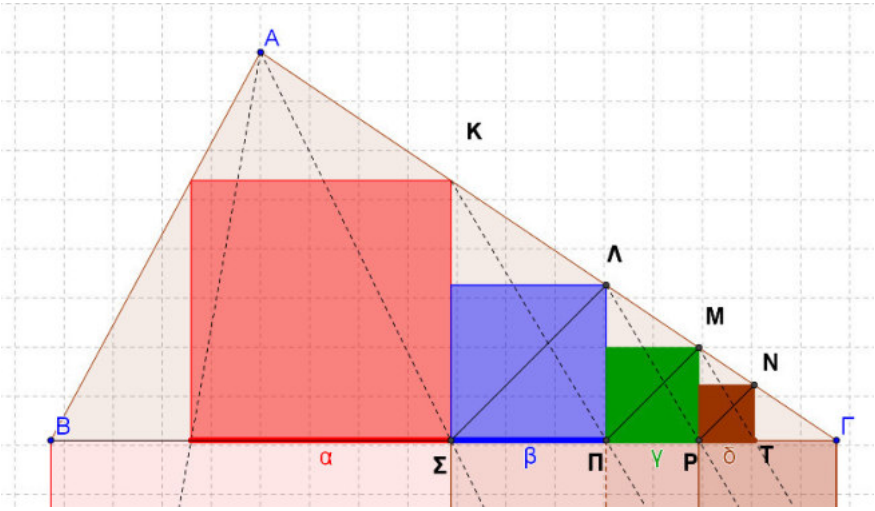
Πρόβλημα 22ο



Στο τρίγωνο ΑΒΓ εγγράφουμε τετράγωνα πλευρών α,β,γ και δ (όπως στο σχήμα)

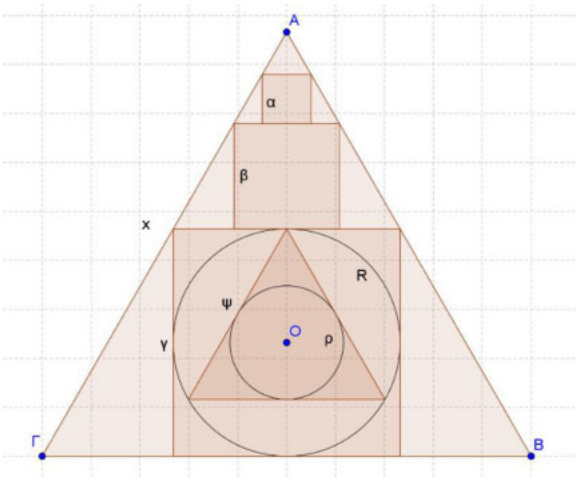
Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$

Απόδειξη



Ισχύουν οι ισότητες : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\Sigma K}{\Pi\Lambda}=\frac{\Sigma\Gamma}{\Pi\Gamma}=\frac{\Lambda\Gamma}{M\Gamma}=\frac{\Lambda\Pi}{MP}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\Pi\Gamma}{P\Pi}=\frac{M\Gamma}{N\Gamma}=\frac{MP}{NT}=\frac{\gamma}{\delta}$

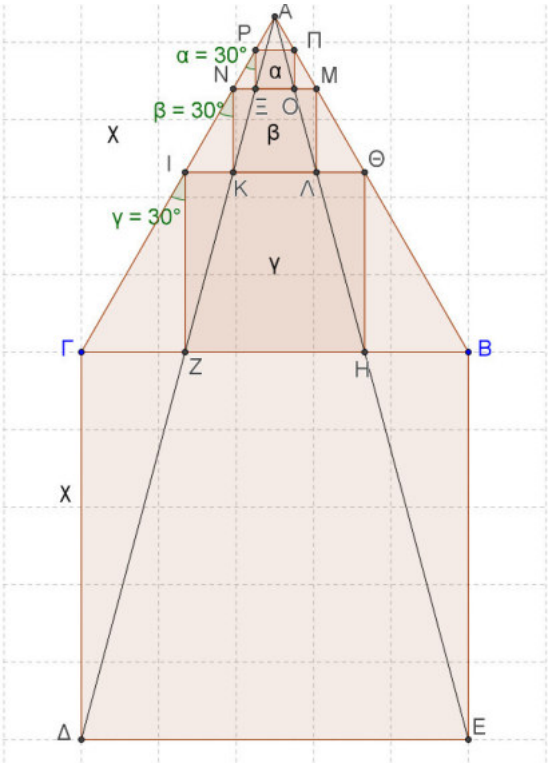
Πρόβλημα 23ο



Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στον ναό Sugawara στην πόλη Ueno και παρουσιάστηκε από τον Hojiroya Shoemon το 1854

Στο παραπάνω σχήμα έχουμε εγγράψει στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς χ τετράγωνα πλευρών α,β,γ (όπως στο σχήμα). Στο τετράγωνο πλευράς γ έχουμε γράψει τον εγγεγραμμένο κύκλο του ακτίνας R και μέσα σε αυτόν έχουμε εγγράψει ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ψ. Τέλος γράφουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο ακτίνας ρ. Να υπολογίσετε τα μεγέθη χ,ψ,ρ,R,β,γ συναρτήσει της πλευράς α.

Απόδειξη



Από τον τρόπο εγγραφής τετραγώνου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι επειδή το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο σχηματίζονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΙΖ, ΑΝΚ και ΑΡΞ. Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΙΖ η γωνία $\hat{I}$ είναι 30ο όπως και η INK και η $NP\Xi$.

Στο ορθογώνιο ΝΡΞ έχουμε :
ΝΞ=α, ΝΡ=ΑΝ-ΑΡ=ΝΚ-ΡΞ=β-α και

$N\Xi = \frac{NP}{2} = \frac{(\beta-\alpha)}{2}$. Από Π.Θ θα ισχύει :

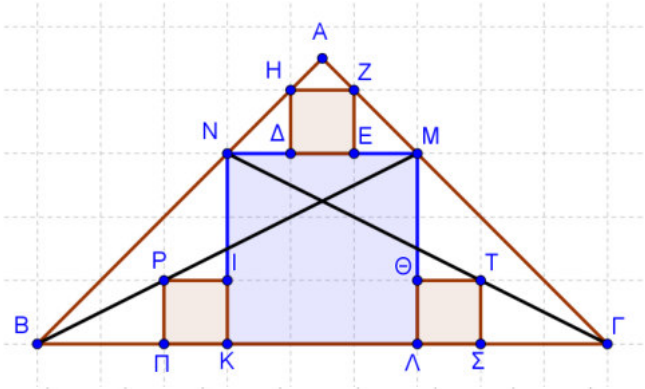
$$NP^2 = P\Xi^2 + N\Xi^2 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2 = \alpha^2 + \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \beta = \alpha\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Όμοια : $\gamma = \alpha\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{3})^2$, $\chi = \alpha\cdot(1+\frac{\sqrt{3}}{3})^3$

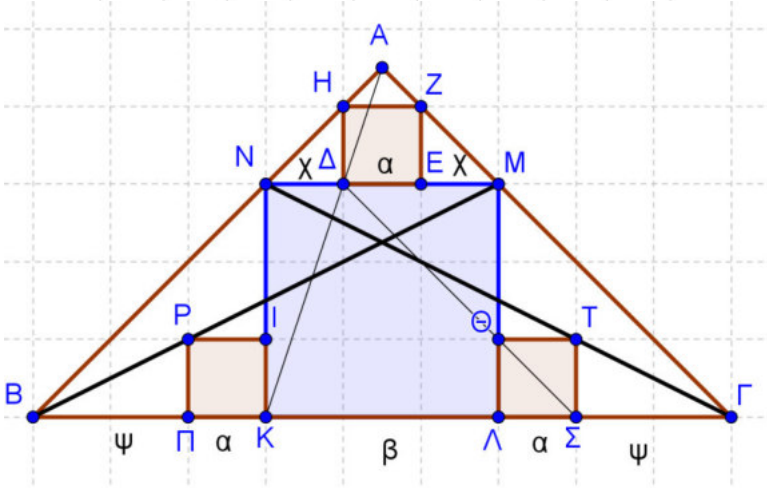
Ο υπολογισμός των ρ,ψ και R δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία.

Πρόβλημα 24ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε εγγράψει στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τρία ίσα τετράγωνα πλευρά α και ένα τετράγωνο πλευράς β. Να αποδείξετε ότι $\beta=3^{\alpha}$.

Απόδειξη



Ισχύουν :

$$\frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΝΚ}}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΚ}}=\frac{\text{ΝΔ}}{\text{ΒΚ}}=\frac{\chi}{\psi+\alpha} \quad (1)$$

$$\frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΝΚ}}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΚ}}=\frac{\text{ΔΜ}}{\text{ΚΓ}}=\frac{\alpha+\chi}{\beta+\alpha+\psi} \quad (2)$$

$$\frac{\text{ΡΠ}}{\text{ΜΛ}}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ΒΠ}}{\text{ΒΛ}}=\frac{\psi}{\psi+\alpha+\beta} \quad (3)$$

Άρα $\psi=\alpha+\chi$ (4)

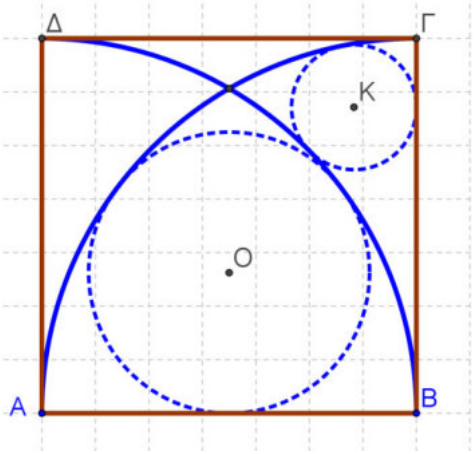
Επειδή $\beta=\alpha+2\chi$ (5)

Η (1) με τη βοήθεια των (4) και (5) γράφεται :

$$\frac{\alpha}{\alpha+2\chi}=\frac{\chi}{2\alpha+\chi}\Leftrightarrow 2\alpha^2+\alpha\chi=\alpha\chi+2\chi^2\Leftrightarrow \alpha=\chi$$

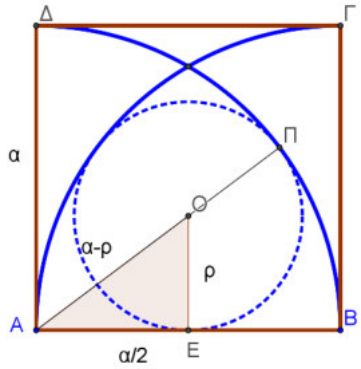
Οπότε $\beta=3\alpha$.

Πρόβλημα 25ο



Στο διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α έχουμε γράψει τεταρτοκύκλια (Α,α) και (Β,α). Εγγράφουμε τους κύκλους με κέντρα Ο και Κ όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των δύο κύκλων συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.

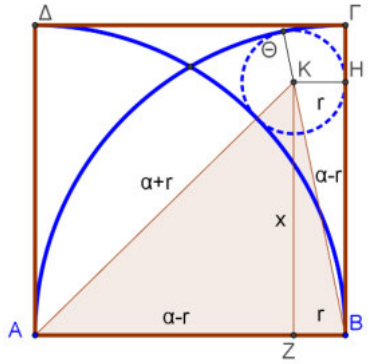
Απόδειξη



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΕ ισχύει ότι

$$(\alpha-\rho)^2=\rho^2+\frac{\alpha^2}{4}\Leftrightarrow \alpha^2+\rho^2-2\alpha\rho=\rho^2+\frac{\alpha^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\frac{3\alpha^2}{4}=2\alpha\rho\Leftrightarrow \rho=\frac{3\alpha}{8}$$



Φέρνουμε από το Κ κάθετες στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ του τετραγώνου. Τότε θα είναι ΖΒ=ΚΗ=r, ΚΒ=ΒΘ-ΘΚ=α-r, ΑΚ=α+r, ΑΖ=α-r.

Από Π.Θ. στο ΚΖΒ ισχύει ότι : $x^2=(\alpha-r)^2-r^2 \quad (1)$

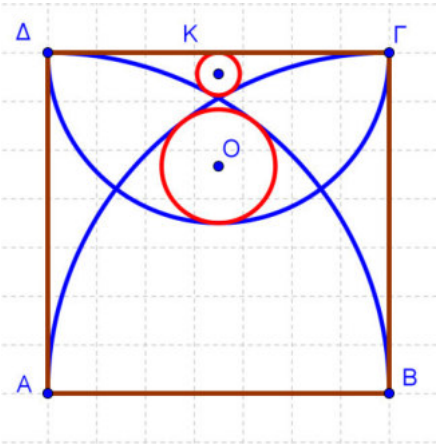
Από Π.Θ. στο ΑΚΖ ισχύει ότι : $x^2=(\alpha+r)^2-(\alpha-r)^2 \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε ότι :

$$(\alpha-r)^2-r^2=(\alpha+r)^2-(\alpha-r)^2\Leftrightarrow 2\alpha^2+2r^2-4\alpha r=r^2+\alpha^2+r^2+2\alpha r$$

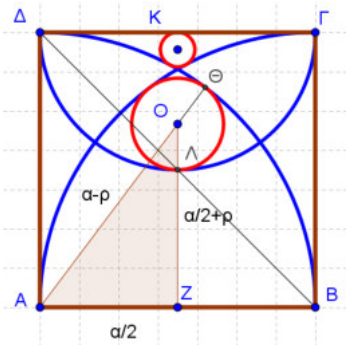
$$\Leftrightarrow \alpha^2=6\alpha r\Leftrightarrow r=\frac{\alpha}{6}$$

Πρόβλημα 26ο



Στο διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α γράφουμε τα τεταρτοκύκλια (Α,α) και (Β,α) και το ημικύκλιο διαμέτρου ΔΓ. Εγγράφουμε τους κύκλους με κέντρα τα σημεία Ο και Κ. Να υπολογίσετε της ακτίνες των κύκλων ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου.

Απόδειξη



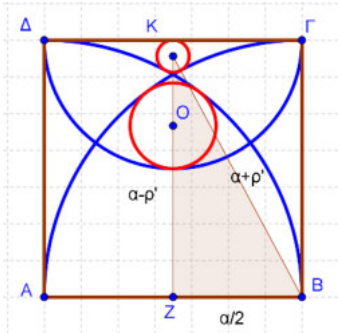
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΖ έχουμε ότι $AZ = \frac{\alpha}{2}$, $AO = \alpha - \rho$ και

$\Lambda Z = \frac{\alpha}{2} + \rho$ (γιατί ;)

Από Π.Θ. έχουμε :

$$AO^2 = AZ^2 + OZ^2 \Leftrightarrow (\alpha-\rho)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + (\frac{\alpha}{2}+\rho)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\rho^2-2\alpha\rho = \frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}+\rho^2+\alpha\rho \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{2} = 3\alpha\rho \Leftrightarrow \alpha = 6\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{\alpha}{6}$$



Στο ορθογώνιο ΚΖΒ έχουμε ότι : $KZ = \alpha - \rho'$, $ZB = \frac{\alpha}{2}$ και

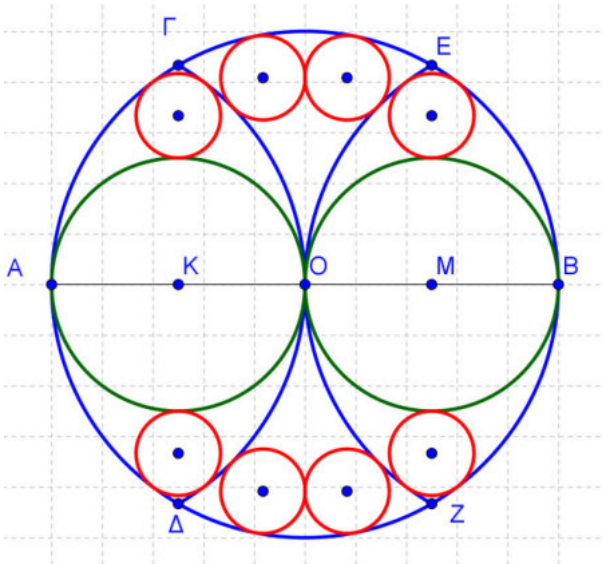
$KB = \alpha + \rho'$ (γιατί ;)

Από Π.Θ. έχουμε :

$$KB^2 = ZB^2 + KZ^2 \Leftrightarrow (\alpha+\rho')^2 = (\frac{\alpha}{2})^2 + (\alpha-\rho')^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\rho'^2+2\alpha\rho' = \frac{\alpha^2}{4}+\alpha^2+\rho'^2-2\alpha\rho' \Leftrightarrow$$

$$4\alpha\rho' = \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \rho' = \frac{\alpha}{16}$$

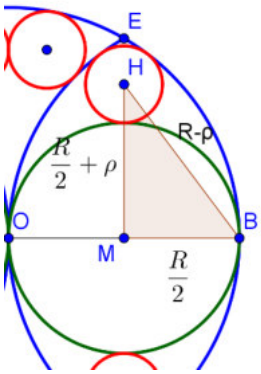
Πρόβλημα 27ο



Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Γράφουμε τα τόξα (Α,ΓΔ) και (Β,ΕΖ). Εγγράφουμε δύο κύκλους $(K,\frac{R}{2})$ και $(M,\frac{R}{2})$ και άλλους οκτώ μικρότερους κύκλους όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ των μικρών κύκλων είναι ίση με $\frac{R}{6}$

Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στον ναό Gifu της πόλης Ogaki και παρουσιάστηκε από την Okuda Tsume

Υπολογισμοί

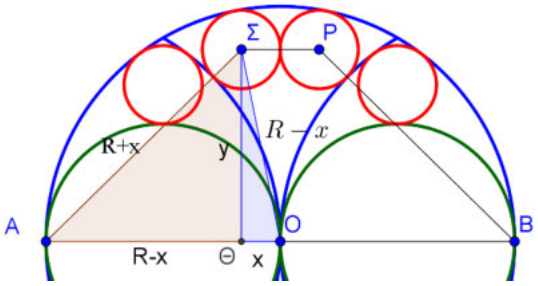


Από Π.Θ. στο ΗΜΒ έχουμε :

$$(R-\rho)^2=(\frac{R}{2}+\rho)^2+(\frac{R}{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$R^2+\rho^2-\rho R=\frac{R^2}{4}+\rho^2+\rho R+\frac{R^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \rho=\frac{R}{6}$$



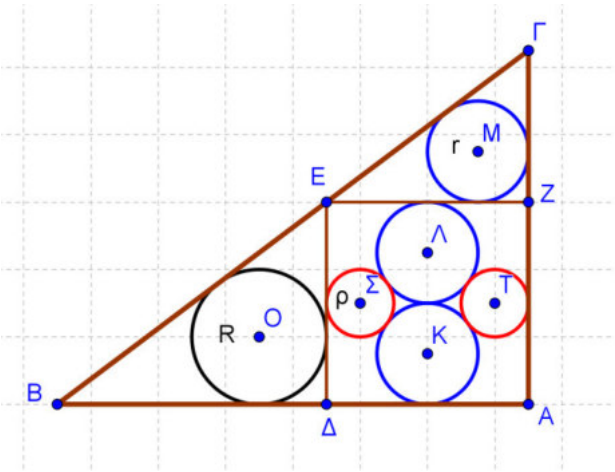
Το τραπέζιο ΣΡΒΑ είναι ισοσκελές από όπου έχουμε ότι ΑΘ=R-x και ΟΘ=x (γιατί;)

Από Π.Θ. στο ΑΣΘ : $y^2=(R+x)^2-(R-x)^2$ (1)

Από Π.Θ. στο ΣΘΟ : $y^2=(R-x)^2-x^2$ (2)

Από (1),(2) έχουμε τελικά ότι : $x=\frac{R}{6}$

Πρόβλημα 28ο



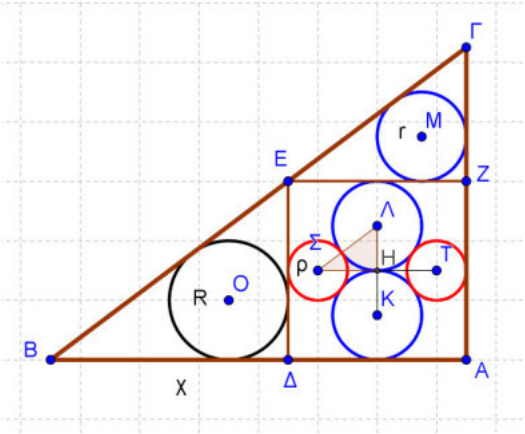
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε εγγράψει το τετράγωνο ΑΔΕΖ. Μέσα στο τετράγωνο έχω κατασκευάσει τους κύκλους (Τ,ρ), (Σ,ρ) και (Λ,r), (Κ,r).

Στο τρίγωνο ΕΓΖ εγγράφεται κύκλος (Μ,r) ενώ στο τρίγωνο ΒΕΔ ο κύκλος (Ο,R).

Να αποδείξετε ότι ισχύει : $R = 2\rho$

Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στο ναό του Akahagi Kannon και παρουσιάστηκε το 1874 από τον Sato Naosue έναν δεκατριάχρονο σπουδαστή

Υπολογισμοί



Η πλευρά α τετραγώνου είναι ίση με 4r

Το ΛΣΚΤ είναι ρόμβος (όλες οι πλευρές του είναι ίσες) με

$$\Lambda\Sigma = \rho + r \ , \ \Sigma H = \frac{\Sigma T}{2} = \frac{\alpha - 2\rho}{2} = 2r - \rho \ , \ \Lambda H = r$$

Από Π.Θ. στο ΣΛΗ έχουμε μετά από πράξεις ότι :

$$\rho = \frac{2}{3} r$$

Τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΕΓΖ είναι όμοια άρα :

$$\frac{B\Delta}{E\Delta} = \frac{R}{r} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{R}{r} \Leftrightarrow x = \frac{R \cdot \alpha}{r} \Leftrightarrow x = \frac{R \cdot 4r}{r} \Leftrightarrow x = 4R$$

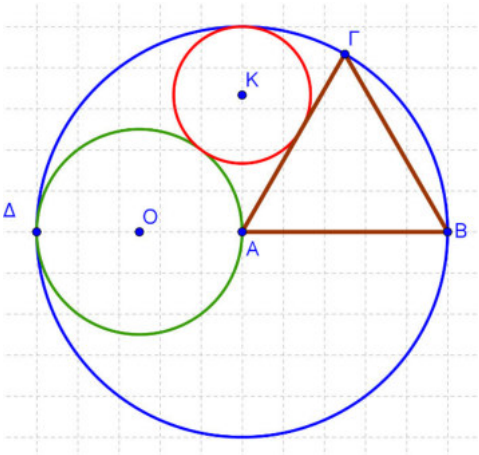
Στο ορθογώνιο ΒΕΔ είναι : $B\Delta = 4R$, $\Delta E = \alpha = 4r$, $BE = 4\sqrt{R^2 + r^2}$, άρα

$\tau = \dfrac{4R + 4r + 4\sqrt{R^2 + r^2}}{2} = 2R + 2r + 2\sqrt{R^2 + r^2}$ και η ακτίνα R του εγγεγραμμένου κύκλου θα είναι

$$R = \tau - BE = 2R + 2r - 2\sqrt{R^2 + r^2} \Leftrightarrow R + 2r = 2\sqrt{R^2 + r^2} \Leftrightarrow$$

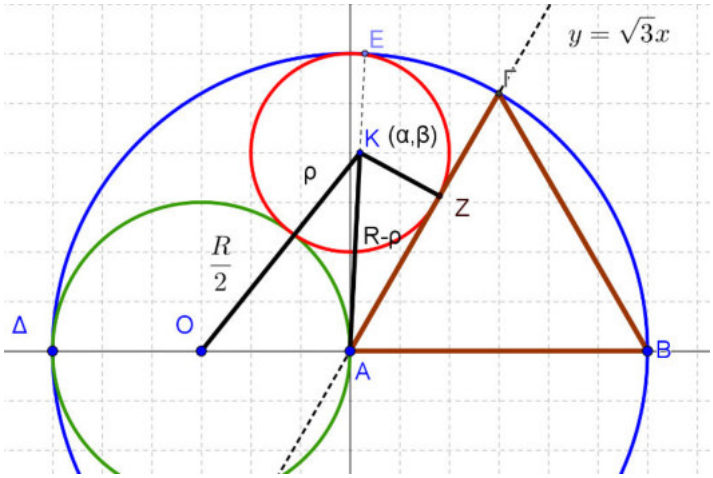
$$R^2 + 4r^2 + 4rR = 4R^2 + 4r^2 \Leftrightarrow 4r = 3R \Leftrightarrow R = \frac{4}{3} \cdot r \Leftrightarrow R = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \rho \Leftrightarrow R = 2\rho$$

Πρόβλημα 29ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο (Α,R) και τα Δ,Β αντιδιαμετρικά σημεία. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τον κύκλο $(O,\frac{R}{2})$. Ένας τρίτος κύκλος (Κ,ρ) εφάπτεται των δύο κύκλων και του ισοπλεύρου τριγώνου, όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι η ΚΑ είναι κάθετη στην διάμετρο ΔΒ.

Απόδειξη



Έστω ότι η ΚΑ δεν είναι κάθετη στην ΑΒ. Θεωρούμε σύστημα αξόνων με αρχή το Α και οριζόντιο άξονα την ΔΒ.

Με τη βοήθεια του συστήματος έχουμε :

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση $y=\sqrt{3}\cdot x$ (;), Α(0,0) , $O(-\frac{R}{2},0)$ και έστω ότι Κ(α,β) με β>0. Αρκεί να δείξουμε ότι α=0.

Ισχύουν οι ισότητες :

$$OK=\frac{R}{2}+\rho \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha+\frac{R}{2})^2+\beta^2}=\frac{R}{2}+\rho \Leftrightarrow \alpha^2+\frac{R^2}{4}+\alpha R+\beta^2=\frac{R^2}{4}+\rho^2+\rho R \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\alpha R+\beta^2=\rho^2+\rho R \quad (1)$$

$$AK=R-\rho \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2}=R-\rho \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=R^2-2\rho R+\rho^2 \quad (2)$$

$$KZ=\rho \Leftrightarrow \frac{\beta-\sqrt{3}\alpha}{2}=\rho \Leftrightarrow 2\rho=\beta-\sqrt{3}\alpha \Leftrightarrow \beta=2\rho+\sqrt{3}\alpha \quad (3)$$

(1)-(2) : $\alpha R=3\rho R-R^2 \Leftrightarrow \alpha=3\rho-R \quad (4)$

$$(3)\overset{(4)}{\Rightarrow}\beta=2\rho+\sqrt{3}\cdot(3\rho-R) \quad (5)$$

$$(2) \overset{(4),(5)}{\Rightarrow} (3\rho - R)^2 + [2\rho + \sqrt{3}\cdot(3\rho - R)]^2 = (R-\rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$(3\rho - R)^2 + 4\rho^2 + 3\cdot(3\rho - R)^2 + 4\sqrt{3}\cdot\rho\cdot(3\rho - R) - R^2 + 2\rho R - \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\rho - R)^2 + 3\cdot(3\rho - R)^2 + 4\sqrt{3}\cdot\rho\cdot(3\rho - R) + (3\rho^2 + 2\rho R - R^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\rho - R)^2 + 3\cdot(3\rho - R)^2 + 4\sqrt{3}\cdot\rho\cdot(3\rho - R) + (3\rho - R)(\rho + R) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3\rho - R)(3\rho - R + 3(3\rho - R) + 4\sqrt{3}\cdot\rho + \rho + R) = 0 \Leftrightarrow$$

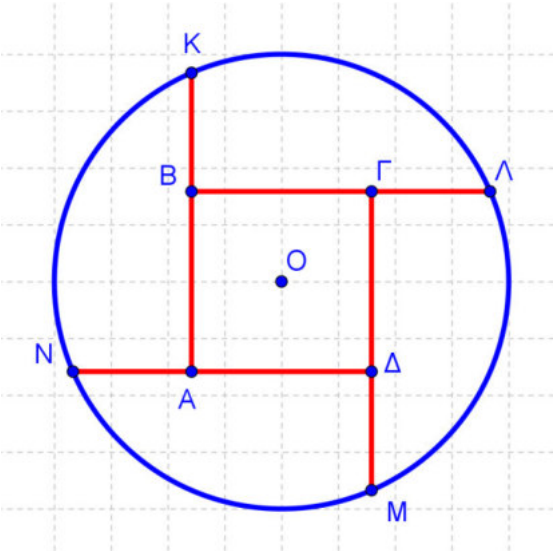
$$(3\rho - R)[(13 + 4\sqrt{3})\rho - 3R] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho = \frac{R}{3} \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{3R}{(1+2\sqrt{3})^2}$$

Αν $\rho = \frac{R}{3}$, τότε α=0 και $\beta = \frac{2R}{3}$, άρα η ΚΑ είναι κάθετη της ΑΒ.

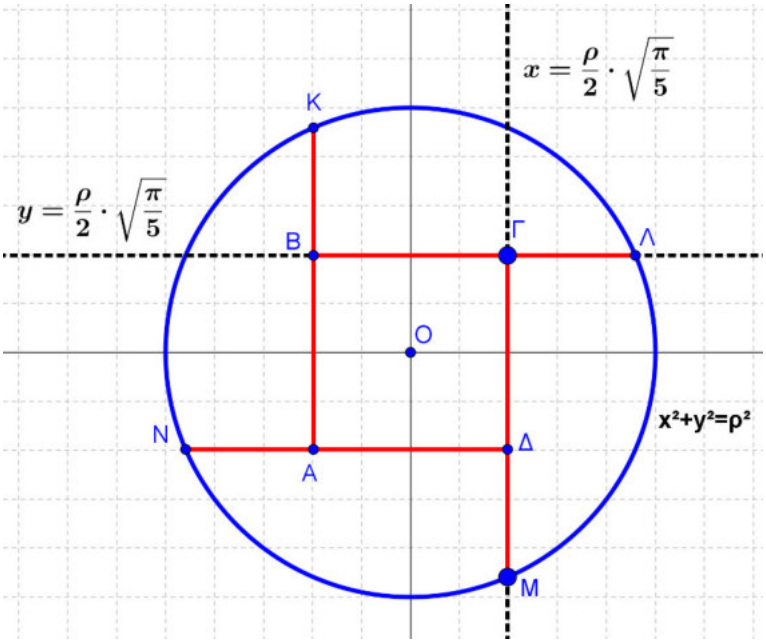
Αν $\rho = \frac{3R}{(1+2\sqrt{3})^2}$ καταλήγουμε ότι $\alpha = \frac{-4(1+\sqrt{3})R}{(1+2\sqrt{3})^2}$ και $\beta = \frac{-6-4\sqrt{3}}{(1+2\sqrt{3})^2}R < 0$ άτοπο.

Πρόβλημα 30ο



Στο διπλανό κύκλο (Ο,ρ) έχουμε κατασκευάσει τέσσερα τμήματα ΑΚ,ΒΛ,ΓΜ και ΔΝ μήκους α, που χωρίζουν τον κύκλο σε πέντε ίσα μέρη. Αν το ένα από αυτά είναι το τετράγωνο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε το μήκος α.

Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στο ναό Katayamahiko στην πόλη Okayama και παρουσιάστηκε από τον Inie Shinjun το 1873



Υπολογισμοί

Αν χ η πλευρά του τετραγώνου τότε ισχύει : $x^2 = \frac{\pi\rho^2}{5} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{\pi}{5}}$

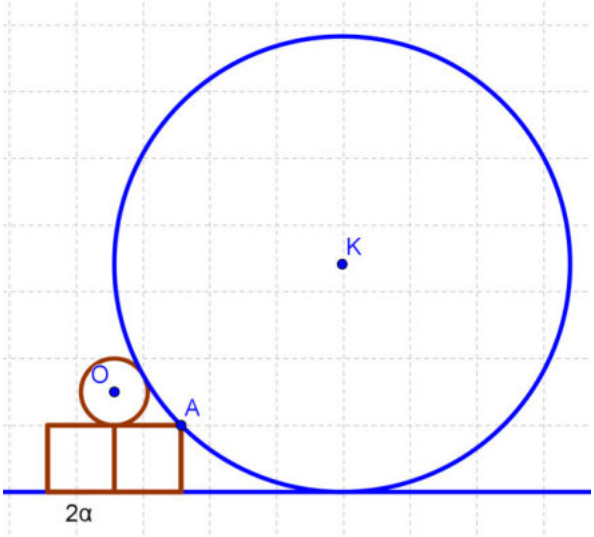
Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο Ο. Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(\frac{\rho}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{5}}, \frac{\rho}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{5}})$.

Το σημείο Μ θα βρεθεί ως σημείο τομής της ευθείας $x = \frac{\rho}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{5}}$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$, απαιτώντας να έχει αρνητική τεταγμένη.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων έχουμε ότι : Μ= $(\frac{\rho}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{5}}, -\rho\cdot\sqrt{1-\frac{\pi}{20}})$

Οπότε ΓΜ= $\rho\cdot(\sqrt{\frac{\pi}{20}} + \sqrt{1-\frac{\pi}{20}})$

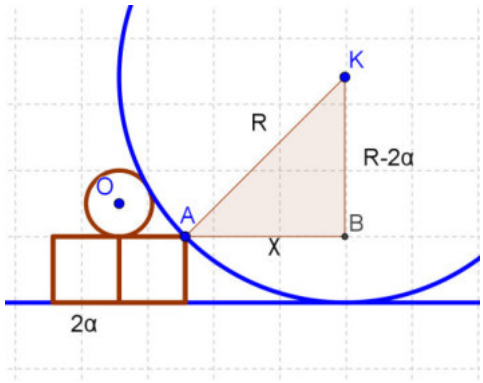
Πρόβλημα 31ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται μία ευθεία (ε) και δύο τετράγωνα πλευράς 2α. Πάνω σε αυτά έχουμε κατασκευάσει κύκλο (Ο,α). Ένας κύκλος (Κ,R) εφάπτεται του κύκλου (Ο,α), της ευθείας (ε) και διέρχεται από το σημείο Α, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ακτίνα R συναρτήσει του α.

Το sangaku αυτό τοποθετήθηκε στον ναό Shimizu και παρουσιάστηκε το 1828 από τον Kobayashi Nobutomo

Υπολογισμοί



Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε :

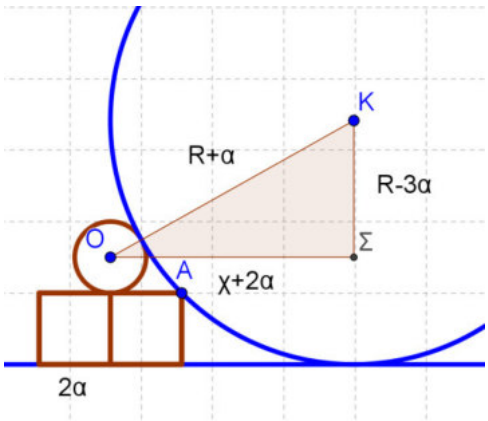
$$x^2+(R-2\alpha)^2=R^2 \Leftrightarrow x^2=4\alpha R-4\alpha^2 \quad (1)$$

Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΣ έχουμε :

$$(x+2\alpha)^2+(R-3\alpha)^2=(R+\alpha)^2 \Leftrightarrow$$
$$8\alpha R=12\alpha^2+x^2+4\alpha x \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1),(2) έχουμε τελικά ότι :

$$x=R-2\alpha \quad (3)$$

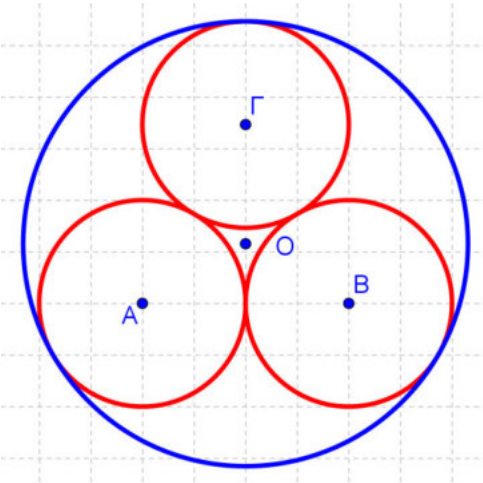


Οπότε από την (1) έχουμε ότι :

$$(R-2\alpha)^2+(R-2\alpha)^2=R^2 \Leftrightarrow \ldots$$

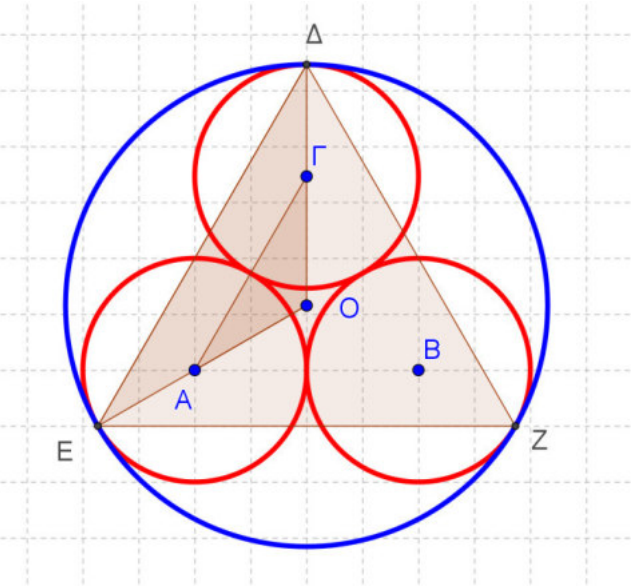
$$R=\frac{2\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

Πρόβλημα 32ο



Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ εγγράφονται στον κύκλο (Ο,R). Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί

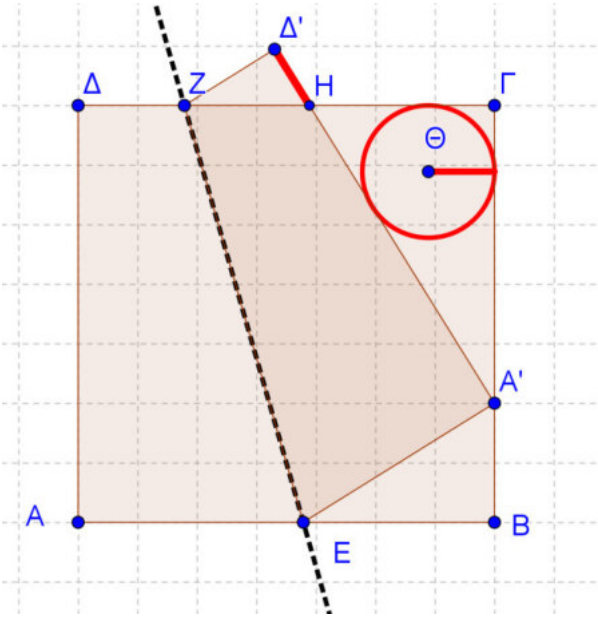


Έστω Δ,Ε,Ζ τα σημεία επαφής των τριών κύκλων με τον κύκλο (Ο,R). Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,R) , άρα $\Delta E = R\sqrt{3}$. Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΔΕ είναι όμοια άρα :

$$\frac{OA}{OE} = \frac{\Gamma A}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{R-\rho}{R} = \frac{2\rho}{R\sqrt{3}} \Leftrightarrow \ldots$$

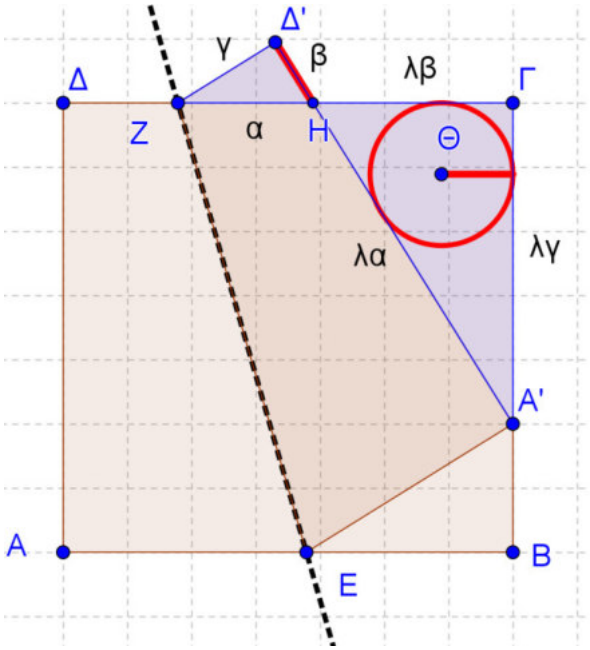
$$\Leftrightarrow \rho = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Πρόβλημα 33ο



Ένα τετράγωνο χαρτί διπλώνεται ώστε η κορυφή Α να πέσει στη θέση Α' πάνω στην πλευρά ΓΒ (όπως στο σχήμα). Αν η πλευρά Δ'Α' τέμνει την ΔΓ στο Η, να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΗΓΑ' είναι ίση με το τμήμα Δ'Η=a.

Απόδειξη



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔ'Η και ΗΓΑ' είναι όμοια άρα αν ονομάσω την ΖΗ=α, την Δ'Η=β και την ΖΔ'=γ τότε θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ ώστε να είναι ΗΓ=λβ, ΓΑ'=λγ και ΗΑ'=λα.

Επειδή ΔΓ=Δ'Α' έχουμε :

$$\gamma+\alpha+\lambda\beta=\beta+\lambda\alpha \Leftrightarrow \lambda(\alpha-\beta)=\gamma+\alpha-\beta \Leftrightarrow$$

$$\lambda=\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \lambda=\frac{(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\lambda=\frac{\gamma(\alpha+\beta)+(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} \Leftrightarrow \lambda=\frac{\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2}{\gamma^2}$$

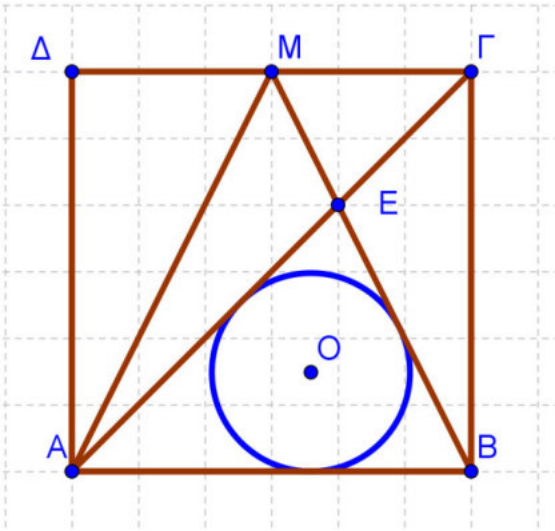
Άρα $\lambda=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}$

Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ίση με τ-λα, όπου τ η ημιπερίμετρος, άρα

$$\rho=\frac{\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma}{2}-\lambda\alpha=\frac{\lambda\beta+\lambda\gamma-\lambda\alpha}{2}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}{2\gamma}=\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{2\gamma}=$$

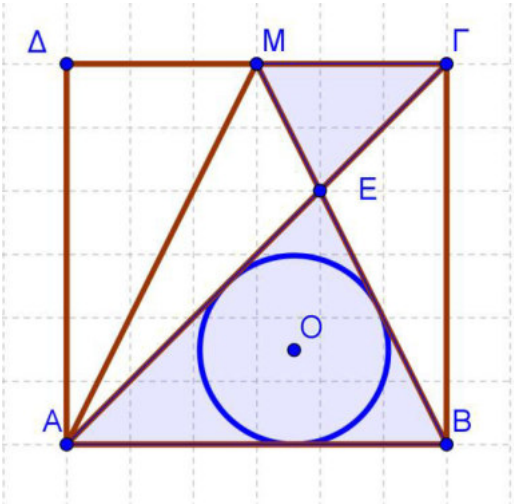
$$=\frac{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma-\alpha^2}{2\gamma}=\frac{2\beta\gamma}{2\gamma}=\beta=\Delta'\mathrm{H}$$

Πρόβλημα 34ο



Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε Μ το μέσο της ΔΓ και ονομάζουμε Ε το σημείο τομής της ΜΒ και της ΑΓ. Να υπολογίσετε την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.

$$\rho = \frac{2\alpha}{3+\sqrt{5}+\sqrt{8}}$$



Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΜΕΓ και ΑΕΒ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 1/2.

Άρα ΑΒ=α , $EB = \frac{2}{3}MB = \frac{2}{3}\frac{\alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{3}$ και

$AE = \frac{2}{3}A\Gamma = \frac{2\alpha\sqrt{2}}{3}$.

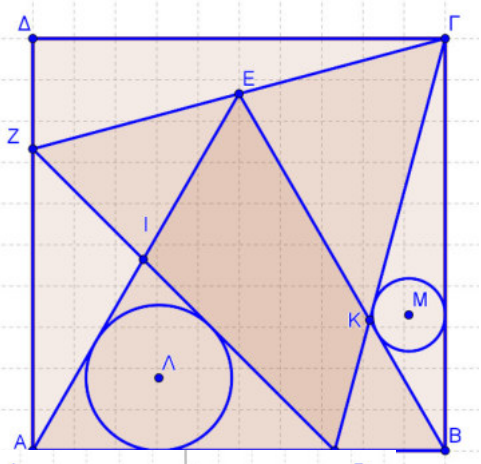
Οπότε η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΕΒ είναι

$$\tau = \frac{3\alpha+\alpha\sqrt{5}+\alpha\sqrt{8}}{6} .$$

Το εμβαδόν του είναι $E = \frac{1}{2}AE \cdot AB \cdot \eta\mu 45^{o} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\alpha\sqrt{2}}{3}\cdot\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2}{3}$

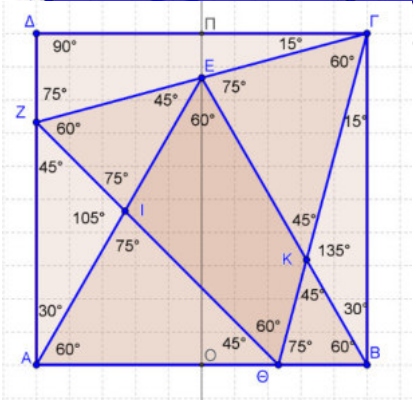
Από τον τύπο Ε=τρ έχουμε τελικά ότι : $\frac{\alpha^2}{3} = \rho\cdot\frac{3\alpha+\alpha\sqrt{5}+\alpha\sqrt{8}}{6} \Leftrightarrow \rho = \frac{2\alpha}{3+\sqrt{5}+\sqrt{8}}$

Πρόβλημα 35ο



Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΖΘ (όπως στο σχήμα). Κατασκευάζουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ΑΙΘ και ΚΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του ενός είναι διπλάσια της ακτίνας του άλλου.

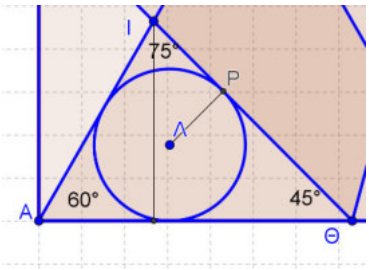
Απόδειξη



Ας παρατηρήσουμε ότι το τρίγωνο ΖΑΘ είναι ισοσκελές Επίσης ισχύουν :

$ΕΟ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$ (ύψος ισοπλεύρου τριγώνου)

Άρα $ΠΕ = α - \frac{α\sqrt{3}}{2} = \frac{α\cdot(2-\sqrt{3})}{2}$ οπότε $ΔΖ = α\cdot(2-\sqrt{3})$ και $ΖΑ = ΑΘ = α\cdot(\sqrt{3}-1)$. Από Π.Θ. στο ΠΕΓ έχουμε ότι $ΓΕ = \frac{α\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}{2}$ άρα $ΓΖ = α\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.



Στο ΑΙΘ γνωρίζουμε την ΑΘ και τις γωνίες του, θα δουλέψουμε με τριγωνομετρία.

Ισχύει ότι $\frac{ημ75^o}{ΑΘ} = \frac{ημ45^o}{ΑΙ} = \frac{ημ60^o}{ΙΘ}$ με

$$ημ75^o = ημ(45^o + 30^o) = ημ45^o \cdot συν30^o + συν45^o \cdot ημ30^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Οπότε $$ΑΙ = \frac{α(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2α(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = α(\sqrt{3}-1)^2$$

$$ΙΘ = \frac{α(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2α\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)} = \frac{α\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{2}} = \frac{α\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}{2}$$

$$2\tau=\alpha(\sqrt{3}-1)+\alpha(\sqrt{3}-1)^2+\frac{\alpha\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)^2}{2}=\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)(2+2\sqrt{3}-2+\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1))}{2}=$$

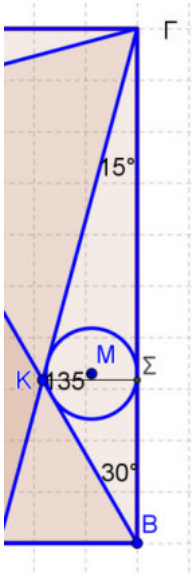
$$=\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$$

Επίσης θα ισχύει και $\eta\mu 60^o=\frac{\upsilon}{AI}\Leftrightarrow \upsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\alpha(\sqrt{3}-1)^2$

Και $E=\frac{1}{2}\upsilon\cdot A\Theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\alpha\cdot(\sqrt{3}-1)^2\cdot\alpha\cdot(\sqrt{3}-1)=\frac{\alpha^2\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)^3}{4}$

Από τον τύπο Ε=τρ έχουμε ότι :

$$\rho=\frac{E}{\tau}=\frac{\frac{\alpha^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^3}{4}}{\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}\quad(1)$$



Θα δουλέψουμε παρόμοια στο τρίγωνο ΓΚΒ , ισχύει ότι :

$\frac{\eta\mu 15^o}{KB}=\frac{\eta\mu 135^o}{\Gamma B}=\frac{\eta\mu 30^o}{K\Gamma}$ με

$$\eta\mu 15^o=\eta\mu(45^o-30^o)=\eta\mu 45^o\cdot\sigma\upsilon\nu 30^o-\sigma\upsilon\nu 45^o\cdot\eta\mu 30^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Οπότε ΒΓ=α , $KB=\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{2}$ και $K\Gamma=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

Και $2\tau'=\alpha+\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{2}+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$\eta\mu 30^o=\frac{\upsilon'}{KB}\Leftrightarrow \upsilon'=\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{4}\quad,$$

$$E'=\frac{1}{2}\cdot\upsilon'\cdot B\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{4}\cdot\alpha=\frac{\alpha^2(\sqrt{3}-1)}{8}$$

$$\rho'=\frac{E'}{\tau'}=\frac{\frac{\alpha^2(\sqrt{3}-1)}{8}}{\frac{\alpha(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}}=\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι ρ=2ρ’ (γιατί;)

Πρόβλημα 36ο

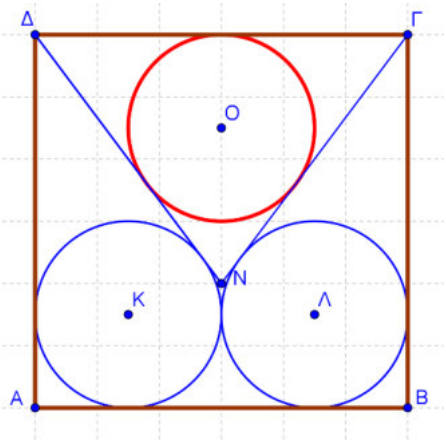
Το παραπάνω είναι ένα ιδιαίτερο sangaku διότι εκτός από μαθηματικά το διακρίνει η άψογη από αισθητικής άποψης παρουσίαση του θέματος.

« Ένα φίδι δύο μέτρα μακρύ κοιμάται έχοντας τυλιχθεί μία φορά γύρω από ένα κλαδί δένδρου που έχει σχήμα κυλινδρικό. Το μέρος του φιδιού που δεν τυλίγεται γύρω από το κλαδί έχει μήκος όσο και η διάμετρος του κλαδιού χ. Να βρείτε τη διάμετρο χ του κλαδιού.»

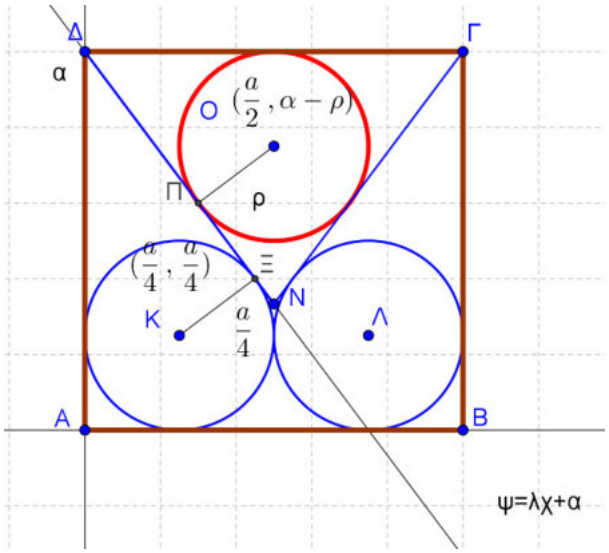
Απάντηση

Ισχύει ότι : $\pi x + x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\pi + 1}$

Πρόβλημα 37ο



Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) εφάπτονται μεταξύ τους και στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Κατασκευάζουμε έναν τρίτο κύκλο, όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι οι τρεις κύκλοι είναι ίσοι.



Απόδειξη

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή Α(0,0), οπότε Δ(0,α)

Έστω ότι η ΔΞ έχει εξίσωση $y=\lambda x+\alpha$ και

$K=(\frac{\alpha}{4},\frac{\alpha}{4})$ (γιατί;) και $O=(\frac{\alpha}{2},\alpha-\rho)$.

Ισχύει ότι : $d(\kappa,\varepsilon)=\frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{\alpha}{4}-\lambda\frac{\alpha}{4}-\alpha\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow$

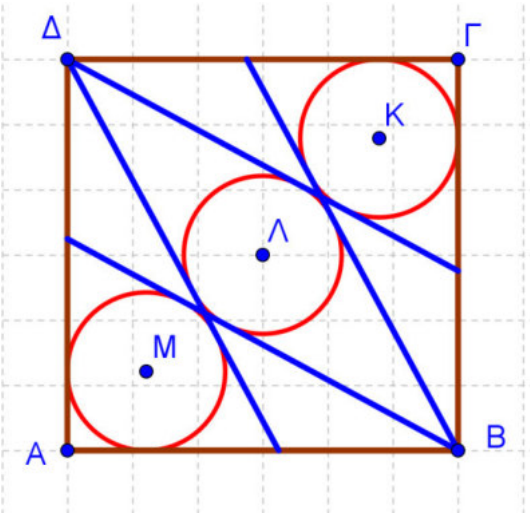
$$\frac{\alpha}{4}\cdot|\lambda+3|=\frac{\alpha}{4}\cdot\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=-\frac{4}{3}$$

Άρα (ε): $y=-\frac{4}{3}x+\alpha$.

Επειδή $d(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|3(\alpha-\rho)+2\alpha-3\alpha|}{5}=\rho \Leftrightarrow |2\alpha-3\rho|=5\rho \Leftrightarrow \ldots \rho=\frac{\alpha}{4}$ ή $\rho=-\alpha$

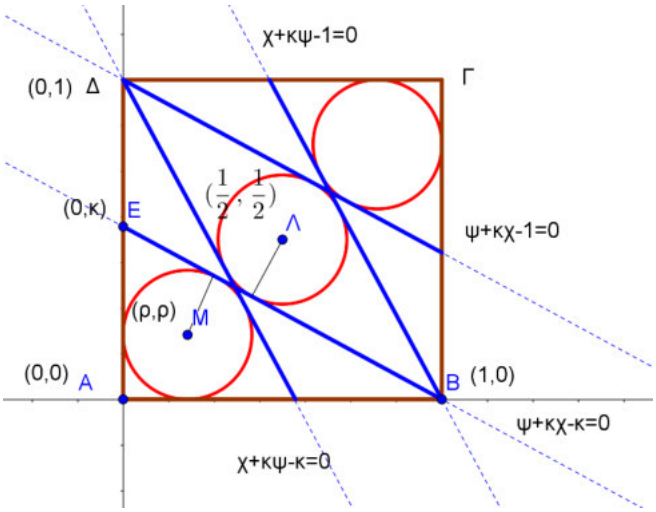
Άρα $\rho=\frac{\alpha}{4}$, δηλαδή ο τρίτος κύκλος είναι ίσος με τους δύο αρχικούς.

Πρόβλημα 38ο



Τρεις ίσοι κύκλοι έχουν εγγραφεί μέσα στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ των κύκλων συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.

Υπολογισμοί



Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με Α(0,0), Β(1,0) και Δ(0,1). Αν Ε(0,κ) τότε η εξίσωση της ΕΒ είναι : ψ+κχ-κ=0. Η εξίσωση της παραλλήλου από το Δ είναι ψ+κχ-1=0, ενώ οι άλλες ευθείες επειδή είναι οι συμμετρικές τους ως προς την διχοτόμο θα έχουν εξισώσεις : χ+κψ-1=0 και χ+κψ-κ=0. Το κέντρο Λ του «μεσαίου» κύκλου έχει συνταγμένες (1/2,1/2), ενώ το κέντρο του «πρώτου» κύκλου είναι Μ(ρ,ρ), όπου ρ η ακτίνα των ίσων κύκλων.

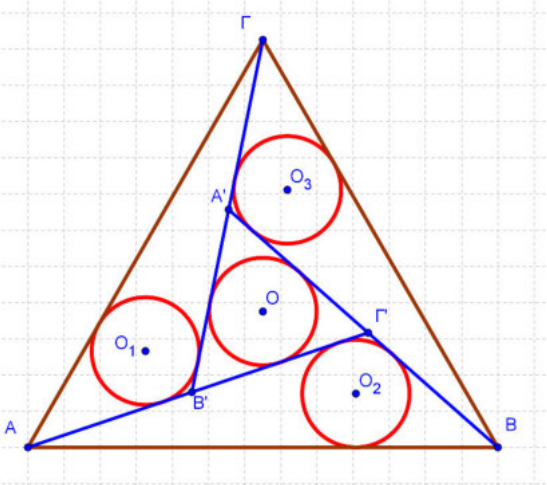
Ισχύουν οι ισότητες :

$$d(\Lambda, EB) = \rho \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} + \kappa \cdot \frac{1}{2} - \kappa\right| = \rho \cdot \sqrt{1+\kappa^2} \Leftrightarrow 1 - \kappa = 2\rho \cdot \sqrt{1+\kappa^2} \quad (1)$$

$$d(M, EB) = \rho \Leftrightarrow |\rho + \kappa\rho - \kappa| = \rho \cdot \sqrt{1+\kappa^2} \Leftrightarrow \kappa - \rho - \kappa\rho = \rho \cdot \sqrt{1+\kappa^2} \quad (2)$$

Από το σύστημα των δύο εξισώσεων καταλήγουμε στις σχέσεις $\rho = \frac{3\kappa - 1}{2 + 2\kappa}$ (3) με το κ να επαληθεύει την εξίσωση $4\kappa^3 - 3\kappa^2 + 6\kappa - 3 = 0$ (4) , εξίσωση που δίνει λύση : χ~ 0.54079 η οποία με τη σειρά της δίνει τιμή στο ρ~0.20196. Άρα γενικά στο τετράγωνο πλευράς α η ακτίνα ρ είναι ρ=0.20196α !

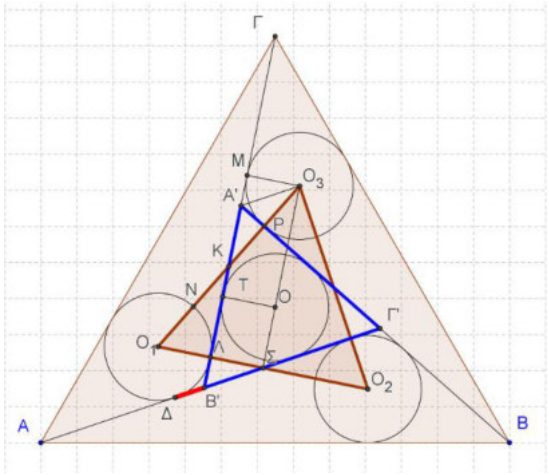
Πρόβλημα 39ο



Στο διπλανό σχήμα οι τέσσερεις κύκλοι είναι ίσοι. Αν τα τρίγωνα ΑΓΒ', ΑΓ'Β και Α'ΓΒ είναι ίσα, να βρείτε την ακτίνα ρ των κύκλων ως συνάρτηση της πλευράς α του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ.

Υπολογισμός

Τα τρίγωνα Α'Β'Γ' και $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρα (γιατί;)



Το MO_3OT είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (γιατί;) άρα $MT//O_3O$ και επειδή η O_3O είναι κάθετη της O_1O_2 θα είναι και η MT άρα η MT είναι εφαπτόμενη του (O_1,ρ), άρα διέρχεται από το σημείο επαφής Λ. Οπότε $M\Lambda = O_3\Sigma = \frac{O_1O_2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Λόγω των παραλλήλων έχουμε ότι $MKO_3 = KO_3\Sigma = 30^o$ οπότε $KO_3 = 2MO_3 = 2\rho$, οπότε (λόγω του παραλληλογράμμου $MO_3\Lambda O_1$) $O_1O_3 = 4\rho$ (1) και

$M\Lambda = O_3\Sigma = \frac{O_1O_3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{4\rho\sqrt{3}}{2} = 2\rho\sqrt{3}$. Εύκολα τώρα είμαστε σε θέση να καταλήξουμε και στην ισότητα $A'B' = M\Lambda = O_3\Sigma = 2\rho\sqrt{3}$ (2).

Επίσης ισχύουν : $\Delta B' = B'\Lambda = A'M \overset{\Pi.\Theta.\ A'MO_3}{=} \ldots = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}$ (3)

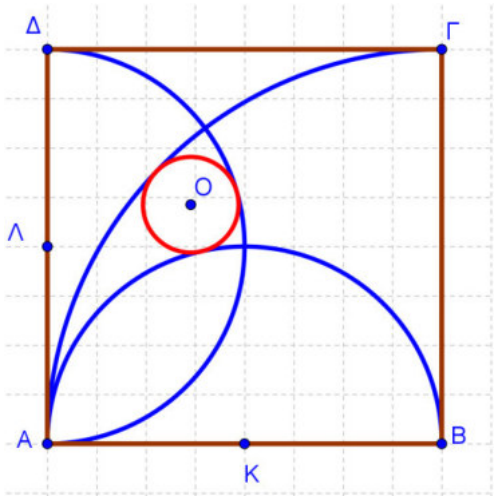
Αλλά στο τρίγωνο ΑΒ'Γ ισχύει ότι $\Delta B' = \tau - \alpha \Leftrightarrow \frac{\rho\sqrt{3}}{3} = \tau - \alpha \Leftrightarrow \tau = \alpha + \frac{\rho\sqrt{3}}{3}$ (4)

Επειδή : $3(AB'\Gamma) + (A'B'\Gamma') = (AB\Gamma) \Leftrightarrow 3\cdot(\tau\cdot\rho) + (A'B'\Gamma') = (AB\Gamma)$ έχουμε ότι :

$$3\cdot(\alpha\rho + \frac{\rho^2\sqrt{3}}{3}) + \frac{(2\rho\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4\sqrt{3}\cdot\rho^2 + 3\alpha\rho - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = 0$$

Από όπου έχουμε ότι : $\rho = \frac{\alpha\cdot(\sqrt{21}-3)}{8\sqrt{3}}$

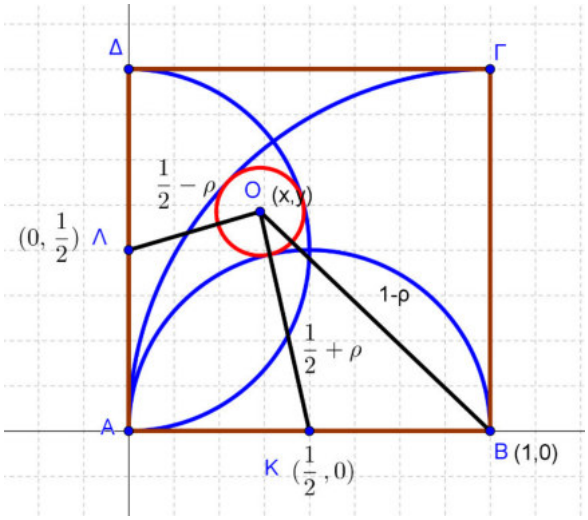
Πρόβλημα 40ο



Στο διπλανό τετράγωνο πλευράς α έχουμε γράψει δύο ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ και ΔΑ και ένα τεταρτοκύκλιο, όλα εσωτερικά του τετραγώνου. Στη συνέχεια εγγράφουμε τον κύκλο (Ο,ρ) όπως στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα : $\rho = \frac{4}{33} \cdot \alpha$

Απόδειξη



Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Με βάση αυτό έχουμε ότι Β(1,0), Α(0,0).

Οπότε θα είναι και $K = (\frac{1}{2}, 0)$, $\Lambda = (0, \frac{1}{2})$.

Αν Ο=(x,y) τότε επειδή ισχύουν οι ισότητες :

$OB = 1 - \rho$, $OK = \frac{1}{2} + \rho$ και $O\Lambda = \frac{1}{2} - \rho$ θα καταλήξουμε στις παρακάτω εξισώσεις.

$$d(O,B) = 1 - \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1 - \rho \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = \rho^2 - 2\rho \quad (1)$$

$$d(O,K) = \frac{1}{2} + \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2} = \frac{1}{2} + \rho \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 = \rho^2 + \rho \quad (2)$$

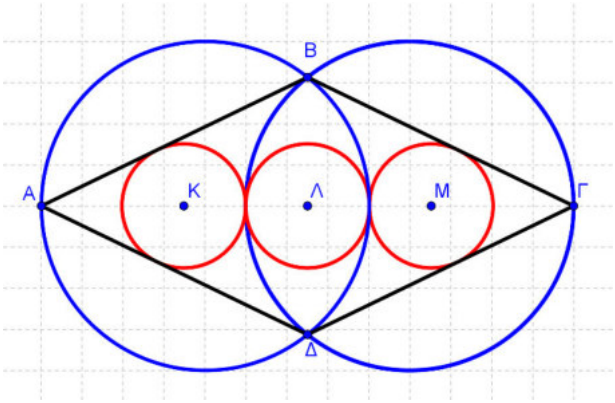
$$d(O,\Lambda) = \frac{1}{2} - \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} - \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = \rho^2 - \rho \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων … καταλήγουμε στις ισότητες :

$\rho = \frac{4}{33}$, $x = \frac{4}{11}$, $y = \frac{20}{33}$.

Άρα γενικά θα είναι $\rho = \frac{4}{33} \cdot \alpha$, όπου α η πλευρά του τετραγώνου.

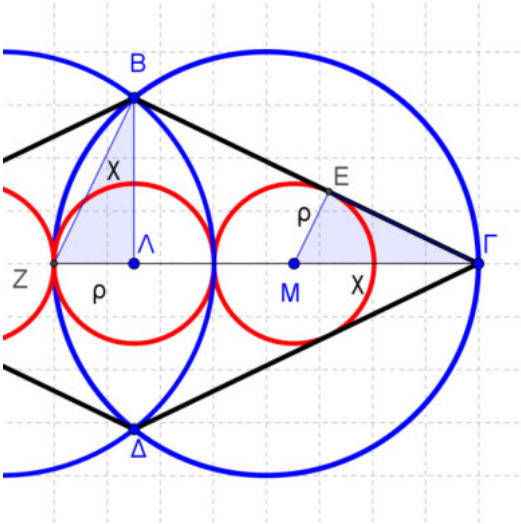
Πρόβλημα 41ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο τεμνόμενους κύκλους ακτίνας R. Στο εσωτερικό τους εγγράφουμε τρεις ίσους κύκλους ακτίνας ρ, όπως στο σχήμα.

Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ συναρτήσει της R.

Υπολογισμοί



Τα τρίγωνα ΒΖΛ και ΜΕΓ είναι ίσα (γιατί;). Άρα ΒΖ=ΜΓ=χ.

Συγχρόνως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΓ ισχύει ότι :

$$BZ^2 = Z\Lambda \cdot Z\Gamma \Leftrightarrow x^2 = \rho \cdot 2R \Leftrightarrow x = \sqrt{2\rho R}$$

Επειδή :

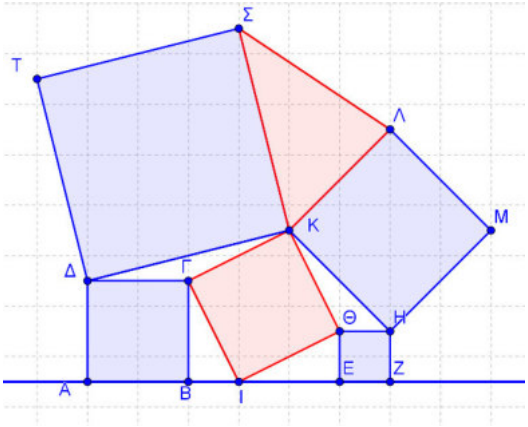
$$Z\Gamma = AM + x \Leftrightarrow 2R = 3\rho + x \Leftrightarrow 2R = 3\rho + \sqrt{2\rho R} \Leftrightarrow$$

$$3\rho + \sqrt{2R} \cdot \sqrt{\rho} - 2R = 0 \overset{k=\sqrt{\rho}}{\Leftrightarrow} 3k^2 + \sqrt{2R} \cdot k - 2R = 0$$

Από όπου έχουμε ότι :

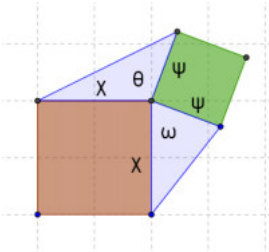
$$k = \frac{\sqrt{2R} \cdot (\sqrt{13} - 1)}{6} \overset{k=\sqrt{\rho}}{\Leftrightarrow} \rho = \frac{R}{18} \cdot (\sqrt{13} - 1)^2$$

Πρόβλημα 42ο

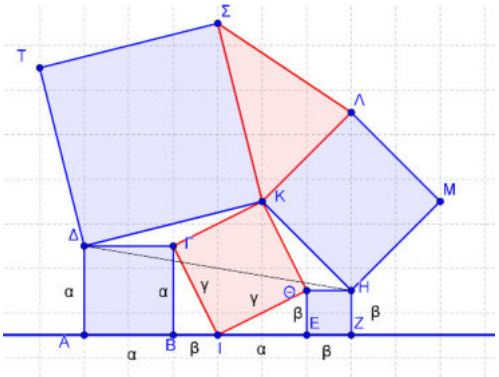


Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται πέντε τετράγωνα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΣΛΚ και το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΚΘΙ είναι ίσα.

Απόδειξη



Βασική πρόταση : Αν έχουμε δύο τετράγωνα (όπως στο σχήμα) με κοινή μία κορυφή τους τότε τα σχηματιζόμενα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, διότι : $E_1 = \frac{1}{2}\cdot\chi\cdot\psi\cdot\eta\mu\theta \overset{\eta\mu\theta=\eta\mu\omega}{=} \frac{1}{2}\cdot\chi\cdot\psi\cdot\eta\mu\omega = E_2$



Ισχύουν

Τα τρίγωνα ΓΒΙ και ΙΘΕ είναι ίσα (γιατί;)

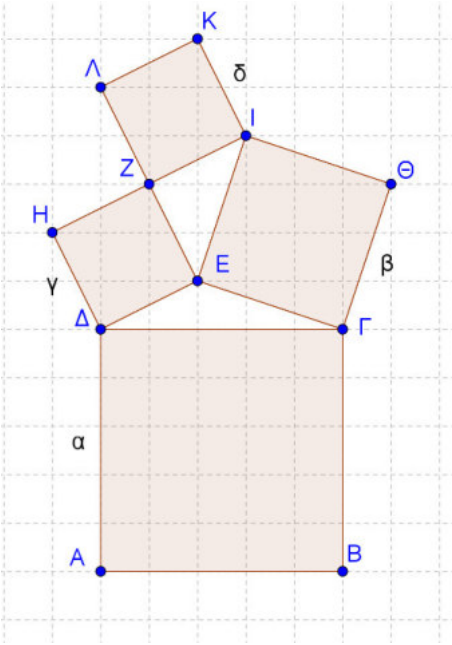
$$(\Sigma\Lambda K) = (\Delta KH) = (\Delta AZHK) - (\Delta AZH) \quad (1)$$

$$(\Delta AZH) = \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot(2\alpha+2\beta) = (\alpha+\beta)^2 \quad (2)$$

$$(\Delta AZHK) = (\Delta\Gamma K) + (\Gamma BI) + (K\Theta H) + (I\Theta E) + (\Delta AB\Gamma) + (\Theta HZE) + (K\Gamma I\Theta) =$$
$$= 4(B\Gamma I) + \alpha^2 + \beta^2 = 4\cdot\frac{\alpha\cdot\beta}{2} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta)^2 + \gamma^2 \quad (3)$$

Από (1),(2),(3) έχουμε τελικά ότι (ΣΚΛ)=(ΓΚΘΙ)

Πρόβλημα 43ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται τέσσερα τετράγωνα πλευρών α,β,γ και δ. Να αποδείξετε ότι :

$\alpha^2+\delta^2=2(\beta^2+\gamma^2)$

Απόδειξη

Από νόμο συνημιτόνων στα τρίγωνα ΖΙΕ και ΔΕΓ έχουμε ότι:

$\Delta E\Gamma: \alpha^2=\gamma^2+\beta^2-2\beta\gamma\cdot\text{συν}\theta$ (1)

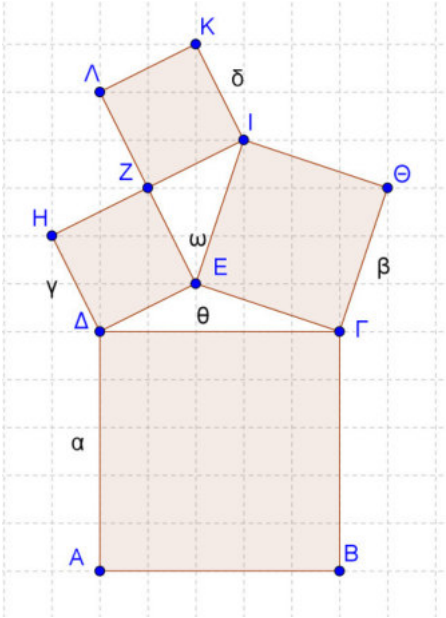
$ZIE: \delta^2=\gamma^2+\beta^2-2\beta\gamma\cdot\text{συν}\omega$ (2)

Επειδή οι γωνίες ω,θ είναι παραπληρωματικές ισχύει ότι: $\text{συν}\omega=-\text{συν}\theta$, οπότε οι (1), (2) γράφονται :

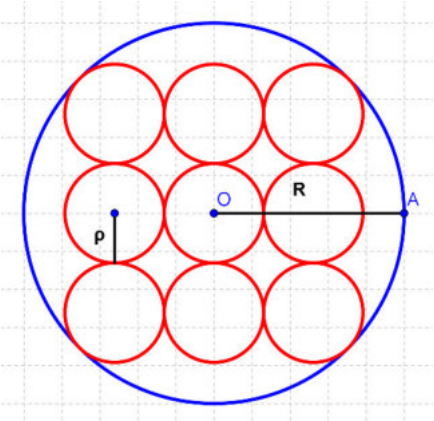
$\alpha^2=\gamma^2+\beta^2-2\beta\gamma\cdot\text{συν}\theta$ και $\delta^2=\gamma^2+\beta^2+2\beta\gamma\cdot\text{συν}\theta$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι :

$\alpha^2+\delta^2=2(\beta^2+\gamma^2)$

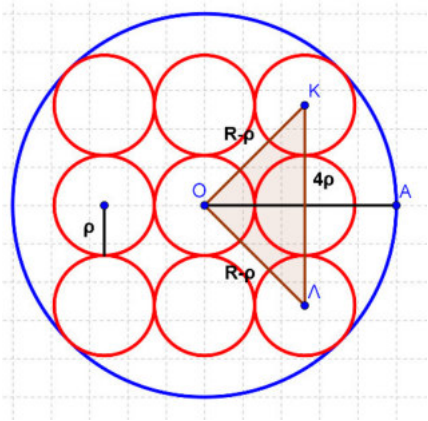


Πρόβλημα 44ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο (Ο,R) και έχουμε εγγράψει εννέα ίσους κύκλους (όπως στο σχήμα) να υπολογίσετε την ακτίνα ρ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

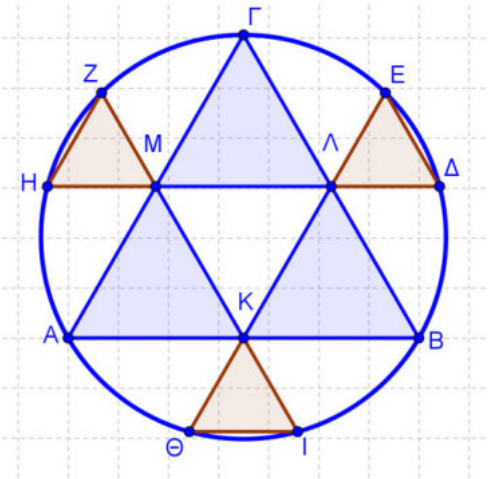
Υπολογισμοί



Από Π.Θ. στο ορθογώνιο (;) τρίγωνο ΟΚΛ έχουμε ότι :

$$OK^2 + O\Lambda^2 = K\Lambda^2 \Leftrightarrow 2(R-\rho)^2 = (4\rho)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = \frac{R\cdot(2\sqrt{2}-1)}{7}$$

Πρόβλημα 45ο



Σε κύκλο (Ο,R) κατασκευάζουμε δύο ειδών ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές ΑΚ=α και ΘΚ=μ (όπως στο σχήμα)

Να βρείτε τον λόγο των τμημάτων α, κ. Ποια η σχέση των τμημάτων αυτών με την ακτίνα R του κύκλου;

Υπολογισμοί

Γνωρίζουμε ότι η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $AB = R\sqrt{3}$. Άρα η πλευρά ΑΚ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΚΜ είναι ίση με : $AK = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ισχύει επίσης ότι :

$$AK \cdot KB = K\Theta \cdot KE \Leftrightarrow (\frac{R\sqrt{3}}{2})^2 = \mu \cdot (\frac{R\sqrt{3}}{2} + \mu) \Leftrightarrow \frac{3R^2}{4} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \mu + \mu^2 \Leftrightarrow$$

$$4\mu^2 + 2R\sqrt{3}\mu - 3R^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mu = \frac{R\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 1)}{4}$$

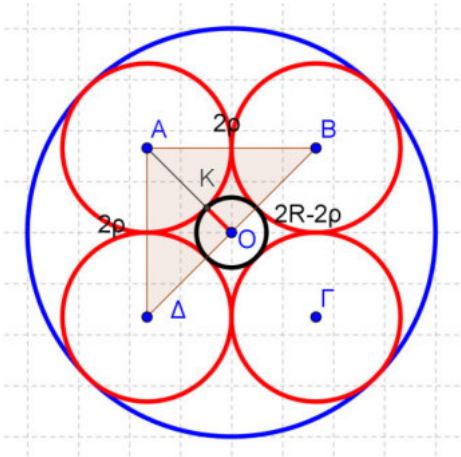
Οπότε $\frac{AK}{\Theta K} = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{R\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 1)}{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

Πρόβλημα 46ο

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται τέσσερεις κύκλοι εγγεγραμμένοι σε κύκλο (O,R) και μεταξύ τους ένας μικρότερος κύκλος ακτίνας r.
Να βρείτε την ακτίνα r ως συνάρτηση της ακτίνας R.

Sangaku από τον ναό Iasaniwa Jinjya με διαστάσεις 107X77 εκ.

Υπολογισμοί



Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε :

$$AB^2 + A\Delta^2 = \Delta B^2 \Leftrightarrow 2\cdot(2\rho)^2 = (2R-2\rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \rho = R(\sqrt{2}-1)$$

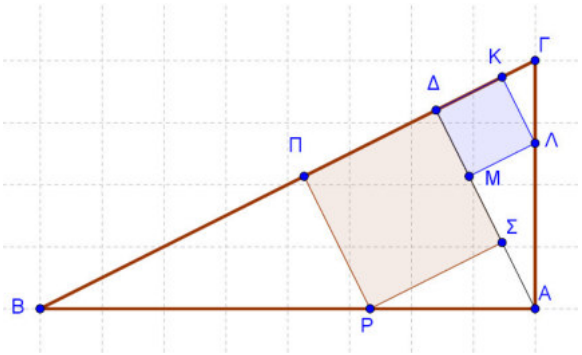
Η ΑΟ είναι διάμεσος του ΑΔΒ άρα : $AO = R\cdot(2-\sqrt{2})$

Οπότε θα είναι και

$$\rho + r = R\cdot(2-\sqrt{2}) \Leftrightarrow R\cdot(\sqrt{2}-1) + r = R\cdot(2-\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

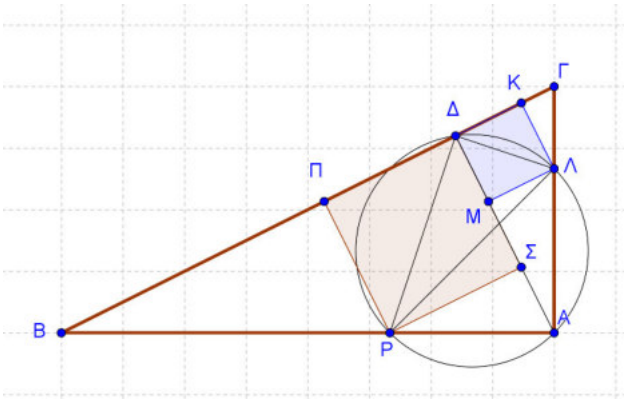
$$r = R(2-\sqrt{2}-\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow r = R(3-2\sqrt{2})$$

Πρόβλημα 47ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο έχουμε φέρει το ύψος ΑΔ. Εγγράφουμε τα τετράγωνα ΔΚΛΜ και ΔΠΡΣ όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι ΑΡ=ΑΛ.

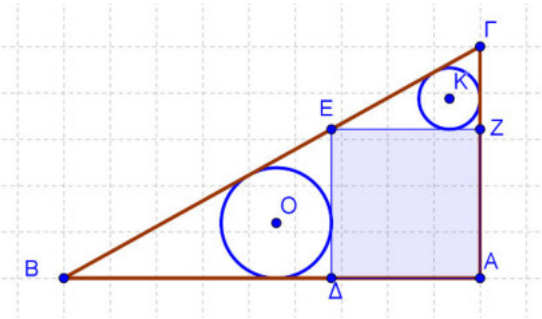
Απόδειξη



Το τετράπλευρο ΔΛΑΡ είναι εγγράψιμο διότι $\text{ΡΔΛ} = \text{ΒΑΓ} = 90^{\circ}$ (;)

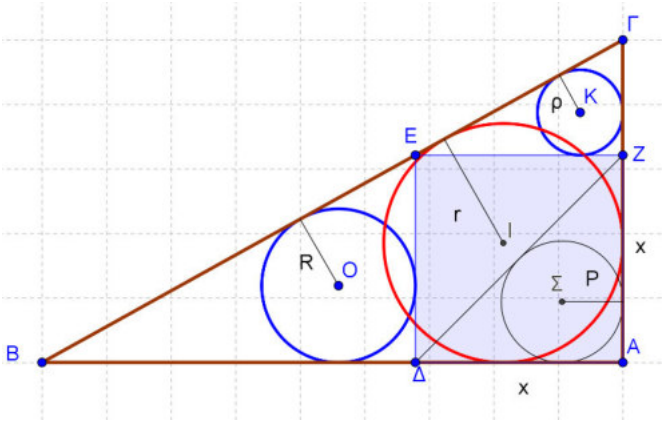
Οπότε θα είναι $\text{ΡΛΑ} = \text{ΡΔΑ} = 45^{\circ}$ και $\text{ΛΡΑ} = \text{ΑΔΛ} = 45^{\circ}$, οπότε το ΡΑΛ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα ΑΡ=ΑΛ.

Πρόβλημα 48ο



Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε εγγράψει το τετράγωνο ΑΔΕΖ και τους εγγεγραμμένους κύκλους (Κ,ρ) και (Ο,R) στα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου α ως συνάρτηση των ακτίνων ρ και R.

Υπολογισμοί



Στο ορθογώνιο ΓΕΖ ισχύει ότι : $\rho = \tau_1 - \text{ΕΓ}$,

στο ορθογώνιο ΒΕΔ ισχύει ότι : $R = \tau_2 - \text{ΒΕ}$

(τ_1,τ_2, οι ημιπερίμετροι των δύο τριγώνων.)

Άρα :

$$\rho + R = \tau_1 + \tau_2 - (\text{ΕΓ} + \text{ΓΒ}) \Leftrightarrow \rho + R = \tau - \alpha$$
$$\Leftrightarrow \rho + R = r$$

,όπου τ η ημιπερίμετρος του ΑΒΓ και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ.

Ισχύει επίσης ότι

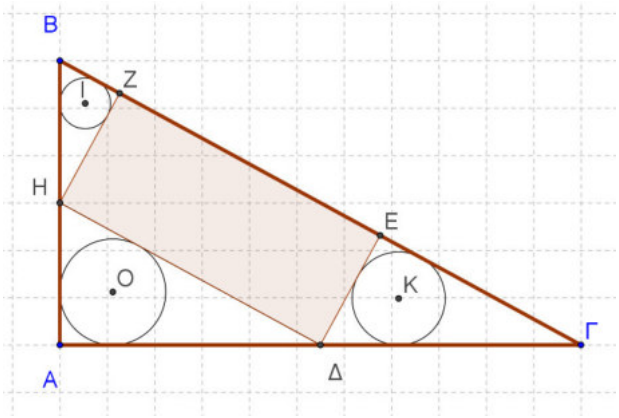
$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΕΔΒ}) + (\text{ΕΓΖ}) + 2(\text{ΔΖΑ}) \Leftrightarrow 1 = \frac{(\text{ΕΔΒ})}{(\text{ΑΒΓ})} + \frac{(\text{ΕΓΖ})}{(\text{ΑΒΓ})} + 2\frac{(\text{ΔΖΑ})}{(\text{ΑΒΓ})}$, όλα όμως τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς των, δηλαδή :

$$1 = (\frac{R}{r})^2 + (\frac{\rho}{r})^2 + 2(\frac{P}{r})^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 + \rho^2 + 2(\frac{x + x + x\sqrt{2}}{2} - x\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$(R+\rho)^2 - R^2 - \rho^2 = 2\frac{x^2 \cdot (2-\sqrt{2})^2}{4} \Leftrightarrow 4R\rho = x^2 \cdot (2-\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{\rho R}}{2-\sqrt{2}}$$

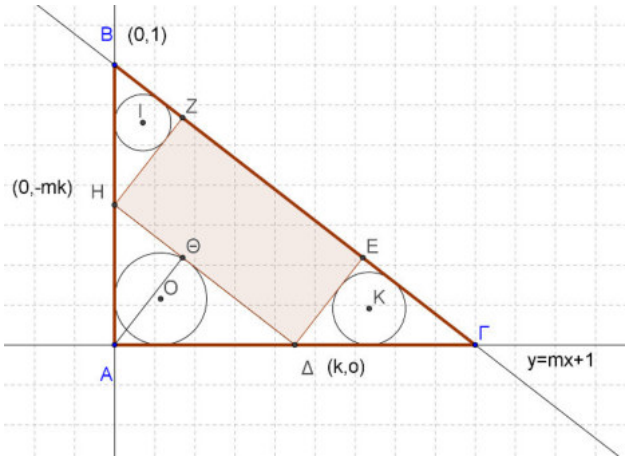
$$\Leftrightarrow x = (2+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{R\rho}$$

Πρόβλημα 49ο



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε εγγράψει, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ και τους τρεις εγγεγραμμένους κύκλους (Κ,ρ_1), (Ι,ρ_2) και (Ο,ρ_3), (όπως στο σχήμα). Να αποδείξετε ότι όταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει το μέγιστο εμβαδόν τότε ισχύει η σχέση : $\rho_1^2+\rho_2^2=\rho_3^2$

Απόδειξη



Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, και θέτουμε Α=(0,0), Β=(0,1), Δ(k,0) και την ευθεία ΒΓ να έχει εξίσωση $y=mx+1$.

Η ΗΔ επειδή είναι παράλληλη της ΒΓ και διέρχεται από το Δ θα έχει εξίσωση $y=mx-mk$, όποτε το σημείο Η είναι το Η=(0,-mk).

Το εμβαδόν του ΖΗΔΕ δίνεται από την σχέση $E=\Delta E\cdot H\Delta \Leftrightarrow E=d(\Delta,B\Gamma)\cdot d(\Delta,H)$

Οπότε :

$$E(k)=\sqrt{k^2+m^2k^2}\cdot\frac{|0-mk-1|}{\sqrt{1+m^2}}\Leftrightarrow E(k)=k\cdot(mk+1)\Leftrightarrow E(k)=mk^2+k$$

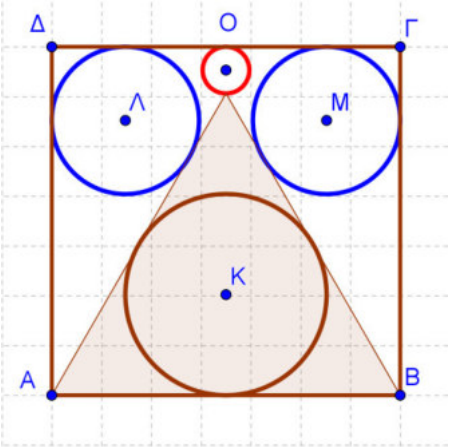
Με $E'(k)=2mk+1$, οπότε η συνάρτηση Ε(k) θα παρουσιάζει max στο $k=-\frac{1}{2m}$,δηλαδή όταν το Δ είναι το μέσο της ΑΓ , οπότε και το Η μέσο της ΑΒ.

Τότε έχουμε : $r_1^2+r_2^2=r_3^2\Leftrightarrow(\frac{r_1}{r_3})^2+(\frac{r_2}{r_3})^2=1\overset{*}{\Leftrightarrow}\frac{E_1}{E_3}+\frac{E_2}{E_3}=1\Leftrightarrow E_1+E_2=E_3$ (1)

* Τα τρίγωνα ΒΗΖ,ΗΑΔ και ΔΕΓ,ΑΗΔ είναι όμοια, άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς των, (άρα με το λόγο δύο οποιονδήποτε αντίστοιχων μεγεθών τους)

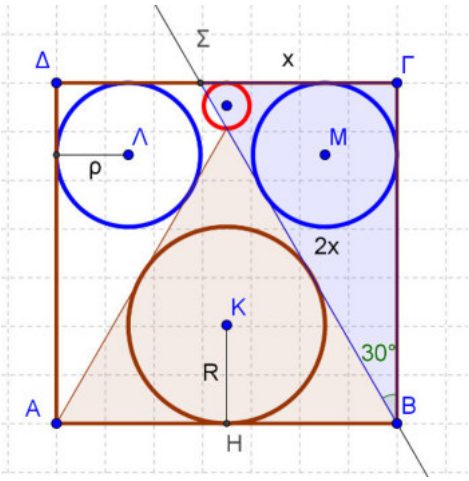
Αν φέρουμε το ύψος ΑΘ του ΑΗΔ τότε τα τρίγωνα ΑΗΘ και ΒΗΖ είναι ίσα , όπως και τα ΑΘΔ και ΔΕΓ, άρα και ισεμβαδικά , οπότε η (1) αληθεύει!

Πρόβλημα 50ο



Στο διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε κατασκευάσει εσωτερικά του ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ΑΒ. Επίσης κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο κύκο (Κ,R) του ισοπλεύρου τριγώνου και ακόμα δύο ίσους κύκλους με κέντρα Λ και Μ και ακτίνας ρ και έναν μικρότερο κέντρου Ο, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



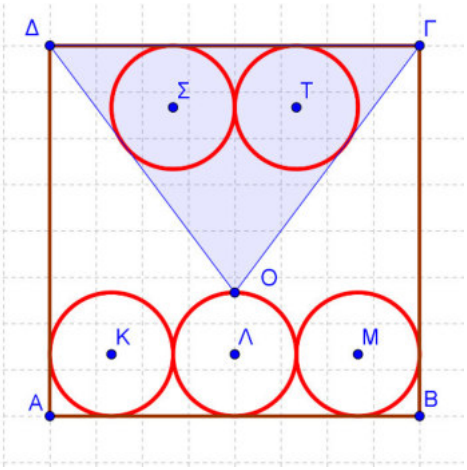
Ο κύκλος (Κ,R) είναι εγγεγραμμένος σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευρά α, άρα θα ισχύει ότι : $R = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ (1)

Προεκτείνουμε πλευρά ΣΓ του ισοπλεύρου τριγώνου και ονομάζουμε Σ το σημείο τομής της προέκτασης με την ΔΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΣΓΒ η γωνία Β είναι 30ο , άρα αν ονομάσουμε ΣΓ=χ τότε ΣΒ=2χ . Από Π.Θ έχουμε τελικά ότι $x = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Ο κύκλος (Μ,ρ) είναι ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΣΓΒ κύκλος άρα θα είναι :

$$\rho = \frac{\alpha + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}}{2} - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}} \quad (2)$$

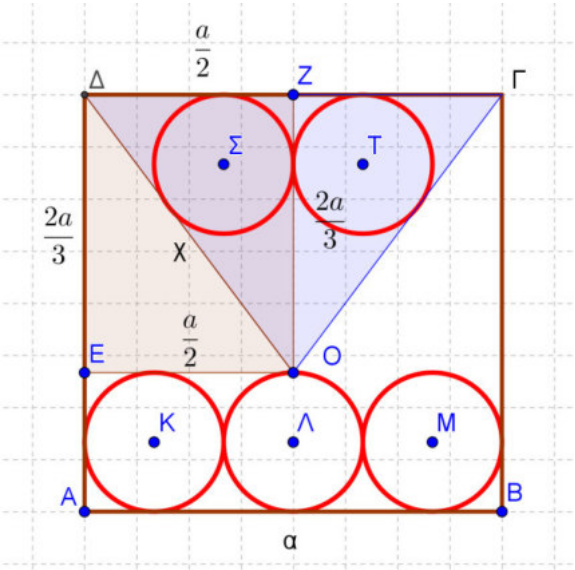
Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι : $\rho = R \cdot (\sqrt{3}-1)$

Πρόβλημα 51ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρεις ίσους κύκλους (Κ,ρ), (Λ,ρ), (Μ,ρ), και το ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΓ. Μέσα σε αυτό έχουμε εγγράψει τους κύκλους (Σ,r) και (Τ,r). Να αποδείξετε ότι ρ=r.

Απόδειξη

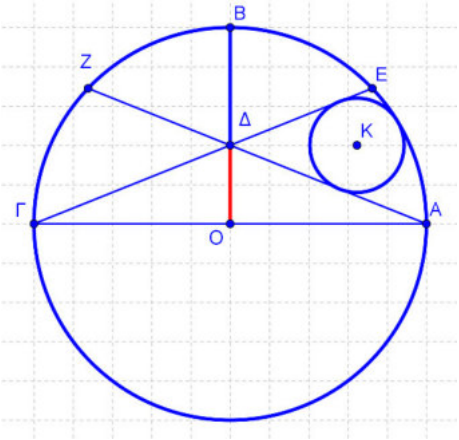


Επειδή οι τρεις κύκλοι στην βάση του τετραγώνου ΑΒ είναι ίσοι οι ακτίνα τους θα είναι $\rho = \frac{\alpha}{6}$.

Από Π.Θ. στο ΔΕΟ έχουμε τελικά ότι $x = \frac{5\alpha}{6}$.

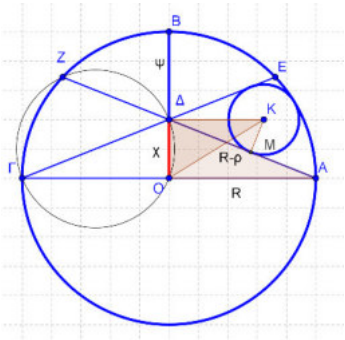
Ο κύκλος (Σ,r) είναι εγγεγραμμένος στο ορθογώνιο ΔΖΟ άρα $r = \tau - x = \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha}{3} + \frac{5\alpha}{6}}{2} - \frac{5\alpha}{6} = \ldots = \frac{\alpha}{6} = \rho$

Πρόβλημα 52ο



Στο διπλανό κύκλο έχουμε φέρει την ακτίνα ΟΒ κάθετη στην διάμετρο ΑΓ. Θεωρούμε Δ τυχαίο σημείο της ΟΒ και Ε το σημείο τομής της ΖΔ με τον κύκλο. Εγγράφουμε κύκλο (Κ,ρ), όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\Delta O}+\frac{1}{B\Delta}$

Απόδειξη



Ισχύουν οι ισότητες :

$$A\Delta\cdot AZ=AO\cdot A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta\cdot(A\Delta+Z\Delta)=2R^2 \Leftrightarrow A\Delta^2+A\Delta\cdot Z\Delta=2R^2 \quad (1)$$

$$\Delta A\cdot\Delta Z=\psi\cdot(x+R) \quad (2)$$

$$A\Delta^2=x^2+R^2 \quad (3)$$

Από (1),(2) και (3) έχουμε ότι : $x\psi+\psi R+x^2=R^2$ (4)

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα : ΔΚΜ και ΟΔΑ ισχύει : $\frac{\Delta M}{R}=\frac{\rho}{x}\Leftrightarrow \Delta M=\frac{\rho\cdot R}{x}$ (5)

Στο ΔΚΜ από Π.Θ. : $\Delta K^2=\Delta M^2+\rho^2\overset{(5)}{=}\frac{\rho^2\cdot R^2}{x^2}+\rho^2$ (6)

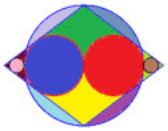
Στο ΔΚΟ από Π.Θ. : $\Delta K^2=(R-\rho)^2-x^2$ (7)

Από (6) και (7) έχουμε $\frac{\rho^2\cdot R^2}{x^2}+\rho^2=(R-\rho)^2-x^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow R=\frac{x^2}{x-\rho}$ (8)

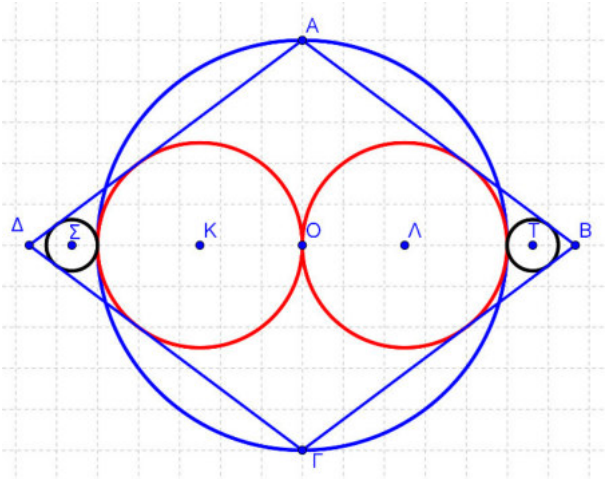
Από (4) και (8) απαλείφοντας το R έχουμε :

$$x\psi+\psi\cdot\frac{x^2}{x-\rho}+x^2=\frac{x^4}{(x-\rho)^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\psi x-\rho\psi-\rho x)(2x-\rho)=0 \Leftrightarrow$$

$$2x=\rho \text{ απορρίπτεται ή } \psi x-\rho\psi-\rho x=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}$$

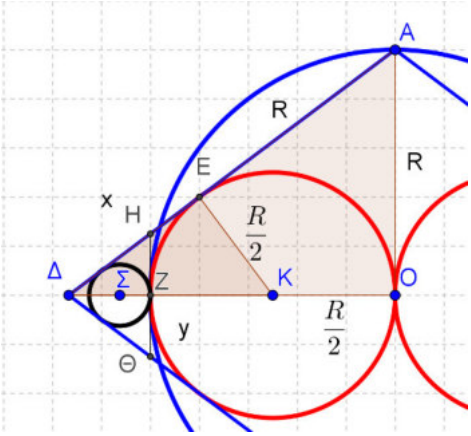


Πρόβλημα 53ο



Σε κύκλο (Ο,R) γράφουμε δύο ίσους κύκλους (Κ,R/2) και (Λ,R/2). Στη συνέχεια γράφουμε τον ρόμβο ΑΒΓΔ με τα σημεία Α,Γ στον κύκλο (Ο,R) και τις πλευρές του να είναι εφαπτόμενες των δύο ίσων κύκλων. Τέλος εγγράφουμε δύο ίσους κύκλους (Σ,ρ) και (Τ,ρ), όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η ακτίνα ρ συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



Τα τρίγωνα ΔΑΟ και ΑΕΚ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 1/2 (γιατί;), άρα αν ονομάσουμε ΔΕ=χ και ΔΚ=y θα έχουμε :

$2\Delta E = \Delta O \Leftrightarrow 2x = y + \frac{R}{2}$ (1) και $2\Delta K = \Delta A \Leftrightarrow 2y = x + R$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι : $x = \frac{2R}{3}$, $y = \frac{5R}{6}$.

Τα τρίγωνα ΔΗΖ και ΔΕΚ είναι όμοια οπότε :

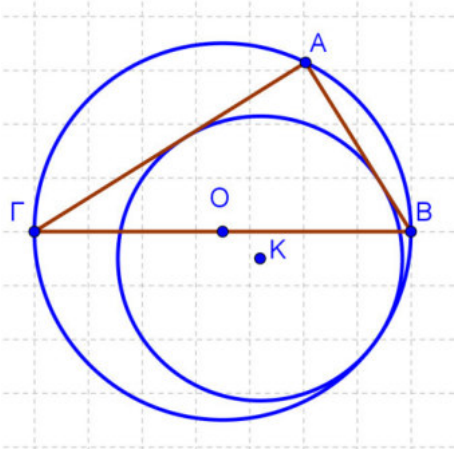
$$\frac{\Delta H}{y} = \frac{HZ}{\frac{R}{2}} = \frac{\Delta Z}{x} \Leftrightarrow \frac{\Delta H}{\frac{5R}{6}} = \frac{HZ}{\frac{R}{2}} = \frac{\Delta Z}{\frac{2R}{3}} \quad (3)$$

Αλλά $y = \Delta Z + \frac{R}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{5R}{6} - \frac{R}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{R}{3}$ (4) , οπότε από την (3) θα έχουμε και $HZ = \frac{R}{4}$ και $\Delta H = \frac{5R}{12}$.

Το τρίγωνο ΔΗΘ έχει ημιπερίμετρο $\tau = \frac{2R}{3}$ και εμβαδόν $E = \frac{R^2}{12}$, άρα

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \ldots = \frac{R}{8}$$

Πρόβλημα 54ο

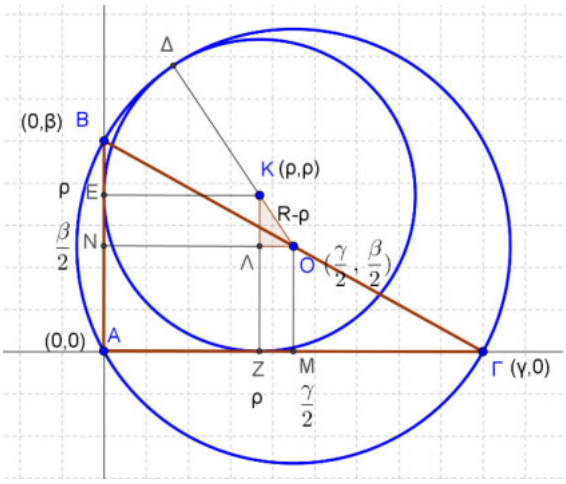


Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ). Κατασκευάζουμε κύκλο που εφάπτεται των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου και του κύκλου (Ο,ρ). Αν r η ακτίνα του, να αποδείξετε ότι : $r = \beta + \gamma - \alpha$

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με το οποίο ορίζουμε Α(0,0), Β(0,β) και Γ(γ,0).

Επίσης θα είναι $O = (\frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2})$ και $K = (\rho, \rho)$



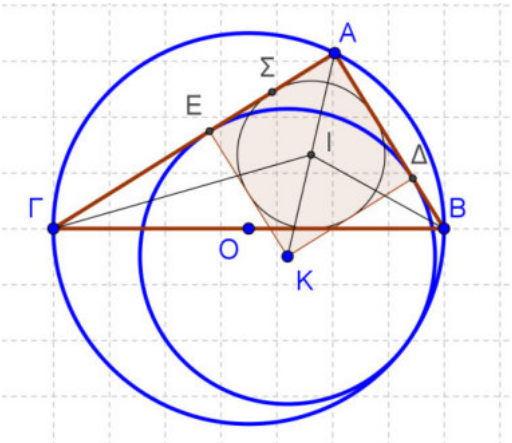
Από Π.Θ. στο ορθογώνιο ΚΟΛ έχουμε :

$$KO^2 = K\Lambda^2 + \Lambda O^2 \Leftrightarrow$$

$$(R-\rho)^2 = (\frac{\gamma}{2} - \rho)^2 + (\rho - \frac{\beta}{2})^2 \overset{R=\frac{\alpha}{2}}{\Leftrightarrow}$$

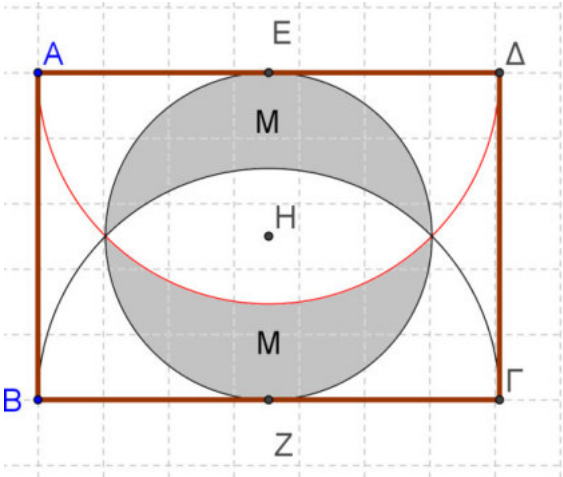
$$\frac{\alpha^2}{4} + \rho^2 - \alpha\rho = \frac{\gamma^2}{4} + \rho^2 - \gamma\rho + \frac{\beta^2}{4} + \rho^2 - \beta\rho \Leftrightarrow$$

$$\rho^2 = \beta\rho + \gamma\rho - \alpha\rho \Leftrightarrow \rho = \beta + \gamma - \alpha$$



Επειδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι $r = \tau - \alpha = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$ καταλαβαίνουμε ότι ισχύει $\rho = 2r$, και ότι το έγκεντρο του ΑΒΓ είναι το μέσο της ΚΑ (γιατί;)

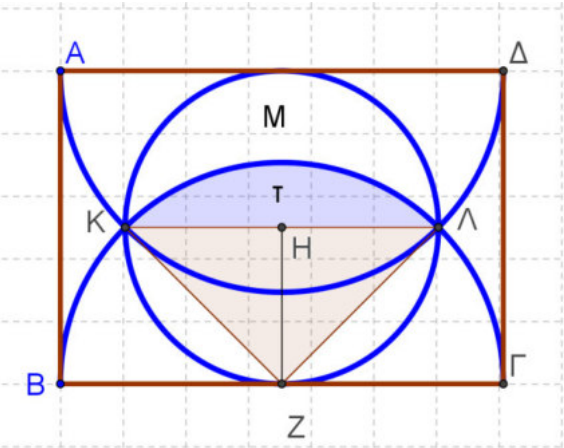
Πρόβλημα 55ο



Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων α και $\alpha\sqrt{2}$. Γράφουμε τον κύκλο (Η,α/2) όπου Η το κέντρο του παραλληλογράμμου και τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΔ και ΒΓ, όπως στο σχήμα. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζονται δύο μηνίσκοι (Μ), να υπολογίσετε το εμβαδόν τους ως συνάρτηση του μήκους α.

Sangaku από την επαρχία της Fukusima χρονολογείται το 1883

Υπολογισμοί



Ο κάθε ένας από τους Μηνίσκους μπορεί να υπολογισθεί αν από ένα ημικύκλιο διαμέτρου α αφαιρέσουμε ένα κυκλικό τμήμα τ, άρα ισχύει :

$$(M)=\frac{\pi(\frac{\alpha}{2})^2}{2}-(\tau)=\frac{\pi\alpha^2}{8}-(\tau)\ \ (1)$$

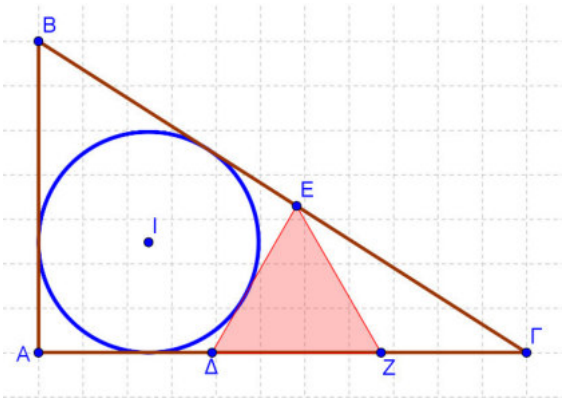
Το κυκλικό τμήμα υπολογίζεται αν από ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (;) αφαιρέσουμε το τρίγωνο ΚΖΛ, άρα ισχύει :

$$(\tau)=\frac{\pi(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2})^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\ldots=\frac{\alpha^2}{8}\cdot(\pi-2)\ \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι : $(M)=\frac{\alpha^2}{4}$.

Άρα ο μηνίσκος αυτός τετραγωνίζεται. Το πρόβλημα αυτό μοιάζει με τα αντίστοιχα προβλήματα Μηνίσκων του Ιπποκράτους του Χίου. Ο συγκεκριμένος μηνίσκος δεν συμπεριλαμβάνεται στη συλλογή των μηνίσκων του Ιπποκράτη.

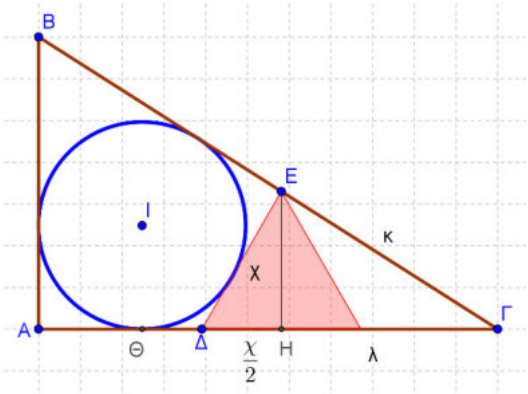
Πρόβλημα 56ο



Στο παραπάνω ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε γράψει τον εγγεγραμμένο κύκλο του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την πλευρά ΔΕ του ισόπλευρου τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του ΑΒΓ.

Sangaku στον ναό Yoshifuji Mishima Νομαρχία Ehime

Υπολογισμοί



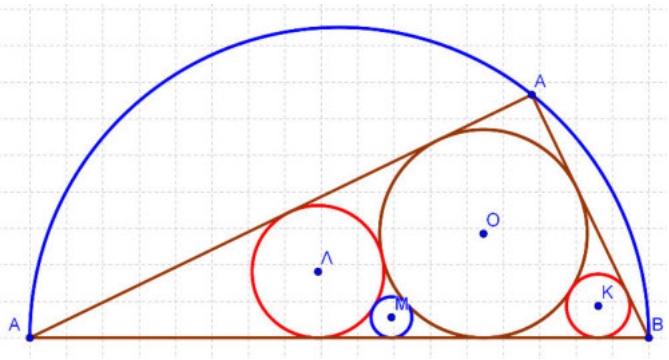
Φέρνουμε το ύψος ΕΗ, οπότε $\Delta H = \frac{x}{2}$. Ονομάζουμε ΕΓ=κ και ΗΓ=λ. Από τα όμοια τρίγωνα ΓΕΗ και ΑΒΓ ισχύει ότι : $\frac{\Gamma E}{B\Gamma} = \frac{\Gamma H}{A\Gamma} = \frac{EH}{AB} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\alpha} = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\gamma}$, από όπου καταλήγουμε στις ισότητες : $\kappa = \frac{\alpha x\sqrt{3}}{2\gamma}$ και $\lambda = \frac{\beta x\sqrt{3}}{2\gamma}$.

Η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ είναι $\kappa + \lambda + \frac{x}{2} + x$ αλλά και ίση με $2 \cdot \Gamma\Theta = \alpha + \beta - \alpha$ (γιατί;).

Άρα $\frac{\alpha x\sqrt{3}}{2\gamma} + \frac{\beta x\sqrt{3}}{2\gamma} + \frac{x}{2} + x = \alpha + \beta - \alpha \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = \frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta - \gamma)}{3\gamma + (\alpha + \beta)\sqrt{3}}$

Σε τρίγωνο 3-4-5 η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου θα είναι ... $2 \cdot (\sqrt{3} - 1)$

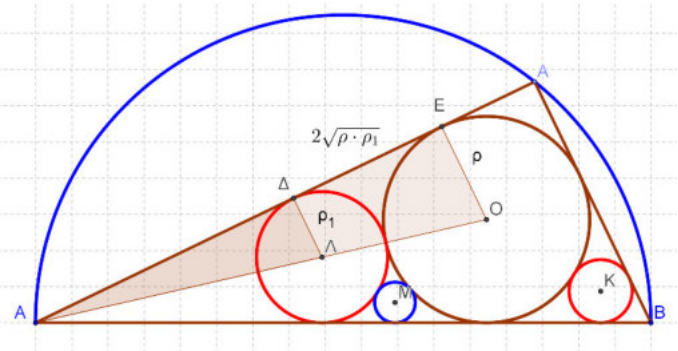
Πρόβλημα 57ο



Στο παραπάνω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κατασκευάσει τον εγγεγραμμένο κύκλο του και άλλους τρεις κύκλους όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ακτίνα του μικρότερου κύκλου συναρτήσει των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου.

Sangaku στον ναό Okiku Inari νομαρχία Gunma

Υπολογισμοί



Από προηγούμενο sangaku γνωρίζουμε ότι $\Delta E = 2\sqrt{\rho\cdot\rho_1}$ και $\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}$, οπότε αν υπολογίσουμε την ακτίνα ΛΔ=ρ_1 μπορούμε να υπολογίσουμε και την ακτίνα του μικρότερου κύκλου.

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΛΔ και ΑΟΕ έχουμε :

$$\frac{\Lambda\Delta}{OE} = \frac{A\Delta}{AE} \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\beta - 2\sqrt{\rho\cdot\rho_1} - \rho}{\beta - \rho} \Leftrightarrow \beta\rho_1 - \rho\rho_1 = \beta\rho - 2\rho\sqrt{\rho\rho_1} - \rho^2 \Leftrightarrow$$

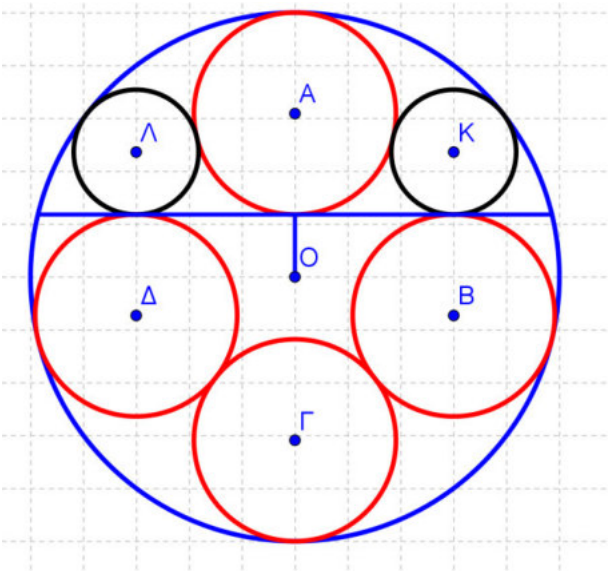
$$(\rho - \beta)\rho_1 - 2\rho\sqrt{\rho}\cdot\sqrt{\rho_1} + \rho(\beta - \rho) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{\rho_1} = \frac{\sqrt{\rho}}{\rho - \beta}\cdot(1 - \sqrt{\rho^2 + (\beta - \rho)^2})$$

Οπότε $\sqrt{\rho_2} = \frac{\sqrt{\rho\cdot\rho_1}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho_1}}$, όπου $\rho = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

Ας εφαρμόσουμε τους τύπους για τρίγωνο 3-4-5.

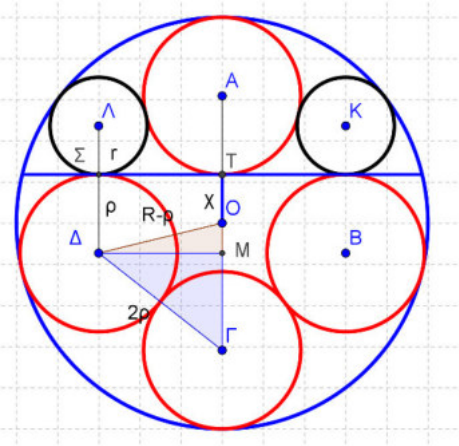
Τότε θα είναι $\rho = 1$, $\sqrt{\rho_1} = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}$ και $\rho_2 = \frac{13}{2} - 2\sqrt{10}$

Πρόβλημα 58ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται κύκλος (O,R) άλλοι έξι κύκλοι οι τέσσερεις με ακτίνα ρ και οι δύο μικρότεροι με ακτίνα r. Να υπολογίσετε τις ακτίνες ρ και r συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



Ονομάζουμε ΤΟ=χ τότε θα είναι :

$x = R - 2\rho$ (1) , $OM = \rho - x = \rho - R + \rho = 3\rho - R$ (2)

και $M\Gamma = R - OM - \rho = R - 3\rho + R - \rho = 2R - 4\rho$ (3)

Από Π.Θ. στο ΔΟΜ :

$$\Delta M^2 = \Delta O^2 - OM^2 = (R-\rho)^2 - (3\rho - R)^2 = \ldots = 4\rho R - 8\rho^2$$

Από Π.Θ. στο ΔΜΓ :

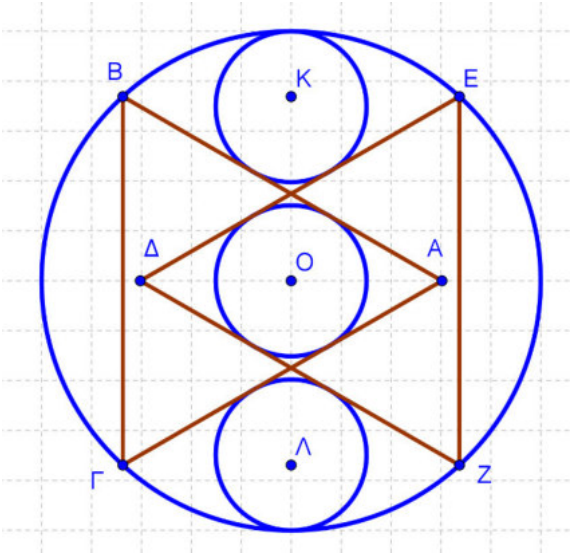
$$\Delta M^2 = \Delta\Gamma^2 - M\Gamma^2 = 4\rho^2 - (2R - 4\rho)^2 = \ldots = 16\rho R - 4R^2 - 12\rho^2$$

Άρα $4\rho R - 8\rho^2 = 16\rho R - 4R^2 - 12\rho^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = \dfrac{R(3-\sqrt{5})}{2}$

Ισχύει επίσης ότι $\Sigma T = \Delta M \Leftrightarrow \Sigma T^2 = \Delta M^2 \Leftrightarrow 2rR = 4\rho R - 8\rho^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{\rho(R-\rho)}{R}$

Αντικαθιστώντας το ρ έχουμε τελικά ότι : $r = R(\sqrt{5} - 2)$

Πρόβλημα 59ο




獻納算題二問 謹識

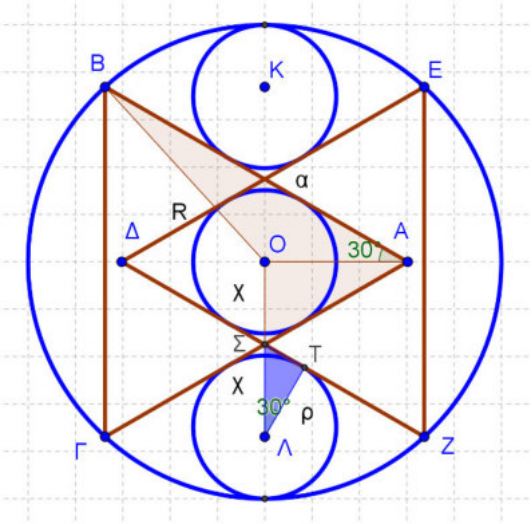
今有一大圓。其內。充以等三角二個橫相交錯者。又有等小圓三個。其一個。充交問。其二個。充交外。而三圓竪累列。只云。大圓徑一十寸。問小圓徑 三角面 各幾何。

答曰 小圓徑三寸零二厘一毛 六三二九有奇 三角面七寸四分四厘五毛 九一七六五有奇

術曰。列三個。開平方。見商。名天 爲實。列天。加四個。爲法。實如法而一。得數。乘大圓徑。得小圓徑。又術曰。列大圓徑三段。減小圓徑五段。余折半之。得三角面。合前問。

Στο παραπάνω σχήμα έχουμε τον κύκλο (O,R) και δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Τρείς ίσοι κύκλοι εφάπτονται ο ένας των πλευρών των δύο τριγώνων και οι άλλοι δύο του κύκλου και των δύο πλευρών των τριγώνων, όπως στο σχήμα. Αν τα κέντρα των τριών κύκλων βρίσκονται στην ίδια ευθεία που είναι και διάμετρος του (O,R), να υπολογίσετε τις ακτίνες r των τριών ίσων κύκλων και την πλευρά α των ισοπλεύρων τριγώνων ως συνάρτηση της ακτίνας R του μεγάλου κύκλου.

Υπολογισμοί



Αν ονομάσουμε ΟΣ=χ ισχύει ότι 2R=4ΟΣ+2ρ (;)

Άρα R=2ΟΣ+ρ (1) . Στο ορθογώνιο ΣΤΛ η γωνία Λ είναι 30ο (;) οπότε $\sigma\upsilon\nu 30^{o} = \frac{\rho}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2\rho}{\sqrt{3}}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι : $\rho = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$ (3)

Στο ορθογώνιο ΟΑΤ έχουμε ότι :

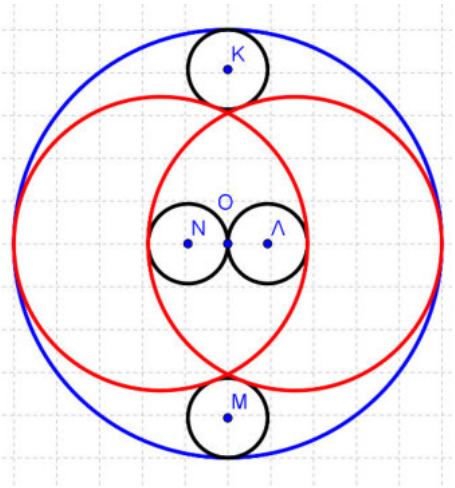
$$OA = \varepsilon\varphi 60^{o} \cdot x \Leftrightarrow OA = \sqrt{3} \cdot \frac{2\rho}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow OA = 2\rho$$

Στο ΟΑΒ από νόμο των συνημίτονων έχουμε ότι :

$$BO^2 = AB^2 + OA^2 - 2 \cdot AB \cdot AO \cdot \sigma\upsilon\nu 30^{o} \Leftrightarrow R^2 = \alpha^2 + 4\rho^2 - 2\alpha\rho\sqrt{3} \Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{3} \cdot \rho + \sqrt{R^2 - \rho^2} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow \alpha = \frac{5+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \cdot R$$

Πρόβλημα 60ο




今有一大圓。以等中圓二個。横相交錯。而充其圓内。
又有等小圓四個。其二個。並列交間。其二個。充交
外上下之餘地。只云。大圓徑一十寸。問小中圓徑
各幾何。

答曰 小圓徑一寸八分六厘一毛
四零六ささ
中圓徑六寸八分六厘一毛
四零六ささ

術曰。列三十三個。開平方。
見商。名天 内減五個。余以
四約之。得數。乘大圓徑。得
小圓徑。又術曰。列天。内減三個余以四約之。得
數乘大圓徑。得中圓徑。合前問。

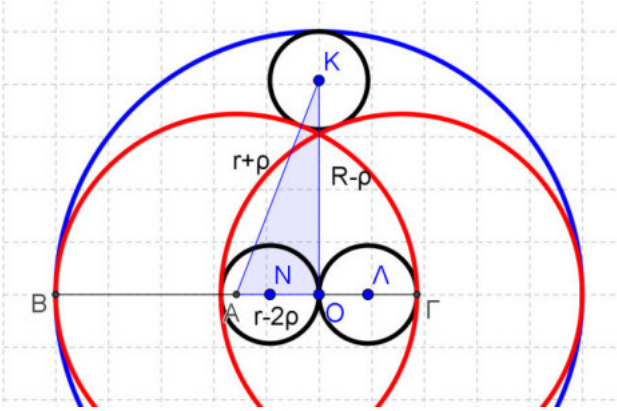
関流越之中州富山高木久蔵允胤門人
七尾
志摩吉左衛門則正

文政六年歳次癸未穐八月

正則
人關印門

Στο παραπάνω σχήμα έχουμε γράψει στον κύκλο (O,R) δύο κύκλους ακτίνας r και τέσσερεις μικρότερους ακτίνας ρ, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες ρ και r συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOK είναι : $AK = r + \rho$, $OK = R - \rho$ και $AO = r - 2\rho$. Οπότε από Π.Θ. ισχύει :

$$(r+\rho)^2 = (R-\rho)^2 + (r-2\rho)^2 \Leftrightarrow \ldots$$
$$\Leftrightarrow 6r\rho = R^2 - 2\rho R + 4\rho^2 \quad (1)$$

Επίσης από το σχήμα έχουμε ότι :

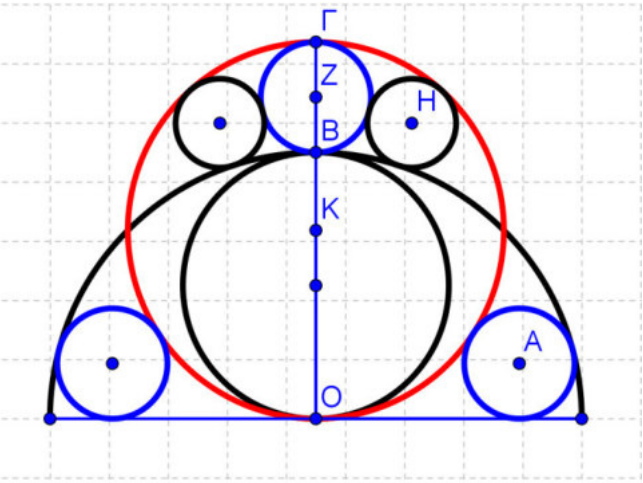
$$BO = B\Gamma - O\Gamma \Leftrightarrow R = 2r - 2\rho \Leftrightarrow 2r = R + 2\rho \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε :

$$3\rho \cdot (R + 2\rho) = R^2 - 2\rho R + 4\rho^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2\rho^2 + 5R\rho - R^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = R \cdot \frac{\sqrt{33} - 5}{4}$$

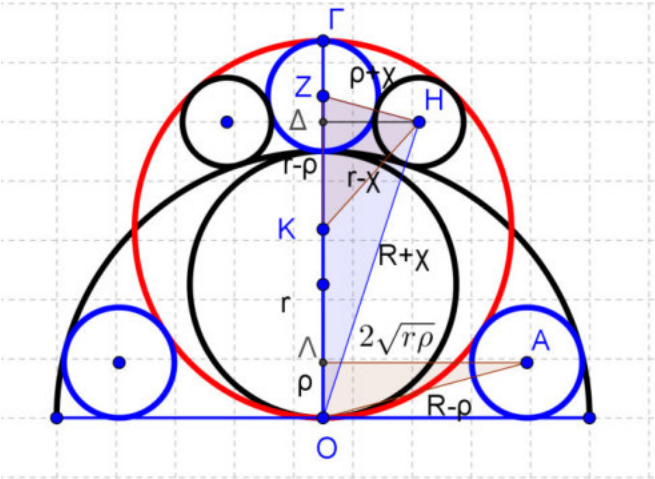
Οπότε από την (2) καταλήγουμε ότι : $r = R \cdot \frac{\sqrt{33} - 3}{4}$

Πρόβλημα 61ο



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε ημικύκλιο διαμέτρου 2R, μέσα σε αυτόν έναν κύκλο ακτίνας R/2 και στη συνέχεια τον κύκλο (K,r), τρεις κύκλους ακτίνας ρ και άλλους δύο ακτίνας χ, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες r,ρ και χ συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



Ισχύει ότι : $2r = R + 2\rho$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο είναι ΛΟ=ρ, ΟΑ=R-ρ και $\Lambda A = 2\sqrt{r\rho}$ (γιατί;), οπότε από Π.Θ. καταλήγουμε στην ισότητα : $R^2 - 2\rho R = 4r\rho$ (2)

Από (1) και (2) παίρνουμε ότι :

$$\rho = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{2} \quad \text{και} \quad r = \frac{R\sqrt{2}}{2} .$$

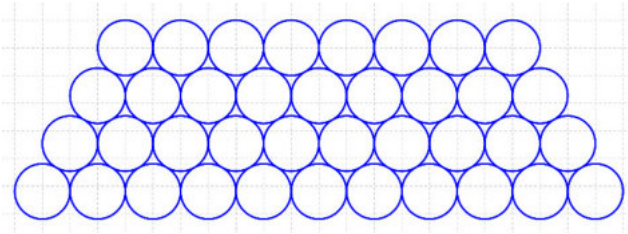
Στο τρίγωνο ΚΗΟ έχουμε ΚΗ=r-x, ΟΗ=R+x και ΚΟ=r. Εφαρμόζουμε θεώρημα αμβλείας γωνίας και έχουμε : $OH^2 = KO^2 + KH^2 + 2\cdot KO\cdot \Delta K \Leftrightarrow (R+x)^2 = r^2 + (r-x)^2 + 2r\cdot K\Delta$ (3)

Στο τρίγωνο ΖΚΗ είναι : ΚΗ=r-x, ΖΗ=ρ+x και ΖΚ=r-ρ. Εφαρμόζουμε θεώρημα οξείας γωνίας και έχουμε :

$$ZH^2 = KH^2 + KZ^2 - 2\cdot KZ\cdot K\Delta \Leftrightarrow (\rho+x)^2 = (r-x)^2 + (r-\rho)^2 - 2\cdot(r-\rho)\cdot K\Delta \quad (4)$$

Από (3) και (4) απαλείφοντας το ΚΔ και αντικαθιστώντας τα ρ,r μετά από πράξεις καταλήγουμε στην ισότητα $x = \frac{R}{6}$.

Πρόβλημα 62ο



Έχουμε N μπάλες και τις τοποθετούμε όπως στο σχήμα. Μπορούμε να κάνουμε την τοποθέτηση αυτή με δύο τρόπους. Στον πρώτο έχουμε πάνω 19 μπάλες και κάτω μ μπάλες. Στον δεύτερο τρόπο στο πάνω μέρος έχουμε 6 μπάλες και στο κάτω ν. Να βρείτε τους αριθμούς N,μ και ν.

Υπολογισμοί

Πρέπει να είναι γνωστός ο τύπος του αθροίσματος ν όρων αριθμητικής προόδου :

$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2} \cdot \nu$, για παράδειγμα ισχύει ότι : $1+2+3+...+\nu = \frac{1+\nu}{2} \cdot \nu$.

Παρατηρείστε ότι ο τρόπος τοποθέτησης των σφαιρών δημιουργεί σειρές που το πλήθος των σφαιρών ανά σειρά φτιάχνει διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά 1.

Οπότε την πρώτη φορά έχουμε : $19+20+21+...+\mu = N \Leftrightarrow \frac{19+\mu}{2} \cdot (\mu - 18) = N$ (1)

Την δεύτερη φορά έχουμε : $6+7+8+...+\nu = N \Leftrightarrow \frac{6+\nu}{2} \cdot (\nu - 5) = N$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι :
$(\mu+19)(\mu-18) = (\nu+6)(\nu-5) \Leftrightarrow ...(\mu-\nu)(\mu+\nu+1) = 312$

Άρα οι φυσικοί μ-ν και μ+ν+1 πρέπει να είναι διαιρέτες του 312.

Οπότε καταλήγουμε στα πιθανά ζεύγη :

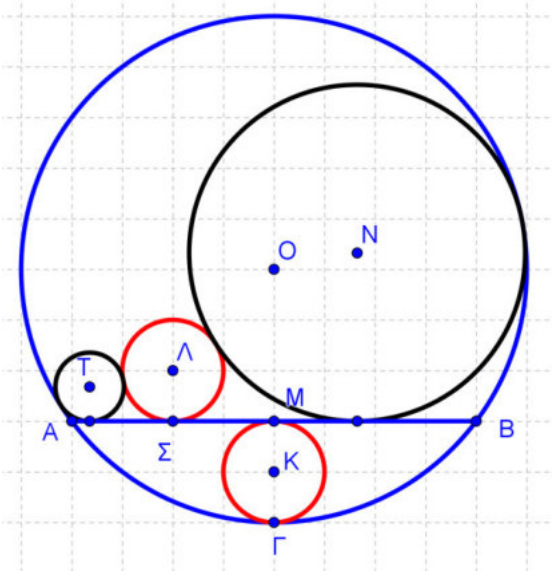
$$\begin{matrix} \mu-\nu=1 \\ \mu+\nu+1=312 \end{matrix} , \begin{matrix} \mu-\nu=2 \\ \mu+\nu+1=156 \end{matrix} , \begin{matrix} \mu-\nu=3 \\ \mu+\nu+1=104 \end{matrix} , \begin{matrix} \mu-\nu=4 \\ \mu+\nu+1=78 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mu-\nu=6 \\ \mu+\nu+1=52 \end{matrix} , \begin{matrix} \mu-\nu=8 \\ \mu+\nu+1=39 \end{matrix} , \begin{matrix} \mu-\nu=12 \\ \mu+\nu+1=26 \end{matrix} , \begin{matrix} \mu-\nu=13 \\ \mu+\nu+1=24 \end{matrix}$$

Επειδή οι μ,ν είναι φυσικοί και πρέπει μ>19 καθώς και ν>6 καταλήγουμε στα εξής πιθανά ζεύγη αριθμών :

$(\mu,\nu,N) = (156,155,12075)$ ή $(\mu,\nu,N) = (53,50,1260)$ ή $(\mu,\nu,N) = (23,15,105)$

Πρόβλημα 63ο

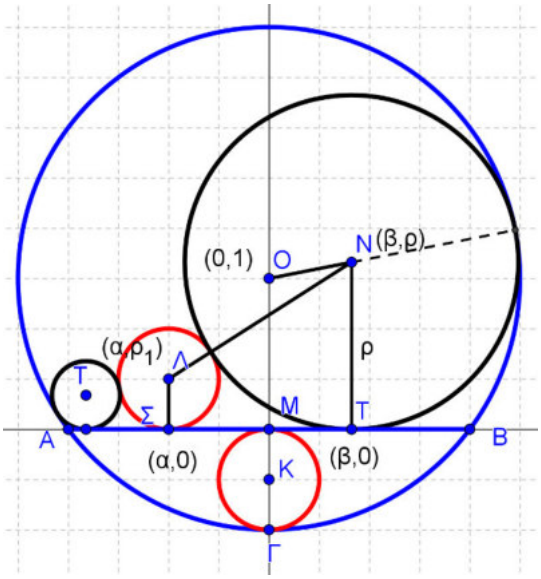


Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται κύκλο (Ο,R) και τυχαία χορδή του ΑΒ. Γράφουμε κύκλο (Κ,ρ_1) που εφάπτεται του (Ο,R) και της ΑΒ στο μέσο της Μ.

Σε τυχαίο σημείο Σ (εκτός του Μ) γράφουμε κύκλο (Λ,ρ_1) , όπως στο σχήμα . Στη συνέχεια γράφουμε τους κύκλους (Ν,ρ_2) και (Τ,ρ_3) που εφάπτονται της ΑΒ του (Λ,ρ_1) και του (Ο,R).

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα :
$R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$

Απόδειξη



Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Μ οριζόντιο άξονα την ΑΒ και θέτουμε Ο(0,1). Οπότε θα είναι Τ(β,0), Σ(α,0), Ν(β,ρ) καθώς και Λ(α,ρ_1).

Ισχύουν οι ισότητες :

$R = 1 + 2\rho_1$ (1)

$$ON = R - \rho \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \beta^2 + 1 = R^2 - 2\rho(R-1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\beta^2 + 1 = R^2 - 4\rho\rho_1 \quad (2)$$

$$AB = 2\sqrt{\rho\rho_1} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 4\rho\rho_1 \quad (3)$$

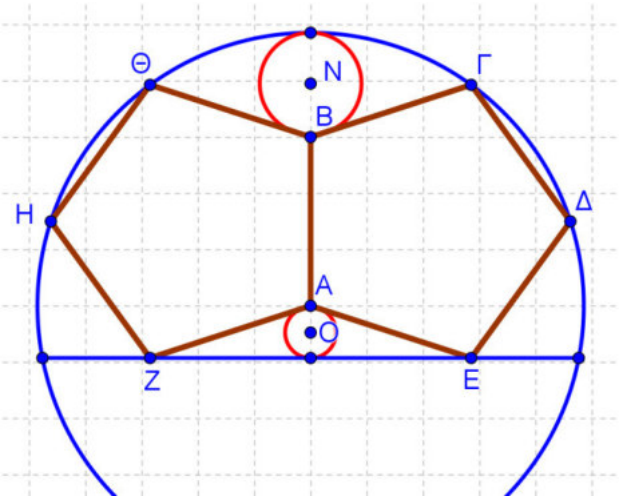
Από (2) και (3) καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$(\alpha-\beta)^2 + \beta^2 + 1 = R^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{2R^2 - 2 - \alpha^2}}{2} \overset{\kappa=\sqrt{2R^2-2-\alpha^2}}{\Leftrightarrow} \beta = \frac{\alpha \pm \sqrt{\kappa}}{2}$$

Από (3) έχουμε : $\rho = \dfrac{(\alpha - \frac{\alpha \pm \sqrt{\kappa}}{2})^2}{4\rho_1} = \dfrac{(\alpha \pm \sqrt{\kappa})^2}{16\rho_1}$, οι δύο τιμές του ρ είναι οι ακτίνες ρ_2 και ρ_3 . Οπότε $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \rho_1 + \dfrac{(\alpha+\sqrt{\kappa})^2}{16\rho_1} + \dfrac{(\alpha-\sqrt{\kappa})^2}{16\rho_1} = \rho_1 + \dfrac{\alpha^2+\kappa}{8\rho_1} =$

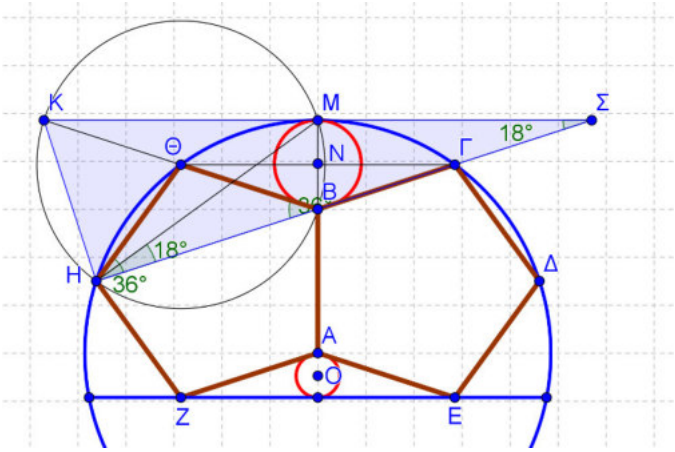
$$\rho_1 + \frac{\alpha^2 + 2R^2 - 2 - \alpha^2}{8\rho_1} = \rho_1 + \frac{R^2-1}{4\rho_1} = \rho_1 + \frac{(R-1)(R+1)}{4\rho_1} \overset{(1)}{=} \rho_1 + \frac{R+1}{2} \overset{(1)}{=} R$$

Πρόβλημα 64ο



Δύο κανονικά πεντάγωνα είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O,R), όπως στο σχήμα. Δύο άλλοι κύκλοι εγγράφονται ο ένας μεταξύ δύο πλευρών των πενταγώνων και του κύκλου (O,R) και ο άλλος μεταξύ δύο πλευρών των πενταγώνων και του τμήματος ΖΕ. Να αποδείξετε ότι μεταξύ των ακτίνων r,ρ των κύκλων (N,ρ) και (O,r) ισχύει η σχέση : ρ=2r.

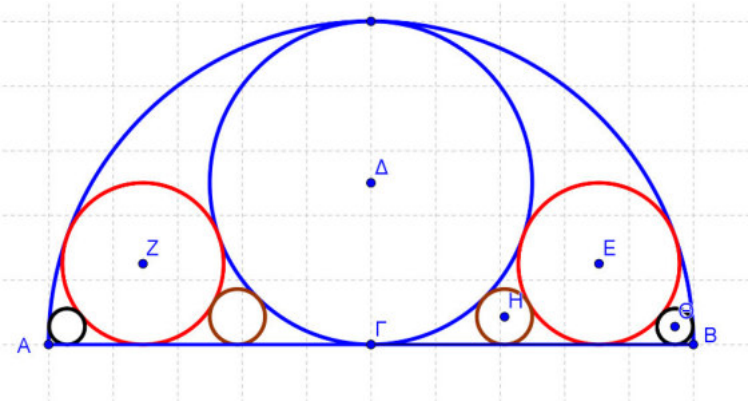
Απόδειξη



Φέρνουμε την εφαπτομένη στον κύκλο, όπως στο σχήμα. Τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΖΑΕ είναι όμοια (είναι ισοσκελή με την γωνία της κορυφής 144ο). Θα αποδείξουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι 2, οπότε θα είναι και ρ=2r.

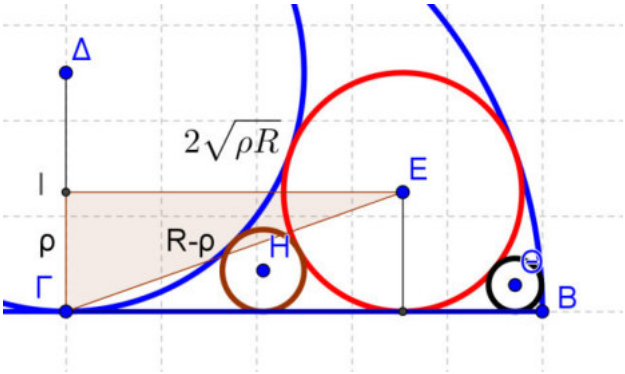
Υπολογίζοντας γωνίες (δες στο σχήμα) αποδεικνύουμε ότι ΗΜ=ΜΣ και άρα και ίση με ΜΚ, οπότε το τρίγωνο ΚΗΣ είναι ορθογώνιο. Άρα το ΚΜΗΒ εγγράψιμο με διάμετρο ΚΒ. Επειδή ΘΗ=ΘΒ θα είναι και ΘΒ=ΘΚ, άρα το Θ μέσο του ΚΒ. Οπότε το ΚΒΣ έχει τις ίσες του πλευρές διπλάσιες από τις αντίστοιχες του ΖΑΕ, άρα ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΚΒΣ και ΖΑΕ είναι 2 και ρ=2r.

Πρόβλημα 65ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ημικύκλιο ακτίνας R και μέσα σε αυτό έχουμε εγγράψει επτά κύκλους, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων συναρτήσει του R.

Υπολογισμοί



Προφανώς ο κύκλος (Δ,ΔΓ) έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$

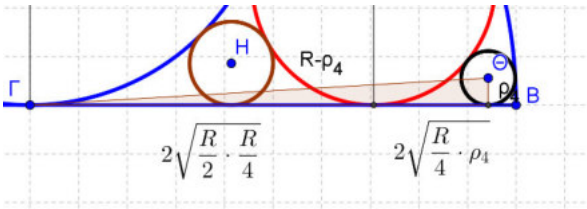
Στο τρίγωνο ΙΓΕ είναι ΙΓ=ρ, ΓΕ=R-ρ και

$IE = 2\sqrt{\rho\frac{R}{2}} = \sqrt{2\rho R}$ (γιατί;)

Από Π.Θ. έχουμε :

$(R-\rho)^2 = \rho^2 + (\sqrt{2\rho R})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = \frac{R}{4}$ άρα οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία Z και E έχουν ακτίνες $\frac{R}{4}$.

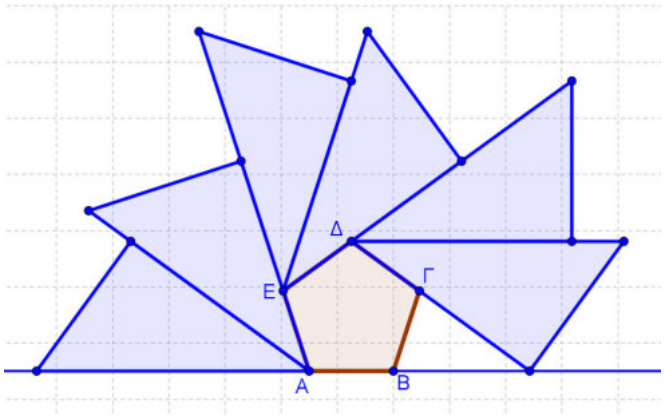
Σύμφωνα με προηγούμενο sangaku (No1), ανάμεσα στις ακτίνες των κύκλων με κέντρα Δ,Η και Ε θα ισχύει η σχέση : $\frac{1}{\sqrt{\rho_3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{4}}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho_3 = \frac{R}{6+4\sqrt{2}}$



Για τον μικρότερο από τους κύκλους από Π.Θ. έχουμε :

$(R-\rho_4)^2 = \rho_4{}^2 + (\frac{R}{\sqrt{2}} + \sqrt{R\rho_4})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho_4 = \frac{2R}{9}$

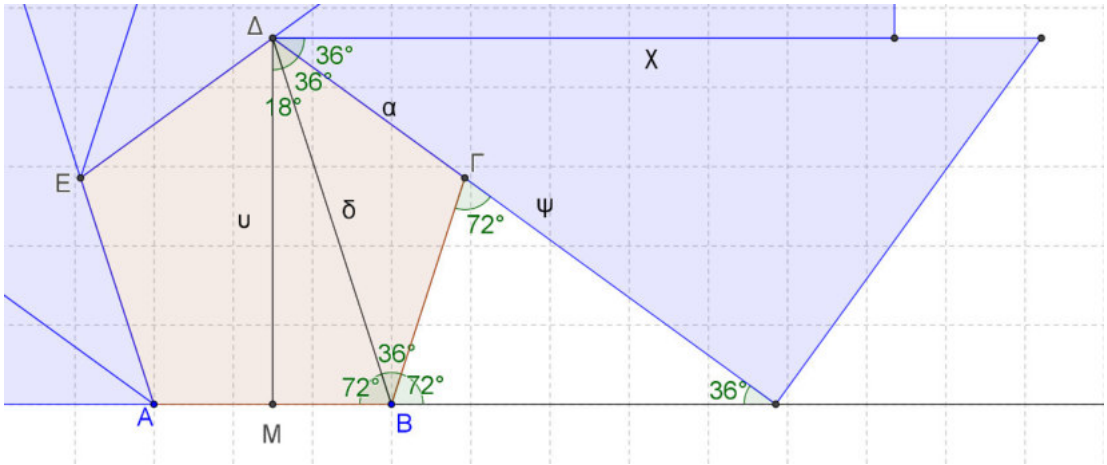
Πρόβλημα 66ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ πλευράς α. Έξι ίσα ορθογώνια τρίγωνα το περιβάλλουν όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την υποτείνουσα των ορθογωνίων ως συνάρτηση της πλευράς α.

(δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

Υπολογισμοί



Ισχύουν οι ισότητες : $\sigma\upsilon\nu 36^o = \frac{\psi}{\chi} \Leftrightarrow \chi = \frac{\psi}{\sigma\upsilon\nu 36^o}$ (1), $\eta\mu 36^o = \frac{\upsilon}{\psi} \Leftrightarrow \psi = \frac{\upsilon}{\eta\mu 36^o}$ (2)

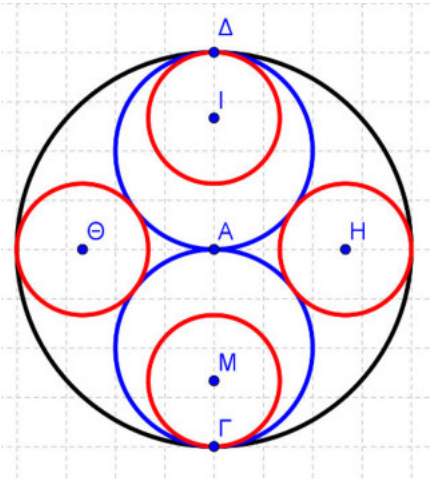
$\eta\mu 72^o = \frac{\upsilon}{\delta} \Leftrightarrow \upsilon = \delta \cdot \eta\mu 72^o$ (3), $\sigma\upsilon\nu 36^o = \frac{\frac{\delta}{2}}{\alpha} \Leftrightarrow \delta = 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 36^o$ (4)

Από (1),(2),(3),(4) έχουμε :

$$\chi = \frac{\psi}{\sigma\upsilon\nu 36^o} \overset{(2)}{=} \frac{\upsilon}{\eta\mu 36^o \cdot \sigma\upsilon\nu 36^o} \overset{(3)}{=} \frac{\delta \cdot \eta\mu 72^o}{\eta\mu 36^o \cdot \sigma\upsilon\nu 36^o} \overset{(4)}{=} \frac{2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 36^o \cdot \eta\mu 72^o}{\eta\mu 36^o \cdot \sigma\upsilon\nu 36} = 4\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 36^o$$

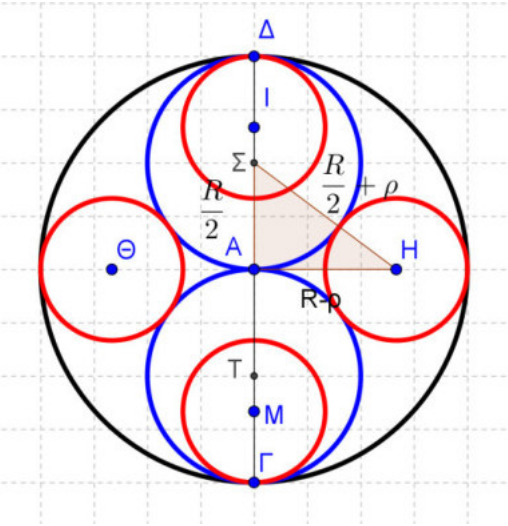
Άρα $\chi = 4\alpha \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\alpha \cdot (1+\sqrt{5})$.

Πρόβλημα 67ο



Σε κύκλο (Α,R) έχουμε εγγράψει δύο κύκλους με ακτίνα R/2 ώστε να εφάπτονται του αρχικού κύκλου αλλά και μεταξύ τους και ακόμα άλλους τέσσερεις κύκλους ακτίνας ρ, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την ακτίνα ρ συναρτήσει της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



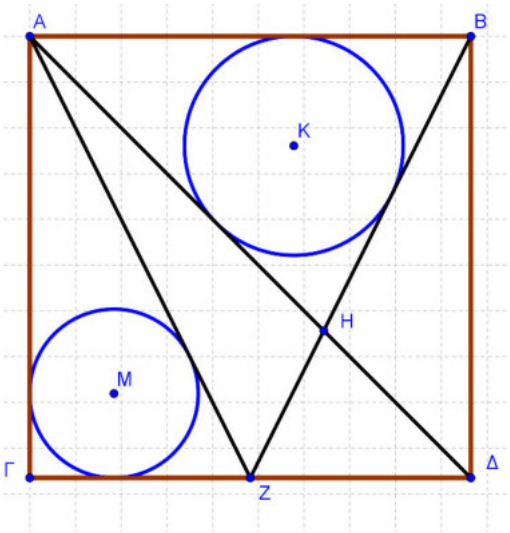
Από Π.Θ. στο ΣΑΗ, (Σ κέντρο κύκλου ακτίνας R/2) έχουμε :

$$(\frac{R}{2}+\rho)^2=(\frac{R}{2})^2+(R-\rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{R^2}{4}+\rho^2+R\rho=\frac{R^2}{4}+R^2+\rho^2-2R\rho \Leftrightarrow$$

$$3R\rho=R^2 \Leftrightarrow \rho=\frac{R}{3}$$

Πρόβλημα 68ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται τετράγωνο πλευράς α το ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΒ και δύο κύκλοι όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες τους συναρτήσει της πλευράς του τετραγώνου α.

Υπολογισμοί

Ο υπολογισμός του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΑΓΖ θα γίνει με κλασική γεωμετρία.

Ισχύει ότι : $(\text{ΑΓΖ}) = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow \dfrac{\frac{\alpha}{2}\cdot\alpha}{2} = \dfrac{\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}}{2}\cdot\rho \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = \dfrac{\alpha}{3+\sqrt{5}}$

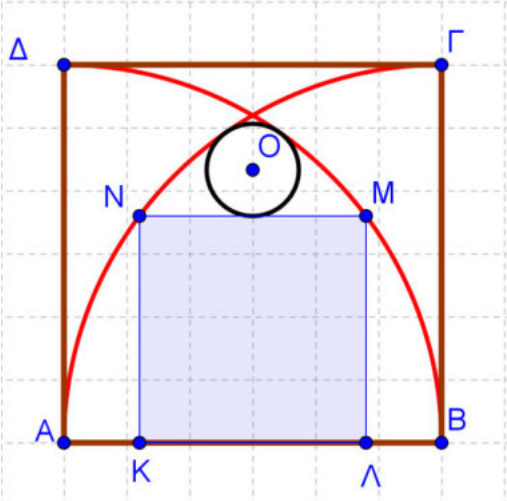
Ο υπολογισμός της ακτίνας του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο ΑΗΒ κύκλου θα γίνει θεωρώντας ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με Α(0,0), Β(α,0) και Γ(0,-α). Οπότε η ευθεία ΑΔ έχει εξίσωση ψ=-χ και η ΒΖ έχει εξίσωση ψ=2χ-2α (γιατί;) ενώ το σημείο Κ θεωρούμε ότι έχει συντεταγμένες (χ,ρ) με χ>0 και ρ<0.

Ισχύουν οι ισότητες : $d(K, A\Delta) = -\rho \Leftrightarrow \dfrac{|\chi+\rho|}{\sqrt{2}} = -\rho \Leftrightarrow \chi = -\rho(\sqrt{2}-1)$ (1)

$d(\kappa, BZ) = -\rho \Leftrightarrow \dfrac{|\rho - 2\chi + 2\alpha|}{\sqrt{5}} = -\rho \Leftrightarrow |\rho - 2\chi + 2\alpha| = -\rho\sqrt{5}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι : $-\rho = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-1}$, οπότε η ακτίνα του δεύτερου κύκλου είναι $R = -\rho = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-1}$

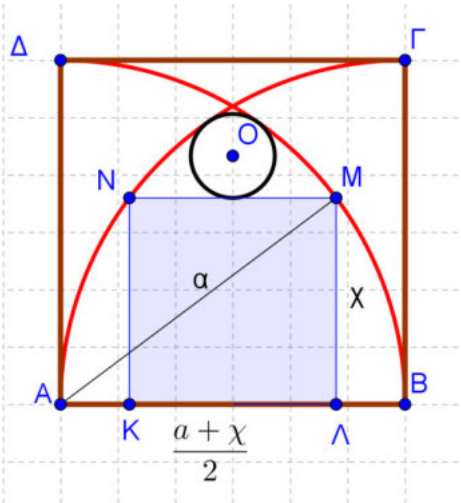
Πρόβλημα 69ο



Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ στο οποίο γράφουμε τα τεταρτοκύκλια (Α,ΑΒ) και (Β,ΒΑ) . Στο κοινό τους μέρος εγγράφουμε τετράγωνο πλευράς χ και κύκλο ακτίνας ρ, (όπως στο σχήμα).

Να υπολογίσετε την πλευρά χ και την ακτίνα ρ συναρτήσει της πλευράς α του αρχικού τετραγώνου.

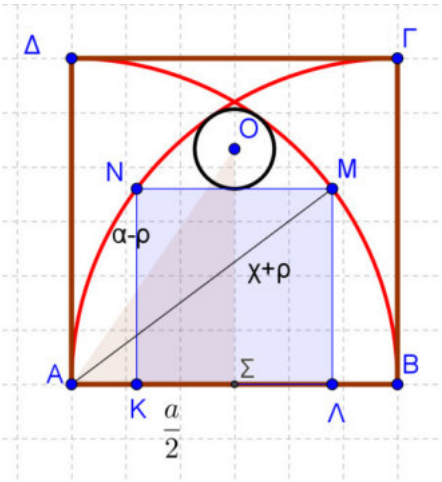
Υπολογισμοί



Από Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΜΛ έχουμε :

$$\alpha^2 = \chi^2 + \frac{(\alpha+\chi)^2}{4} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 4\chi^2 + \alpha^2 + \chi^2 + 2\alpha\chi \Leftrightarrow$$

$$5\chi^2 + 2\alpha\chi - 3\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi = \frac{3\alpha}{5}$$



Από Π.Θ. στο ΑΟΣ έχουμε :

$$(\alpha-\rho)^2 = (\chi+\rho)^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 \Leftrightarrow$$

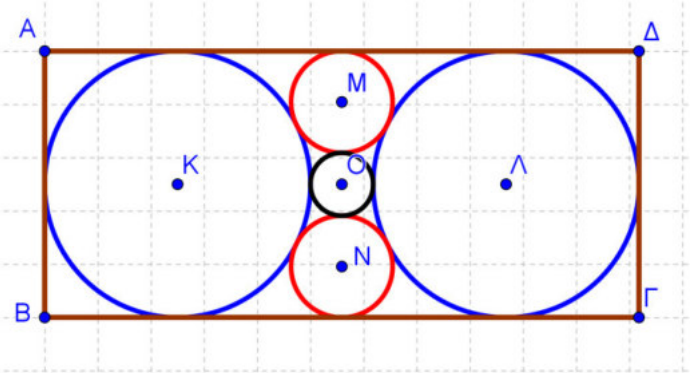
$$4\alpha^2 + 4\rho^2 - 8\alpha\rho = 4\chi^2 + 4\rho^2 + 8\chi\rho + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha^2 - 8\alpha\rho = 4(\frac{3\alpha}{5})^2 + 8\frac{3\alpha}{5}\rho \Leftrightarrow$$

$$75\alpha^2 - 200\alpha\rho = 36\alpha^2 + 120\alpha\rho \Leftrightarrow$$

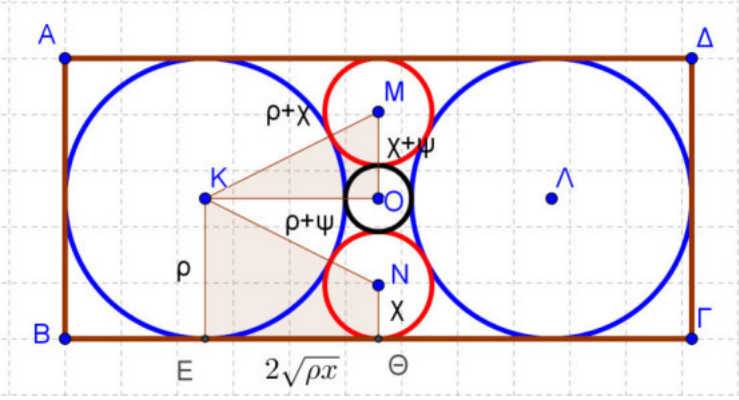
$$320\alpha\rho = 39\alpha^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{39\alpha}{320}$$

Πρόβλημα 70ο



Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε γράψει πέντε κύκλους όπως στο σχήμα. Οι δύο μεγαλύτεροι έχουν ακτίνα ρ, οι αμέσως δύο μικρότεροι ακτίνα χ και ο πέμπτος ακτίνα ψ. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα $A\Delta = \sqrt{5} \cdot AB$

Απόδειξη



Ισχύουν οι ισότητες :

$AB = 2\rho = 4\chi + 2\psi$ (1)

$A\Delta = 4\rho + 2\psi = 2\rho + 4\sqrt{\rho\chi}$ (2)

Από Π.Θ. στο ΚΟΜ είναι :

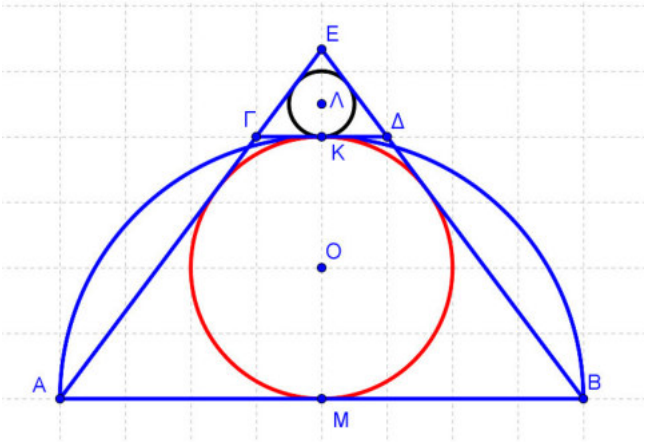
$(\rho+\chi)^2 = (\chi+\psi)^2 + (\rho+\psi)^2$ (3)

Από (1) και (3) απαλείφοντας το ρ έχουμε ότι : $\psi = \dfrac{\chi(\sqrt{5}-1)}{2}$ (4)

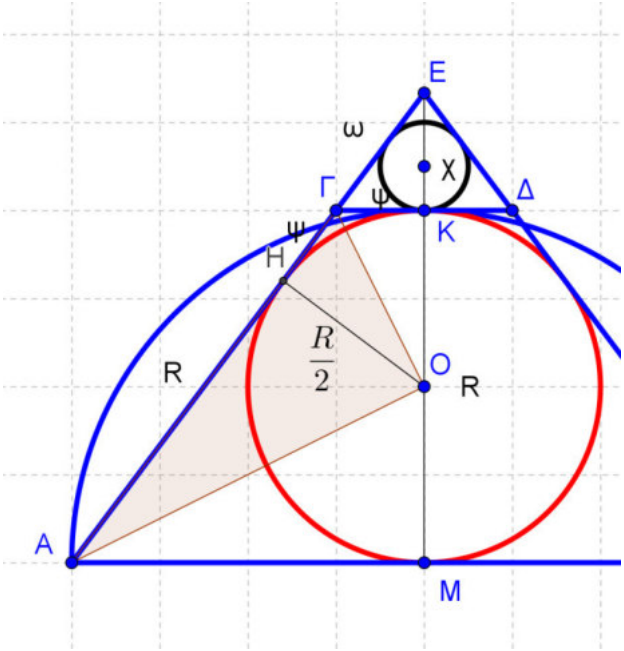
Από (2) και (4) έχουμε ότι : $\chi = \dfrac{\rho}{4}(\sqrt{5}-1)^2$

Οπότε : $A\Delta = 2\rho + 4\sqrt{\rho\chi} = 2\rho + 4\sqrt{\rho \cdot \dfrac{\rho}{4} \cdot (\sqrt{5}-1)^2} = 2\rho + 2\rho(\sqrt{5}-1) = 2\rho\sqrt{5} = AB\sqrt{5}$

Πρόβλημα 71ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται ημικύκλιο (Μ,R), ο κύκλος (Ο,R/2) που εφάπτεται στη διάμετρο ΑΒ και στο ημικύκλιο. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου (Ο,R/2) που άγονται από τα άκρα Α και Β της διαμέτρου που τέμνονται στο Ε. Τέλος φέρνουμε και την εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο μέσο Κ του τόξου ΑΒ που τέμνει τις προηγούμενες εφαπτόμενες στα σημεία Γ και Δ. Εγγράφουμε κύκλο (Λ,ρ) στο τρίγωνο ΕΓΔ. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ συναρτήσει της ακτίνας R.



Υπολογισμοί

Ονομάζουμε ΓΕ=ω, ΓΚ=ΓΗ=ψ και ΕΚ=χ.

Στο τραπέζιο ΓΚΜΑ ισχύει ΓΚ+ΑΜ=ΓΑ , οπότε είναι εύκολο (;) να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ορθογώνιο. Αν ΟΗ κάθετη στην ΓΑ, τα τρίγωνα ΓΗΟ και ΗΟΑ είναι όμοια οπότε :

$$\frac{HO}{AH}=\frac{\Gamma H}{HO}\Leftrightarrow\frac{\frac{R}{2}}{R}=\frac{\psi}{\frac{R}{2}}\Leftrightarrow\psi=\frac{R}{4}\quad(1)$$

Τα τρίγωνα ΓΕΚ και ΕΑΜ είναι όμοια άρα :

$$\frac{EK}{EM}=\frac{\Gamma K}{AM}\Leftrightarrow\frac{\chi}{\chi+R}=\frac{\psi}{R}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ldots\Leftrightarrow\chi=\frac{R}{3}\quad(2)$$

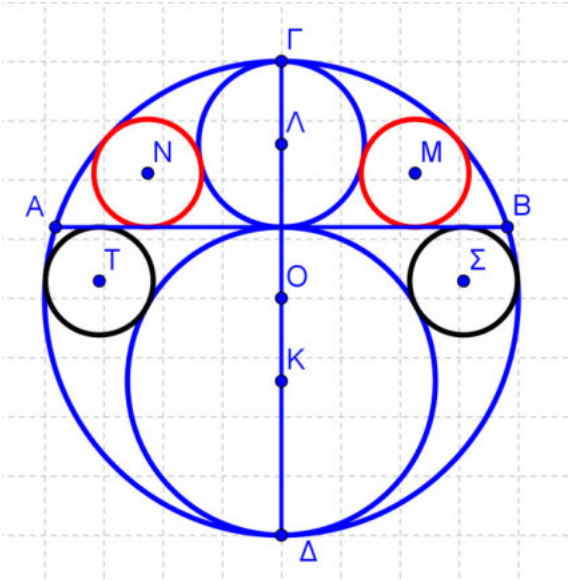
Από Π.Θ. στο ΓΕΚ έχουμε :

$$\omega^2=\chi^2+\psi^2\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}\ldots\Leftrightarrow\omega=\frac{5R}{12}\quad(3)$$

Στο ΓΕΔ έχουμε $(\Gamma E\Delta)=\frac{1}{2}\cdot 2\psi\cdot\chi=\psi\cdot\chi=\frac{R^2}{12}$ και $\tau=2\omega+2\psi=\frac{5R}{6}+\frac{R}{2}=\frac{8R}{6}=\frac{4R}{3}$.

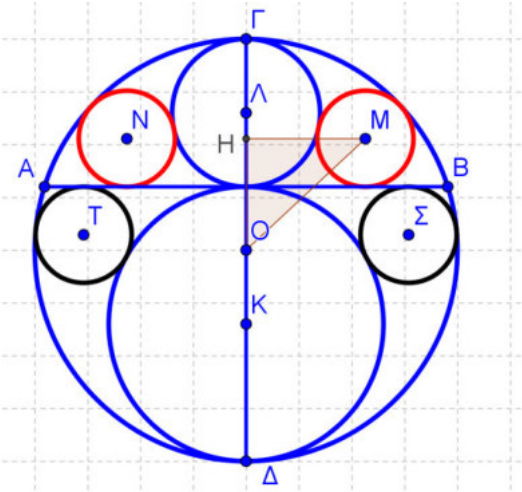
Άρα $(\Gamma E\Delta)=\tau\cdot\rho\Leftrightarrow\frac{R^2}{12}=\frac{4R}{3}\cdot\rho\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\rho=\frac{R}{16}$

Πρόβλημα 72ο



Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τυχαία χορδή ΑΒ. Φέρνουμε τη διάμετρο ΓΔ κάθετη στην ΑΒ και κατασκευάζουμε τους κύκλους (Λ,χ) και (Κ,ψ), όπως στο σχήμα. Γράφουμε δύο κύκλους (Μ,ρ) και (Ν,ρ) που εφάπτονται της ΑΒ του κύκλου (Ο,R) και του κύκλου (Λ,χ). Τέλος γράφουμε τους κύκλους (Σ,r) και (Τ,r) που εφάπτονται της χορδής ΑΒ του κύκλου (Ο,R) και του κύκλου (Κ,ψ). Να αποδείξετε ότι r=ρ.

Απόδειξη



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΜΟ είναι $HM = 2\sqrt{\chi\rho}$ (γιατί;) , $OM = R - \rho$ και $OH = R - 2\chi + \rho$.

Από Π.Θ έχουμε :

$$(R-\rho)^2 = 4x\rho + (R-2x+\rho)^2 \Leftrightarrow \ldots$$

$$\rho = \frac{x\cdot(R-x)}{R}$$

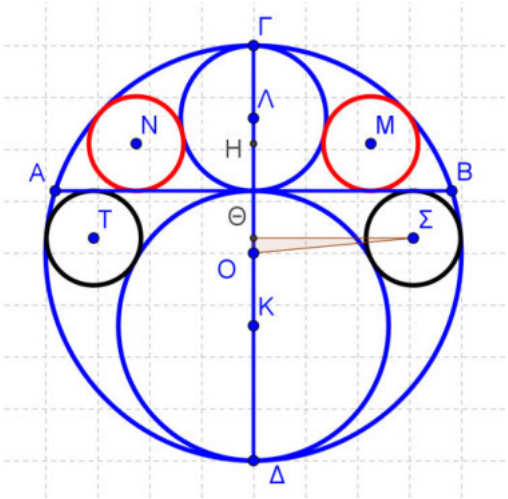
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΣΘ είναι $\Theta\Sigma = 2\sqrt{\psi r}$ (γιατί;)

$O\Sigma = R - r$ και $O\Theta = R - 2x - r$.

Από Π.Θ. έχουμε :

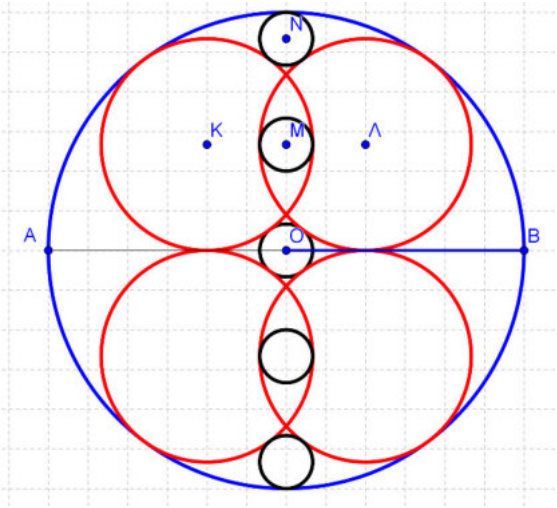
$$(R-r)^2 = 4r\psi + (R-2x-r)^2 \Leftrightarrow \ldots$$

$$r = \frac{x\cdot(R-x)}{x+\psi}$$

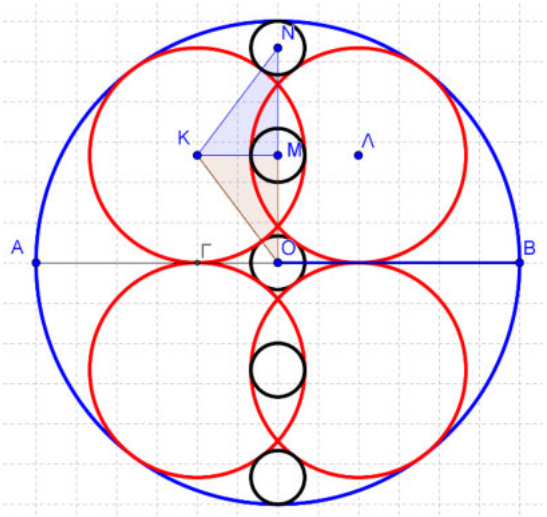


Επειδή χ+ψ=R έχουμε ότι : ρ=r.

Πρόβλημα 73ο



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο (Ο,R) και ένα μικρότερο $(O,\frac{R}{9})$. Γράφουμε τον κύκλο (Κ,ρ) ο οποίος εφάπτεται της διαμέτρου ΑΒ και των κύκλων (Ο,R) και $(O,\frac{R}{9})$. Όμοια γράφουμε τον κύκλο (Λ,ρ) και τους συμμετρικούς των προηγούμενων ως προς την διάμετρο ΑΒ. Γράφουμε κύκλο (Μ,r) που εφάπτεται εσωτερικά στο κοινό μέρος των κύκλων (Κ,ρ) και (Λ,ρ), όμοια με αυτόν υπάρχει και άλλος ένας κύκλος συμμετρικά ως προς την διάμετρο ΑΒ. Τέλος γράφουμε και τον κύκλο (Ν,σ) που εφάπτεται των (Κ,ρ),(Λ,ρ) και του (Ο,R) και τον συμμετρικό του ως προς την διάμετρο ΑΒ. Να αποδείξετε ότι : $\sigma = r = \frac{R}{9}$.



Απόδειξη

Ισχύει ότι : $KO = \rho + \frac{R}{9} = R - \rho$, άρα $\rho = \frac{4R}{9}$.

Στο ορθογώνιο ΚΜΟ από Π.Θ. έχουμε :

$$KO^2 = KM^2 + MO^2 \Leftrightarrow$$

$$(\frac{4R}{9} + \frac{R}{9})^2 = (\frac{4R}{9} - r)^2 + (\frac{4R}{9})^2 \Leftrightarrow$$

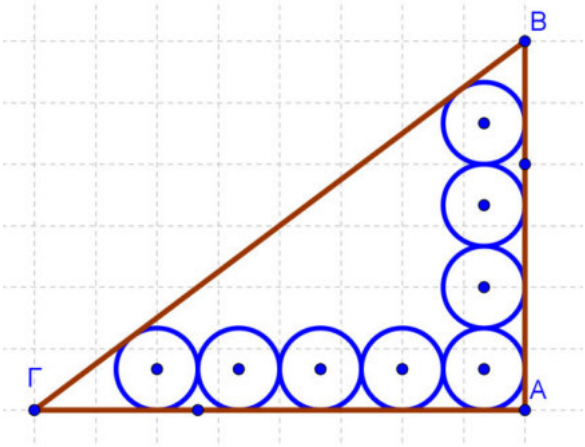
$$\ldots \Leftrightarrow r = \frac{R}{9}$$

Στο ορθογώνιο ΚΜΝ από Π.Θ. έχουμε :

$$KN^2 = KM^2 + MN^2 \Leftrightarrow (\frac{4R}{9} + \sigma)^2 = (\frac{4R}{9} - \frac{R}{9})^2 + (R - \frac{4R}{9} - \sigma)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sigma = \frac{R}{9}$$

Άρα $\sigma = r = \frac{R}{9}$.

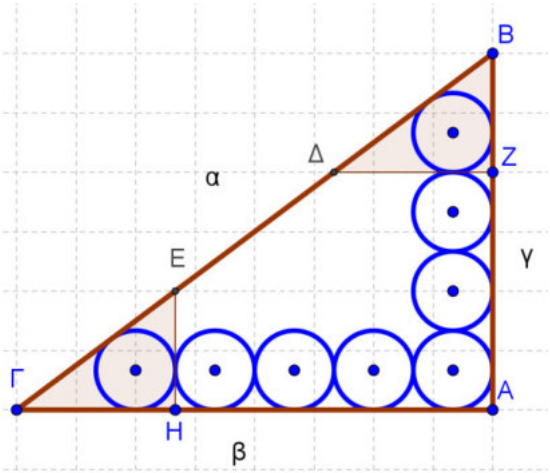
Πρόβλημα 74ο



Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε εγγράψει οκτώ κύκλους ακτίνας ρ, όπως στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι 3ρ=R , όπου R η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη



Τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΑΒΓ είναι όμοια άρα :

$$\frac{BZ}{BA}=\frac{\rho}{R}\Leftrightarrow\frac{\gamma-6\rho}{\gamma}=\frac{\rho}{R}\quad(1)$$

Όμοια από τα όμοια τρίγωνα ΓΕΗ και ΑΒΓ έχουμε :

$$\frac{\Gamma H}{\Gamma A}=\frac{\rho}{R}\Leftrightarrow\frac{\beta-8\rho}{\beta}=\frac{\rho}{R}\quad(2)$$

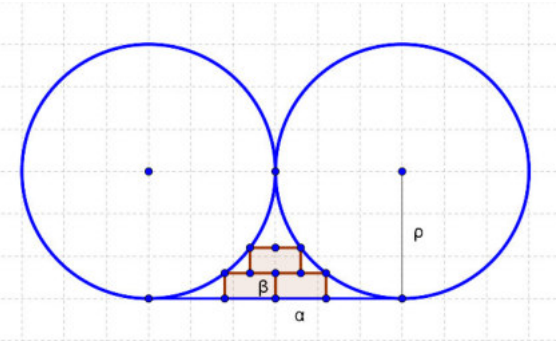
Από (1),(2) έχουμε τελικά ότι : 3β=4γ οπότε αν ονομάσουμε $\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\lambda$ σε συνδυασμό με Π.Θ. στο ΑΒΓ έχουμε ότι :

$\beta=4\lambda,\ \gamma=3\lambda\ ,\ \alpha=5\lambda$ (3).

Επειδή $(AB\Gamma)=\tau\cdot R\Leftrightarrow\frac{\beta\cdot\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot R\Leftrightarrow 12\lambda^2=12\lambda R\Leftrightarrow R=\lambda$

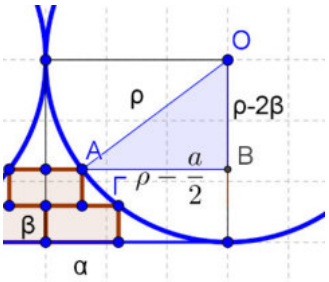
Οπότε από την (1) έχουμε : $\frac{3\lambda-6\rho}{3\lambda}=\frac{\rho}{\lambda}\Leftrightarrow 9\rho=3\lambda\Leftrightarrow\rho=\frac{\lambda}{3}\Leftrightarrow\rho=\frac{R}{3}$.

Πρόβλημα 75ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ και τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων αΧβ.
Να υπολογίσετε τις διαστάσεις α και β συναρτήσει της ακτίνας ρ.

Υπολογισμοί

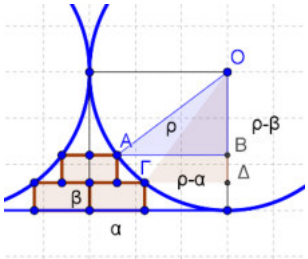


Από Π.Θ. στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε :

$$\rho^2 = (\rho - 2\beta)^2 + (\rho - \frac{\alpha}{2})^2 \quad (1)$$

Από Π.Θ. στο τρίγωνο ΟΓΔ έχουμε :

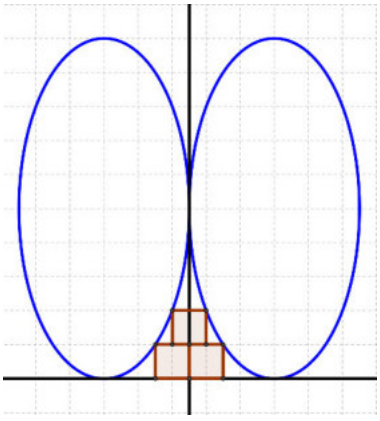
$$\rho^2 = (\rho - \beta)^2 + (\rho - \alpha)^2 \quad (2)$$



Από (1) και (2) καταλήγουμε στην ισότητα :

$(2\rho - 3\beta)(-\beta) = (2\rho - \frac{3\alpha}{2})(-\frac{\alpha}{2})$ η οποία δίνει ως προφανή λύση την $\beta = \frac{\alpha}{2}$ για την τιμή αυτή η (1) δίνει τελικά ότι :

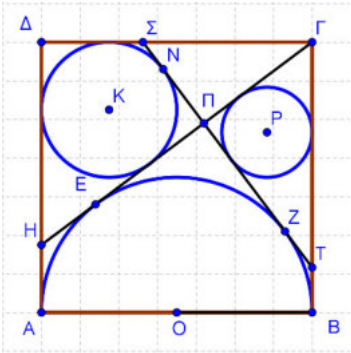
$\beta = \frac{\rho}{5}$, οπότε $\alpha = \frac{2\rho}{5}$.



Υπάρχει το ο ίδιο πρόβλημα με δύο ελλείψεις και τρία τετράγωνα.

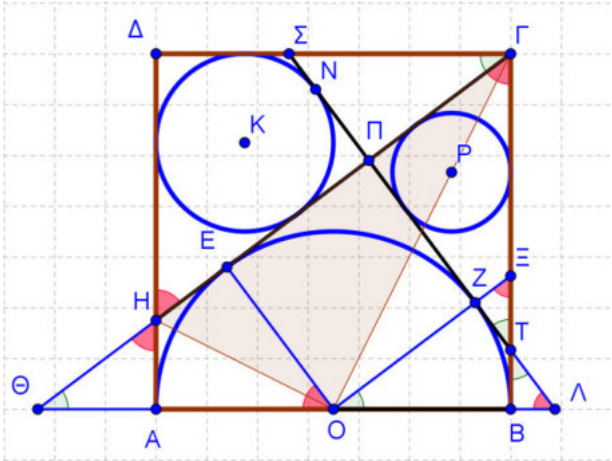
Η λύση μπορεί να γίνει αν φανταστούμε τους προηγούμενους κύκλους να μετασχηματίζονται σε ελλείψεις και συγχρόνως τα ορθογώνια σε τετράγωνα. Οπότε η έλλειψη θα έχει μεγάλο άξονα διπλάσιο από το μικρό και η πλευρά του τετραγώνου θα είναι ίση με το 1/5 του μικρού άξονα (γιατί;).

Πρόβλημα 76ο



Στο διπλανό τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε γράψει ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Φέρνουμε την εφαπτομένη ΓΗ από το Γ και κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΔΗΓ. Αν η κοινή εφαπτομένη ΣΤ του ημικυκλίου και του κύκλου (Κ,ρ) τέμνει την ΓΗ στο σημείο Π και (Ρ,r) ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΠΤ, να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{3}{2}r$

Απόδειξη



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται δύο είδη γωνιών (πράσινη και κόκκινη) αποτέλεσμα όλων αυτών των ζευγαριών ίσων γωνιών είναι ότι η γωνία ΕΟΖ είναι ορθή και άμεσο συμπέρασμα είναι ότι το ΕΠΖΟ είναι τετράγωνο.

Αν ονομάσουμε την πλευρά ΑΒ=2α θα έχουμε ότι ΕΟ=ΕΠ=ΠΖ=ΖΟ=α και επειδή ΓΕ=ΓΒ τελικά θα είναι και ΠΓ=α.

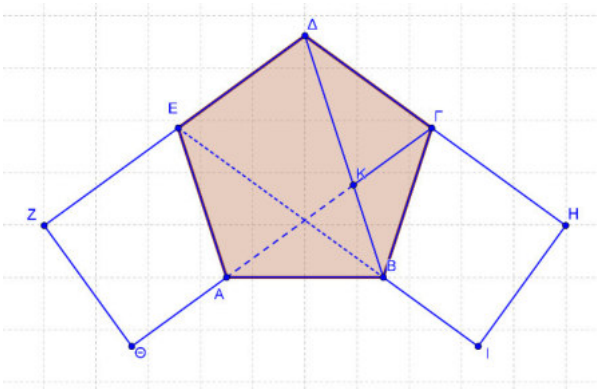
Συγχρόνως είναι εύκολο να δείξουμε ότι το ΗΟΓ είναι ορθογώνιο (γιατί;) οπότε θα ισχύει : $EO^2 = HE \cdot E\Gamma \Leftrightarrow \alpha^2 = HE \cdot \Gamma B \Leftrightarrow \alpha^2 = HE \cdot 2\alpha \Leftrightarrow HE = \frac{\alpha}{2}$.

Άρα το ΔΗΓ έχει πλευρές : $\Delta\Gamma = 2\alpha,\ \Delta H = \frac{3\alpha}{2}$, $\Gamma H = \frac{5\alpha}{2}$. (γιατί;)

Τα τρίγωνα ΔΗΓ και ΠΓΤ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας : $\lambda = \frac{\Delta H}{\Pi\Gamma} = \frac{\frac{3\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{3}{2}$

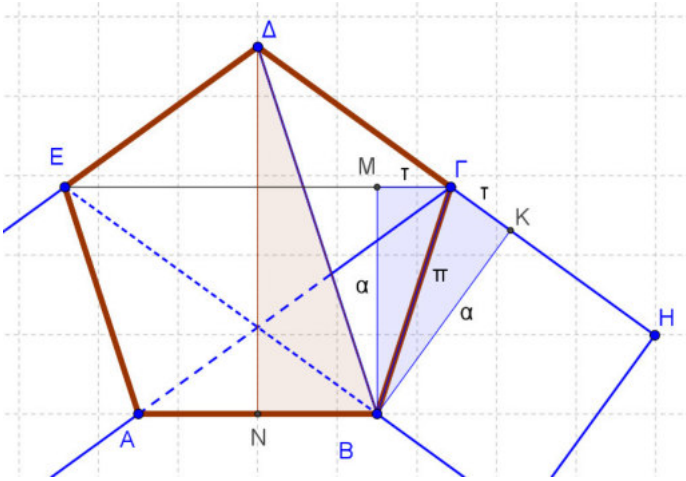
Άρα $\frac{\rho}{r} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{3}{2}r$

Πρόβλημα 77ο



Διπλώνουμε μία λωρίδα χαρτί πλάτους **α**, σαν να δένουμε ένα κόμπο. Το τεντώνουμε με προσοχή φροντίζοντας να μη κοπεί το χαρτί. Θα παρατηρήσουμε ότι σχηματίζεται ένα κανονικό πεντάγωνο!
Να υπολογίσετε την πλευρά του πενταγώνου **π** συναρτήσει του πλάτους **α**.

Υπολογισμοί



Φέρνουμε ΔΝ κάθετη στην ΑΒ και ΒΜ κάθετη στην ΕΓ και ΒΤ κάθετη στην ΔΗ.

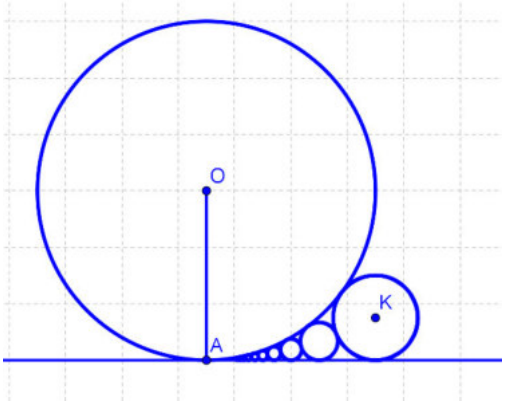
Τα τρίγωνα ΜΓΒ και ΓΚΒ είναι ίσα (γιατί;). Τα τρίγωνα ΔΝΒ και ΜΓΒ είναι όμοια (γιατί;) άρα θα ισχύει ότι :

$$\frac{\Delta B}{NB}=\frac{B\Gamma}{M\Gamma}\Leftrightarrow\frac{E\Gamma}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\tau}\Leftrightarrow\frac{\pi+2\tau}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\tau}\Leftrightarrow$$

$$2\pi\tau+4\tau^2=\pi^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\tau=\frac{\pi}{1+\sqrt{5}}$$

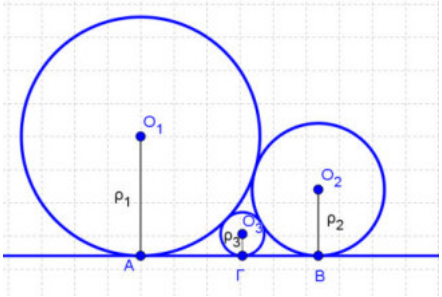
Από Π.Θ. στο ΜΤΓ έχουμε : $\pi^2=\alpha^2+\tau^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\pi^2=\alpha^2+\frac{\pi^2}{(1+\sqrt{5})^2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\pi=\frac{\alpha\cdot(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$

Πρόβλημα 78ο



Δίνεται κύκλος (O_o,1000) που εφάπτεται ευθείας (ε) σε σημείο Α. Γράφουμε κύκλο (O_1,0.001) που εφάπτεται του (O_o,1000) και της ευθείας (ε). Μετά γράφουμε κύκλο (O_2,ρ_2) που εφάπτεται των δύο προηγούμενων και της ευθείας. Στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (O_3,ρ_3) που εφάπτεται του O_2 του O_0 και της (ε) κ.ο.κ Με την διαδικασία αυτή οι νέοι κύκλοι ολοένα και περισσότερο θα έχουν μεγαλύτερη ακτίνα. Να βρείτε μέχρι πόσο μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία αυτή.

Υπολογισμοί



Γνωρίζουμε ότι (πρόβλημα 1ο) για τους κύκλους (Ο1,ρ1), (Ο2,ρ2) και (Ο3,ρ3) που εφάπτονται ανά δύο όπως και μιας ευθείας (ε) ισχύει η σχέση : $\frac{1}{\sqrt{\rho_3}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}+\frac{1}{\sqrt{\rho_2}}$

Οπότε εφαρμόζοντας διαδοχικά την σχέση αυτή για τους κύκλους του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε έχουμε :

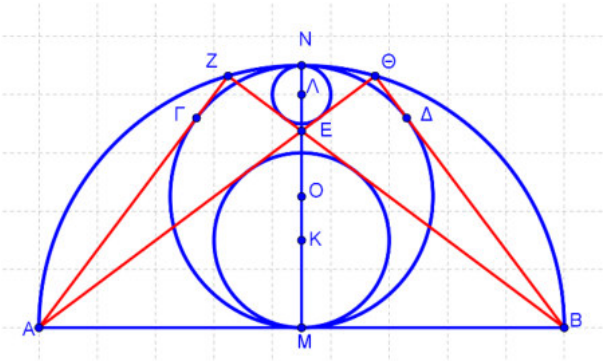
$$\frac{1}{\sqrt{\rho_2}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}-\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{\rho_3}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}-\frac{2}{\sqrt{\rho_o}}\quad ,\dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\rho_\nu}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}-\frac{\nu-1}{\sqrt{\rho_0}}$$

Άρα $\sqrt{\rho_\nu}=\frac{\sqrt{\rho_0\cdot\rho_1}}{\sqrt{\rho_0}-(\nu-1)\sqrt{\rho_1}}$

Πρέπει $\sqrt{\rho_o}>(\nu-1)\sqrt{\rho_1}\Leftrightarrow \nu-1<\sqrt{\frac{1000}{0.001}}\Leftrightarrow \nu-1<1000\Leftrightarrow \nu<1001$

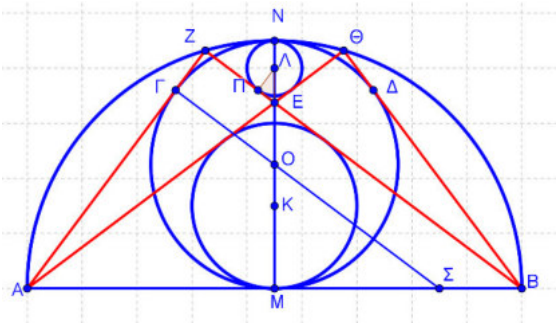
Άρα η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί (με αυτές τις αρχικές τιμές των ακτίνων των δύο πρώτων κύκλων) ως τον 1000ο κύκλο.

Πρόβλημα 79ο



Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΜΝ όπου Μ,Ν τα μέσα της διαμέτρου ΑΒ και του τόξου ΑΒ αντίστοιχα. Από τα άκρα Α και Β φέρνουμε εφαπτόμενες στον κύκλο (Ο,ρ) που τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία Θ και Ζ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των ΑΘ και ΖΒ. Κατασκευάζουμε κύκλους (Κ,ρ_1) και (Λ,ρ_2) που εφάπτονται των ΑΘ, ΖΒ και του (Ο,ρ), όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις ακτίνες ρ_1,ρ_2 συναρτήσει της ακτίνας ρ.

Υπολογισμοί



Τα τρίγωνα ΟΜΣ και ΑΓΣ είναι όμοια άρα :

$$\frac{OM}{A\Gamma}=\frac{O\Sigma}{A\Sigma}=\frac{M\Sigma}{\Gamma\Sigma}\overset{A\Gamma=AM=R=2OM}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}=\frac{O\Sigma}{A\Sigma}=\frac{M\Sigma}{\Gamma\Sigma}$$

Άρα $O\Sigma=\frac{A\Sigma}{2}=\frac{R+M\Sigma}{2}$ (1)

Στο ΟΜΣ από Π.Θ. με την βοήθεια της (1) καταλήγουμε ότι : $M\Sigma=\frac{2R}{3}$, οπότε $O\Sigma=\frac{5R}{6}$ και $\Gamma\Sigma=\frac{4R}{3}$

Τα τρίγωνα ΑΓΣ και ΑΖΒ είναι όμοια από όπου έχουμε τελικά ότι : $ZB=\frac{8R}{5}$,

$ZA=\frac{6R}{5}$.

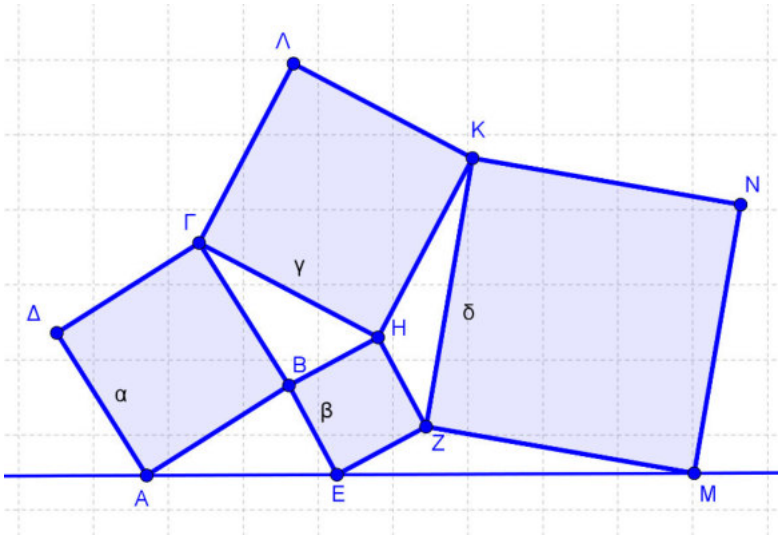
Από τα όμοια τρίγωνα ΕΜΒ και ΖΑΒ έχουμε τελικά ότι : $EB=\frac{5R}{4}$, $EM=\frac{3R}{4}$.

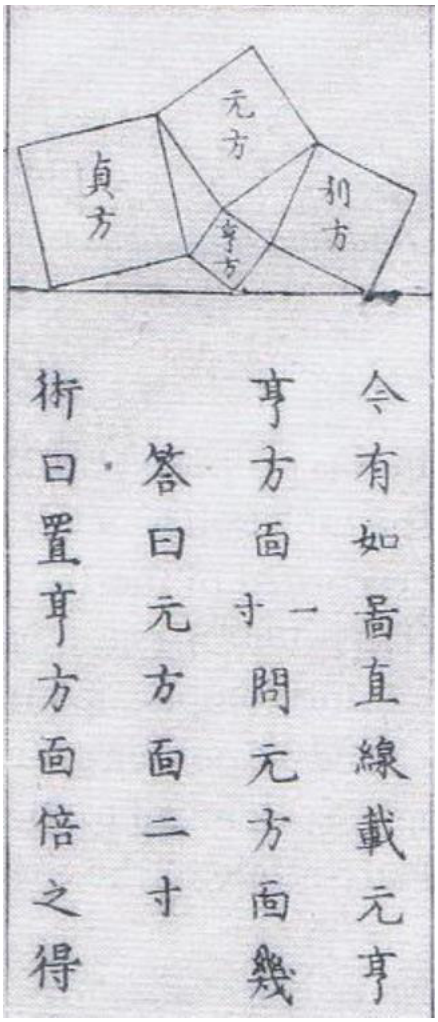
Ισχύει ότι : $(EAB)=\tau\cdot\rho\Leftrightarrow\frac{EM\cdot AB}{2}=\frac{2EB+AB}{2}\cdot\rho\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\rho=\frac{3R}{7}$

Από τα όμοια τρίγωνα ΕΛΠ και ΕΜΒ έχουμε :

$$\frac{\Pi\Lambda}{MB}=\frac{\Lambda E}{EB}\Leftrightarrow\frac{r}{R}=\frac{R-r-\frac{3}{4}R}{\frac{5R}{4}}$$, από όπου τελικά έχουμε ότι $r=\frac{R}{9}$.

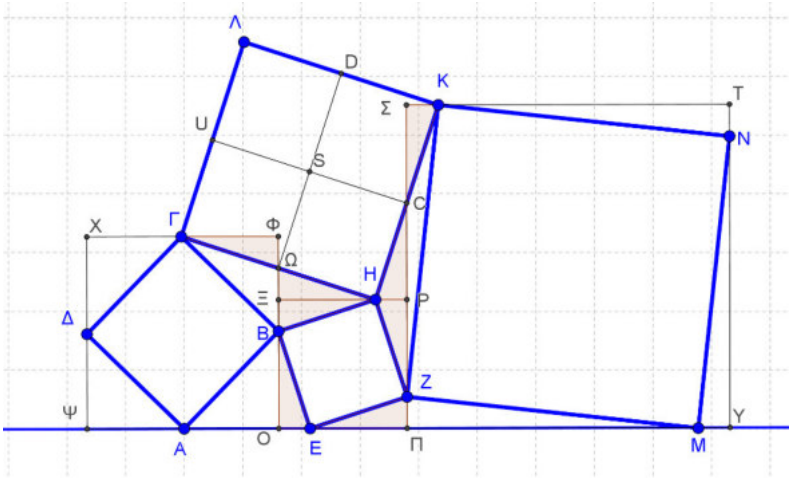
Πρόβλημα 80ο





Τέσσερα τετράγωνα πλευρών α,β,γ και δ είναι τοποθετημένα όπως στο σχήμα ώστε οι κορυφές Α,Ε και Μ να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Να αποδείξετε ότι : $4\beta^2=\gamma^2$.

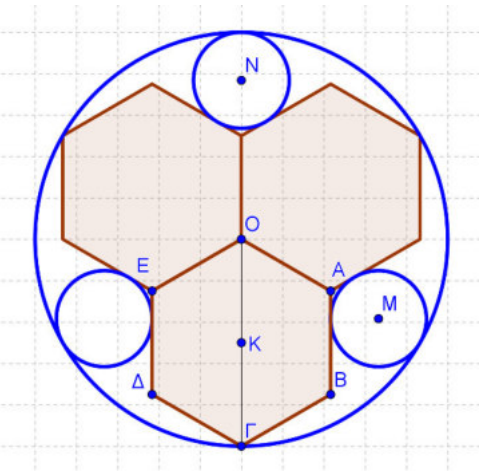
Απόδειξη



Σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΞΡΠΟ, ΣΤΥΠ και ΧΦΟΨ.

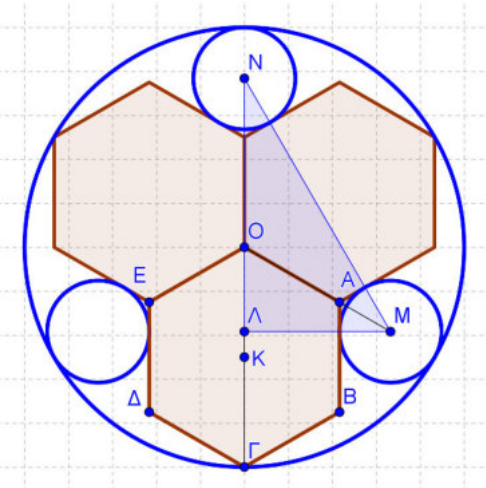
Εύκολα δείχνουμε ότι τα τρίγωνα ΞΒΗ,ΗΡΖ,ΖΕΠ και ΒΟΕ είναι ίσα, όμοια ίσα είναι και τα ΖΠΜ, ΜΥΝ, ΝΚΤ και ΚΣΖ όπως και τα ΧΓΔ,ΔΨΑ,ΑΟΒ και ΒΦΓ. Από τις ισότητες αυτές έχουμε ότι ΗΡ=ΖΠ=ΣΚ, οπότε αν ονομάσουμε C το σημείο τομής των ΣΠ και ΗΚ τότε τα τρίγωνα CΣΚ και ΗΡC, άρα HC=CK=HZ. Εργαζόμενοι παρόμοια μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι : ΓΩ=ΩΗ=ΒΗ, δηλαδή ισχύει ότι $2\beta=\gamma$, άρα $4\beta^2=\gamma^2$.

Πρόβλημα 81ο



Στο διπλανό κύκλο (O,R) έχουμε εγγράψει τρία εξάγωνα και τρεις κύκλους όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ των τριών ίσων κύκλων ως συνάρτηση της ακτίνας R.

Υπολογισμοί



Ισχύει ότι : $OM = R - \rho$ (1)

$NM = \frac{R\sqrt{3}}{2} + 2\rho$ (2) $\quad M\Lambda = \frac{R\sqrt{3}}{4} + \rho$ (3)

$O\Lambda = \frac{1}{3}N\Lambda = \frac{1}{3}\frac{NM\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}(\frac{R\sqrt{3}}{2} + 2\rho) = \frac{R}{4} + \frac{\rho\sqrt{3}}{3}$ (4)

Από Π.Θ. στο ΟΛΜ έχουμε :

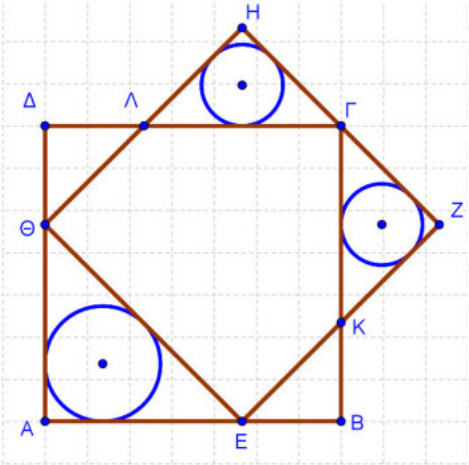
$OM^2 = \Lambda M^2 + O\Lambda^2 \overset{(3),(4)}{=} \ldots = (\frac{R}{2} + \frac{2\rho}{\sqrt{3}})^2$, άρα

$OM = \frac{R}{2} + \frac{2\rho}{\sqrt{3}}$ (5).

Από (1),(5) έχουμε ότι : $R - \rho = \frac{R}{2} + \frac{2\rho}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho = R \cdot (\sqrt{3} - \frac{3}{2})$

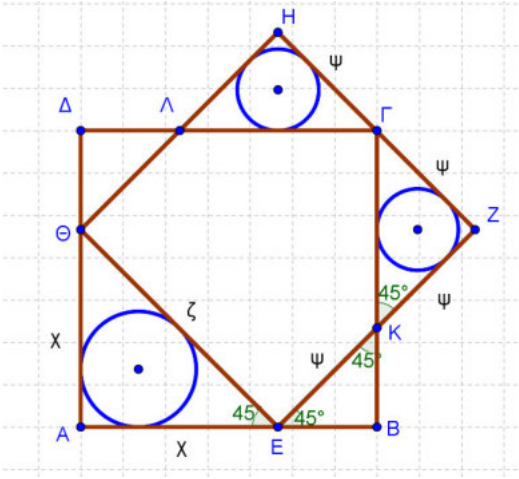
Πρόβλημα 82ο

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ. Στα σχηματιζόμενα τρίγωνα ΛΗΓ και ΓΖΚ εγγράφουμε δύο ίσους κύκλους ακτίνας β, ενώ στο τρίγωνο ΑΘΕ εγγράφουμε κύκλο ακτίνας α. Να βρείτε την σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις ακτίνες α και β.



Υπολογισμοί

Επειδή οι δύο κύκλοι είναι ίσοι τα τρίγωνα ΛΗΓ και ΓΖΚ θα είναι ίσα. Συγχρόνως λόγω συμμετρίας το σημείο Γ είναι μέσο της ΗΖ και ΗΓ//ΘΕ//ΔΒ. Οπότε σχηματίζονται μια σειρά από γωνίες 45ο. Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΘΕ, ΕΚΒ,ΓΖΚ και ΛΗΓ είναι ισοσκελή.



Ισχύουν : $\Theta E = \chi\sqrt{2}$, $\Theta E = HZ = 2\psi$ άρα

$2\psi = \chi\sqrt{2} \Leftrightarrow \psi\sqrt{2} = \chi \Leftrightarrow \Gamma K = \chi$, άρα ΓΚ=ΑΕ=ΘΑ=χ (1)

Επίσης

$\Theta E = EZ \Leftrightarrow \chi\sqrt{2} = EK + \psi \Leftrightarrow \chi\sqrt{2} = (AB - \chi)\sqrt{2} + \psi \Leftrightarrow$

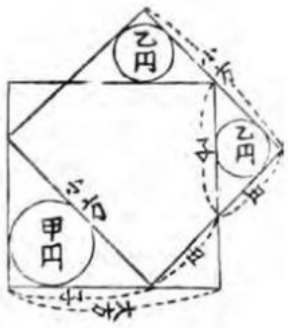
$2\psi = (AB - \chi)\sqrt{2} + \psi \Leftrightarrow \psi = (AB - \chi)\sqrt{2} \Leftrightarrow KZ = EK$

Άρα ΕΚ=ΚΖ=ΓΖ=ΗΓ=ζ/2 (2)

Στο τρίγωνο ΑΘΕ για την ακτίνα α ισχύει : $\alpha = \dfrac{2\chi - \zeta}{2}$ (3), στο τρίγωνο ΓΖΚ για την ακτίνα β ισχύει : $\beta = \dfrac{2\psi - \chi}{2} = \dfrac{\zeta - \chi}{2}$ (4),

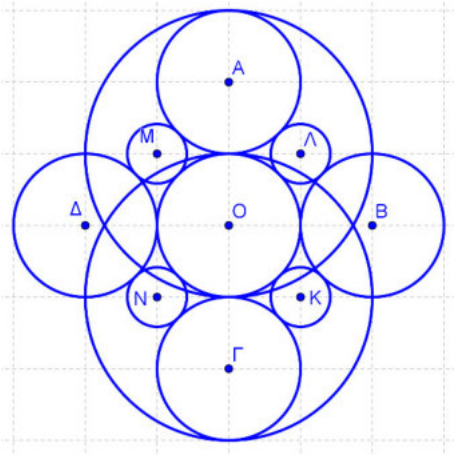
αλλά $2\chi^2 = \zeta^2 \Leftrightarrow \chi = \dfrac{\zeta\sqrt{2}}{2}$ οπότε $\alpha = \dfrac{\zeta(\sqrt{2} - 1)}{2}$ και

$$\beta = \frac{\zeta - \frac{\zeta\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\zeta(2 - \sqrt{2})}{4} = \frac{\zeta\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{4} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$



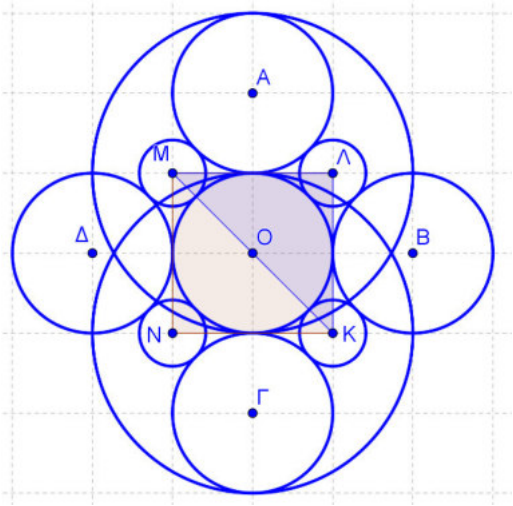
Άρα η ζητούμενη σχέση είναι : $\alpha = \beta\sqrt{2}$

Πρόβλημα 83ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται δύο κύκλοι διαμέτρου α , πέντε διαμέτρου β και τέσσερεις διαμέτρου γ. Να υπολογίσετε την διάμετρο γ συναρτήσει της διαμέτρου α.

Υπολογισμοί



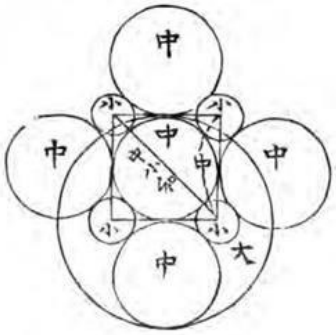
Τα σημεία Α,Λ,Β είναι συνευθειακά (γιατί;), όπως και τα Α,Δ,Μ, και Δ,Ν,Γ και Γ,Κ,Β. Στο τρίγωνο ΔΑΒ τα σημεία Μ,Λ συνδέουν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ άρα $M\Lambda = \frac{\Delta B}{2} = \alpha$ (;)

Από Π.Θ. στο ΜΛΚ έχουμε :

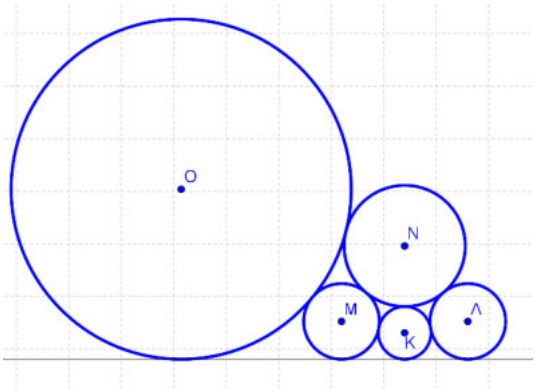
$$MK^2 = 2M\Lambda^2 \Leftrightarrow (\beta+\gamma)^2 = 2\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = 2\beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 + 2\beta\gamma - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \gamma = \beta(\sqrt{2}-1) = \frac{\alpha(\sqrt{2}-1)}{2}$$

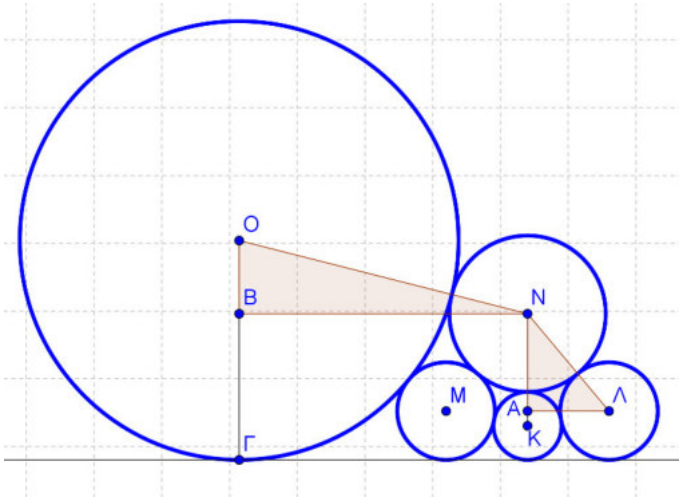


Πρόβλημα 84ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται οι ίσοι κύκλοι (Λ,γ) , (Μ,γ), ο κύκλος (Κ,α), ο κύκλος (Ν,β) και ο κύκλος (Ο,δ). Οι κύκλοι με κέντρα Ο,Μ,Κ,Λ εφάπτονται ευθείας (ε) ενώ και οι πέντε εφάπτονται μεταξύ τους όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου (Ο,δ) ως συνάρτηση των ακτίνων α και γ.

Υπολογισμοί



Κατασκευάζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΒΝ και ΑΝΛ όπως στο σχήμα.

Από Π.Θ στο ΝΑΛ έχουμε :

$$\mathrm{N\Lambda}^2 = \mathrm{NA}^2 + \mathrm{A\Lambda}^2 \Leftrightarrow$$

$$(\beta+\gamma)^2 = (\beta+2\alpha-\gamma)^2 + (2\sqrt{\alpha\gamma})^2 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{\gamma-\alpha} \quad (1)$$

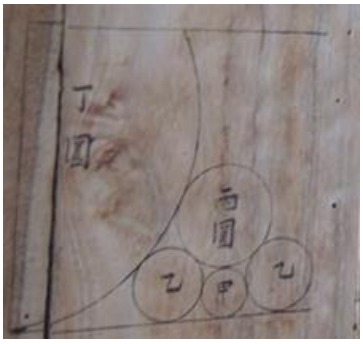
Από Π.Θ. στο ΟΒΝ έχουμε :

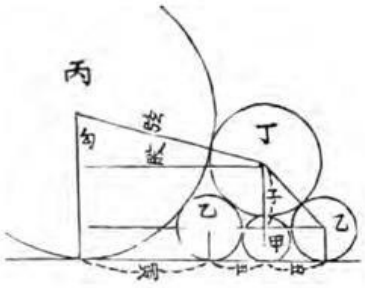
$$\mathrm{ON}^2 = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{BN}^2 \Leftrightarrow$$

$$(\delta+\beta)^2 = (\delta-\beta-2\alpha)^2 + (2\sqrt{\delta\gamma}+2\sqrt{\gamma\alpha})^2 \Leftrightarrow$$

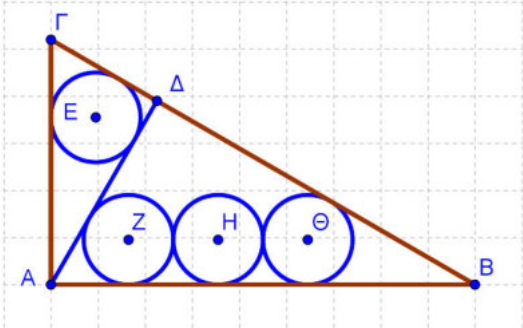
$$\ldots \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\gamma^2-2\alpha\gamma)\cdot\delta + 2\gamma\sqrt{\alpha}\cdot(\gamma-\alpha)\cdot\sqrt{\delta} + \gamma^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \sqrt{\delta} = \frac{\sqrt{\alpha}\cdot\gamma}{2\alpha-\gamma} \Leftrightarrow \delta = \frac{\alpha\cdot\gamma^2}{(2\alpha-\gamma)^2}$$





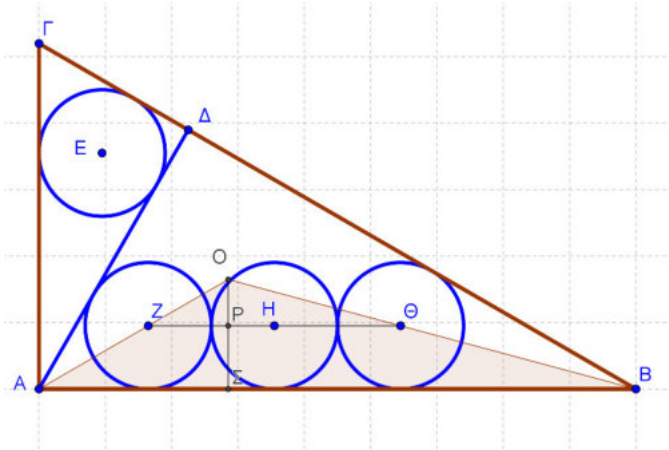
Πρόβλημα 85ο



Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε φέρει το ύψος ΑΔ και έχουμε εγγράψει τέσσερεις ίσους κύκλους όπως στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι : $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$

Απόδειξη :



Φέρνουμε τις ΑΖ και ΒΘ που τέμνονται στο Ο που είναι το έγκεντρο του ΑΔΒ.

Ονομάζουμε χ την ακτίνα των τεσσάρων ίσων κύκλων και ρ την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΒ.

Από τα όμοια τρίγωνα ΟΖΒ και ΟΑΒ έχουμε :

$$\frac{O\Rho}{O\Sigma} = \frac{Z\Theta}{AB} \Leftrightarrow \frac{\rho - \chi}{\rho} = \frac{4\chi}{\gamma} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{\chi}{\rho} = \frac{\gamma}{4\rho + \gamma}$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουμε :

$\dfrac{\chi}{\rho} = \dfrac{\beta}{\gamma}$. Άρα θα είναι $\dfrac{\gamma}{4\rho + \gamma} = \dfrac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma^2 = 4\rho\beta + \beta\gamma$ (1) .

Επειδή $\rho = \dfrac{A\Delta + \Delta B - \gamma}{2}$ η (1) γράφεται :

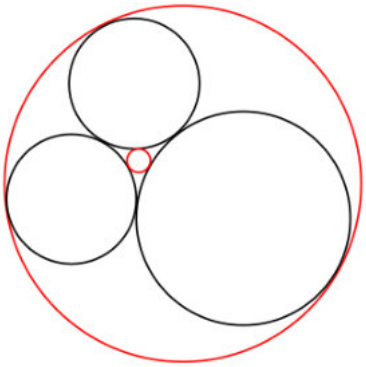
$$\gamma^2 = 2\beta(A\Delta + \Delta B - \gamma) + \beta\gamma \Leftrightarrow \gamma^2 = 2\beta A\Delta + 2\beta\Delta B - \beta\gamma \quad (2)$$

Όμως $\gamma^2 = B\Delta \cdot \alpha$ και $A\Delta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow A\Delta = \dfrac{\beta \cdot \gamma}{\alpha}$

Οπότε η (2) γράφεται :

$$\gamma^2 = \frac{2\beta^2\gamma}{\alpha} + \frac{2\beta\gamma^2}{\alpha} - \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\gamma^2 = 2\beta^2\gamma + 2\beta\gamma^2 - \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\gamma(\gamma + \beta) = 2\beta\gamma(\gamma + \beta) \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$$

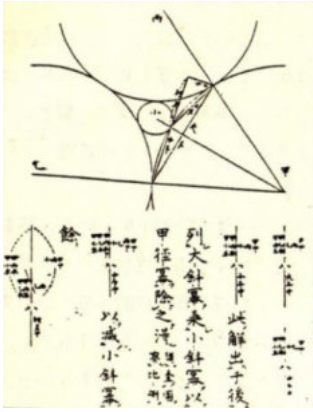
Το θεώρημα του Descartes



Οι ακτίνες τεσσάρων κύκλων που εφάπτονται μεταξύ τους όπως στο σχήμα ικανοποιούν την παρακάτω σχέση :

$$2(\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2)=(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2$$

Όπου $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4$ οι λεγόμενες καμπυλότητες των τεσσάρων κύκλων που ορίζονται ως $\kappa_i=\pm\frac{1}{\rho_i}$, με ρ_i η ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου. Το πρόσημο + ισχύει όταν ο κύκλος είναι εξωτερικά εφαπτόμενος σε σχέση με τους άλλους και το – όταν ο κύκλος είναι εσωτερικά εφαπτόμενος σε σχέση με τους άλλους. Για παράδειγμα ο μικρός κόκκινος κύκλος είναι εξωτερικά εφαπτόμενος σε σχέση με τους άλλους τρεις μαύρους κύκλους άρα έχει θετική καμπυλότητα, σε αντίθεση με τον μεγάλο κόκκινο κύκλο που έχει αρνητική.



Ο τύπος όταν λυθεί ως προς κ_4 μας δίνει την δυνατότητα να προσδιορίσουμε την ακτίνα ενός τέταρτου κύκλου που εφάπτεται τριών άλλων εφαπτόμενων κύκλων εσωτερικά ή εξωτερικά, ο τύπος είναι : $\kappa_4=\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3\pm2\sqrt{\kappa_1\kappa_2+\kappa_2\kappa_3+\kappa_3\kappa_1}$

Ο Frederick Soddy το 1936 ερεύνησε ξανά το πρόβλημα του προσδιορισμού της ακτίνας ενός κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά ή εξωτερικά άλλων τριών εφαπτόμενων κύκλων. Την μελέτη του την παρουσίασε με τη μορφή ποιήματος. Τέλος επέκτεινε το θεώρημα στις τρεις διαστάσεις για εφαπτόμενες σφαίρες.

Στην περίπτωση όπου ο ένας κύκλος εκφυλίζεται σε ευθεία, άρα μηδενική καμπυλότητα ή άπειρη ακτίνα τότε ο τύπος παίρνει την μορφή : $\kappa_4=\kappa_1+\kappa_2\pm2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}$

Ο γενικός τύπος μπορεί να πάρει και την μορφή :

$$\kappa_4=\pm\frac{1}{\rho_4}=\frac{\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1\pm2\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3(\rho_1+\rho_2+\rho_3)}}{\rho_1\rho_2\rho_3}$$

. Η πλήρης απόδειξη του θεωρήματος που βασίζεται στη εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων μπορείτε να την αναζητήσετε στην διεύθυνση :

http://foothills-ts.net/mother/DescartesCircleTheorem.htm

Το ποίημα του Soddy , το έγραψε στις 20-6-1936 παρουσιάζεται στα Αγγλικά δίπλα.

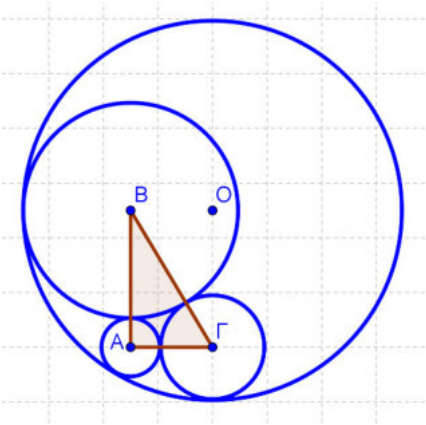
The Kiss Precise
by Frederick Soddy

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

Πρόβλημα 86ο



Οι κύκλοι (Α,α), (Β,β) και (Γ,γ) εφάπτονται ανά δύο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο. Ένας τέταρτος κύκλος (Ο,ρ) εφάπτεται των άλλων τριών όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι ισχύει : ρ=α+β+γ.

Απόδειξη

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο θα ισχύει :

$$(\beta+\gamma)^2=(\alpha+\gamma)^2+(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \beta\gamma=\alpha^2+\alpha\gamma+\alpha\beta \quad (1)$$

Ο τύπος του Descartes γράφεται : $\kappa_4=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}}{\alpha\beta\gamma}$

Ισχύει επίσης ότι :

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2=(\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta)\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2=$$
$$\beta^2\gamma^2-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2=\beta^2\gamma^2$$

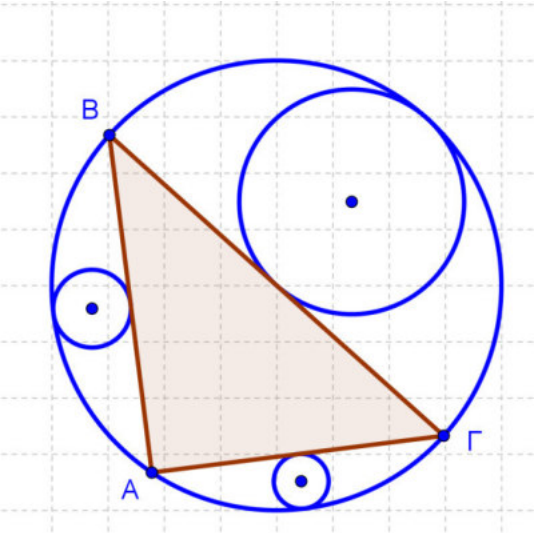
Άρα $\kappa_4=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\gamma\alpha-\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\overset{(1)}{=}\dfrac{-\alpha^2}{\alpha^3+\alpha^2\gamma+\alpha^2\beta}=-\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$

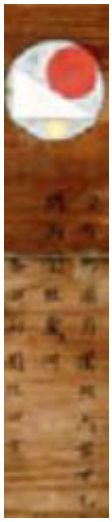
Επειδή ο μεγάλος κύκλος εφάπτεται εσωτερικά των άλλων τριών έχουμε ότι :

$$\kappa_4=-\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Leftrightarrow-\frac{1}{\rho}=-\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Leftrightarrow\rho=\alpha+\beta+\gamma$$

Πρόβλημα 87ο

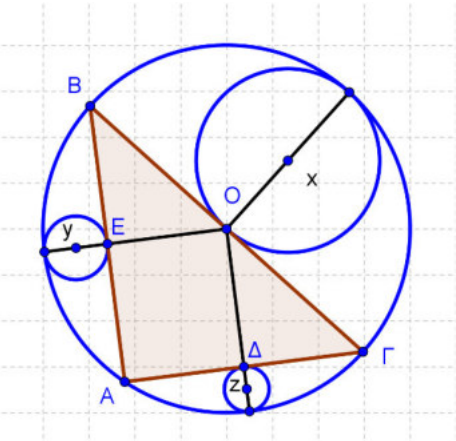
Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Εγγράφουμε τρεις κύκλους όπως στο σχήμα. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις διαμέτρους x,y,z των κύκλων αυτών.





Υπολογισμοί

Ισχύει ότι :



$$x = R = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2x \quad (1)$$

$$R - z = O\Delta \Leftrightarrow R - z = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2(R - z) = 2(x - z) \quad (2)$$

$$R - y = OE \Leftrightarrow R - y = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2(R - y) = 2(x - y) \quad (3)$$

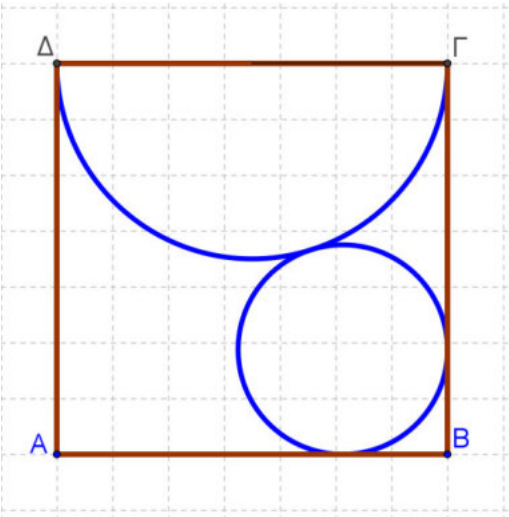
Από Π.Θ. στο ΑΒΓ έχουμε ότι :

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow$$
$$4(x - z)^2 + 4(x - y)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + z^2 - 2xz + x^2 + y^2 - 2xy = x^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y + z)$$

Πρόβλημα 88ο

Ένα απλό Sangaku !

Στο διπλανό τετράγωνο πλευράς α έχουμε εγγράψει ένα ημικύκλιο και έναν κύκλο. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου συναρτήσει της πλευράς α του τετραγώνου.



Υπολογισμοί

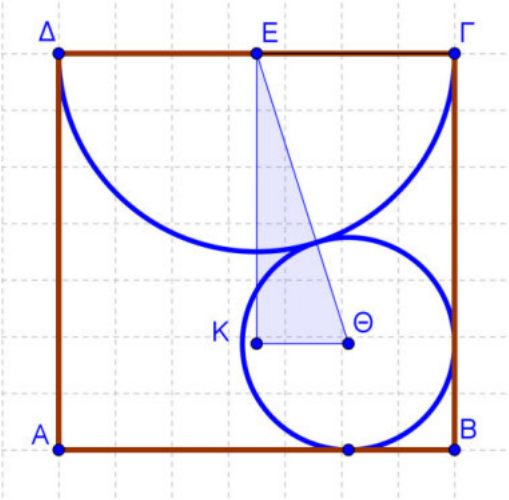
Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΘΕ έχουμε :

$$\text{ΕΘ}^2 = \text{ΕΚ}^2 + \text{ΚΘ}^2 \Leftrightarrow$$

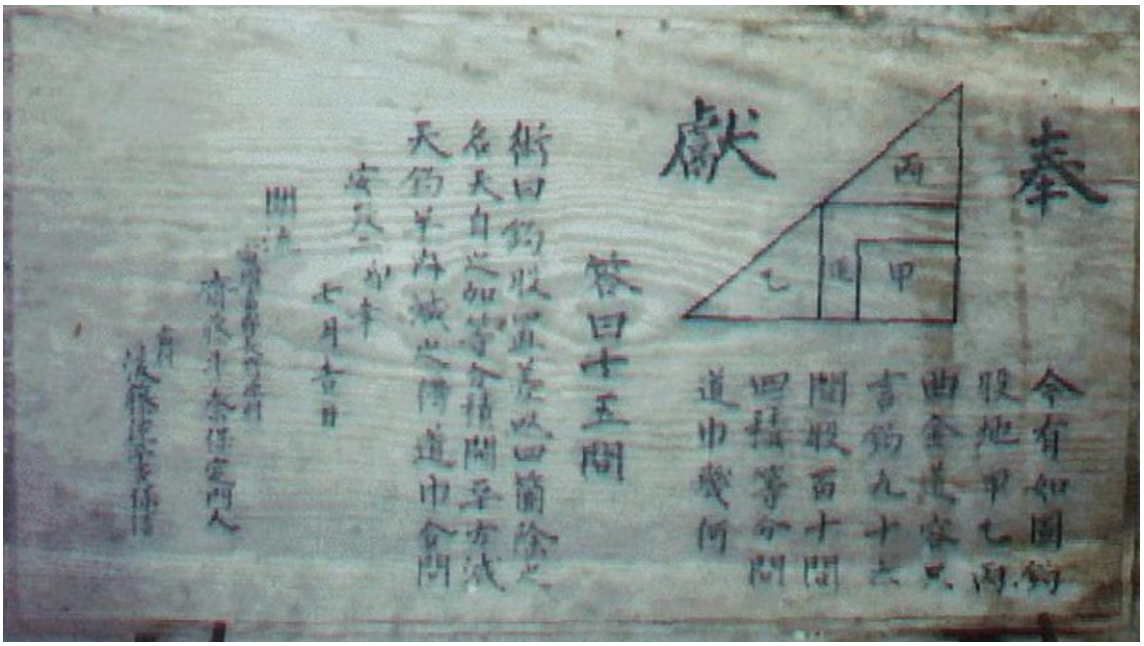
$$(\frac{\alpha}{2}+\rho)^2 = (\alpha-\rho)^2 + (\frac{\alpha}{2}-\rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \rho^2 - 4\alpha\rho + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow \rho = \alpha(2-\sqrt{3})$$

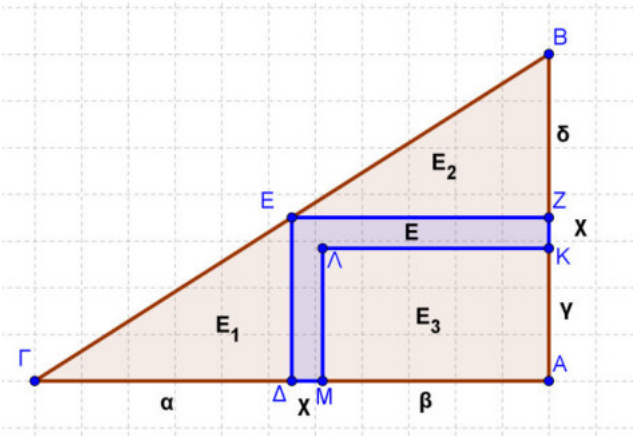


Πρόβλημα 89ο



Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 110 και 96 μέτρα. Μέσα στο οικόπεδο πρόκειται να περάσει δρόμος σχήματος L ώστε τα τρία τμήματα που αποκόπτει και το εμβαδόν του L δρόμου να είναι ίσα. Να βρείτε το πλάτος χ του δρόμου.

Υπολογισμοί



Από τα δεδομένα της άσκησης ισχύει ότι :

$$E_1 = E_2 = \frac{E + E_3}{2} = \frac{(EZA\Delta)}{2} \quad (1)$$

Οπότε θα έχουμε :

$$\frac{\alpha \cdot (\gamma + \chi)}{2} = \frac{(\beta + \chi) \cdot (\gamma + \chi)}{2}$$, άρα

α=β+χ οπότε το Δ είναι μέσο της ΑΓ όμοια θα έχουμε και ότι Ζ μέσο ΑΒ.

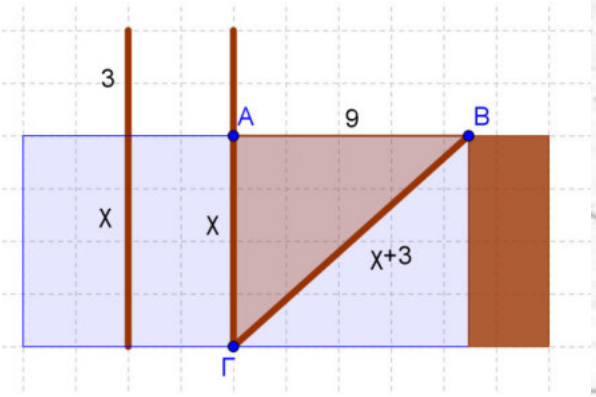
Επειδή $E = E_3 = \frac{(EZA\Delta}{2}$ καταλήγουμε στην εξίσωση :

$55\chi + 48\chi - \chi^2 = \frac{55 \cdot 48}{2} \Leftrightarrow \chi^2 - 103\chi + 1320 = 0$, από όπου έχουμε ότι χ=15 ή χ=88 , δεκτή προφανώς η λύση χ=15.

Πρόβλημα 90ο

Δύο καλάμια ίσου ύψους, προεξέχουν 3 μονάδες πάνω από την επιφάνεια μιας λίμνης. Εάν τραβήξουμε την κορυφή ενός καλαμιού 9 μονάδες στην κατεύθυνση της ακτής έτσι ώστε η κορυφή να αγγίζει μόνο την επιφάνεια του νερού, να βρει το βάθος της λίμνης.

Υπολογισμοί

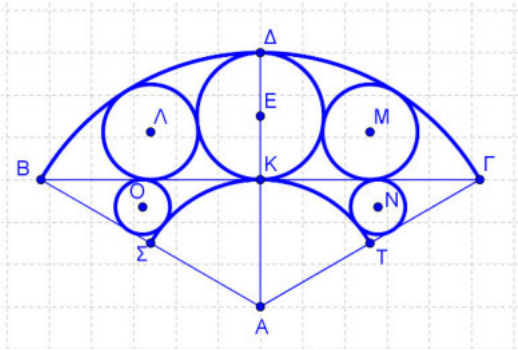


Έστω χ το βάθος της λίμνης , τότε από το κείμενο της άσκησης καταλήγουμε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου από Π.Θ. έχουμε :

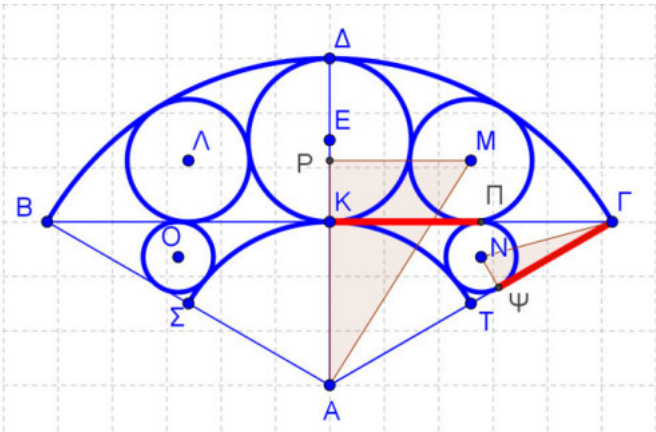
$(\chi+3)^2=\chi^2+9^2 \Leftrightarrow \chi^2+6\chi+9=\chi^2+81 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi=12$ μονάδες.

Πρόβλημα 91ο

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται κυκλικός τομέας γωνίας 120ο . Μέσα σε αυτόν έχουμε εγγράψει πέντε κύκλους (όπως στο σχήμα). Να υπολογίσετε τις ακτίνες των κύκλων συναρτήσει της ακτίνας ρ του κυκλικού τομέα.



Υπολογισμοί



Επειδή ο κυκλικός τομέας είναι 120ο έχουμε ότι : $\text{ΒΓ} = \rho\sqrt{3}$, $\text{ΑΚ} = \frac{\rho}{2}$ (;)

Άρα $\text{ΕΚ} = \frac{\rho}{4}$ και αν ονομάσουμε την ακτίνα του κύκλου με κέντρο Μ β θα ισχύει $\text{ΡΜ} = 2\sqrt{\frac{\rho}{4}\beta} = \sqrt{\rho\beta}$ (;)

Από Π.Θ. στο ΡΜΑ έχουμε :

$$\text{ΑΜ}^2 = \text{ΜΡ}^2 + \text{ΡΑ}^2 \Leftrightarrow (\rho-\beta)^2 = \beta\rho + (\frac{\rho}{2}+\beta)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \beta = \frac{3\rho}{16}$$

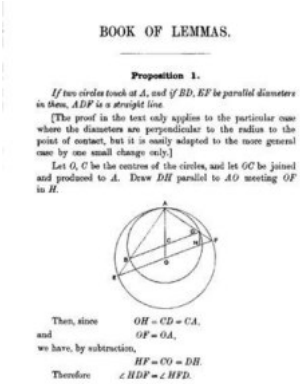
Στο τρίγωνο ΑΚΓ η γωνία Γ είναι 30ο (;) και αν ονομάσουμε γ την ακτίνα του κύκλου με κέντρο Ν τότε ισχύει ότι : $\text{ΚΠ} = 2\sqrt{\frac{\rho}{2}\gamma} = \sqrt{2\rho\gamma}$, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $\varepsilon\varphi 15^o = 2-\sqrt{3}$ και στο τρίγωνο ΓΝΨ θα είναι $\varepsilon\varphi 15^o = \frac{\gamma}{\text{ΨΓ}} \Leftrightarrow \text{ΨΓ} = \frac{\gamma}{2-\sqrt{3}}$.

Όμως :

$$\text{ΚΠ} + \text{ΨΓ} = \text{ΚΓ} \Leftrightarrow \sqrt{2\rho\gamma} + \frac{\gamma}{2-\sqrt{3}} = \frac{\rho\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\gamma} = \frac{\sqrt{2\rho}\cdot\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}{2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{3\rho\cdot(7-4\sqrt{3})}{2}$$

Και ξαφνικά μπροστά μας εμφανίζεται ο Αρχιμήδης …


BOOK OF LEMMAS.

Proposition 1.

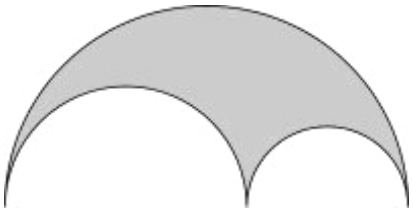
If two circles touch at A, and if BD, EF be parallel diameters in them, ADF is a straight line.

[The proof in the text only applies to the particular case where the diameters are perpendicular to the radius to the point of contact, but it is easily adapted to the more general case by one small change only.]

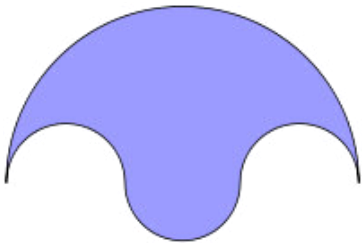
Let O, C be the centres of the circles, and let OC be joined and produced to A. Draw DH parallel to AO meeting OF in H.

Then, since $OH = CD = CA$,
and $OF = OA$,
we have, by subtraction,
$HF = CO = DH$.
Therefore $\angle HDF = \angle HFD$.

Προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι η ενασχόληση με γεωμετρικά προβλήματα sangaku συναντώ μπροστά μου την αρχαία ελληνική γεωμετρία και μάλιστα βιβλία που στα Ελληνικά είναι δύσκολο να βρεθούν. Συναντάμε λοιπόν το βιβλίο των λημμάτων του Αρχιμήδη, περίεργα σχήματα όπως η **άρβηλος** και το **σάλινον** του Αρχιμήδη, την αλυσίδα του Πάππου, την αλυσίδα του Steiner, αλλά και έννοιες όπως αντιστροφή και ομοιοθεσία…



Το βιβλίο των Λημμάτων είναι ένα βιβλίο που αποδίδεται στον Αρχιμήδη από τον Άραβα **Thābit ibn Qurra.** Αποτελείται από δεκαπέντε προτάσεις. Το 1661, το αραβικό χειρόγραφο μεταφράστηκε στα Λατινικά από τον Abraham Ecchellensis και επιμελήθηκε ο Giovanni A. Borelli. Η λατινική έκδοση δημοσιεύθηκε με το όνομα Liber Assumptorum.

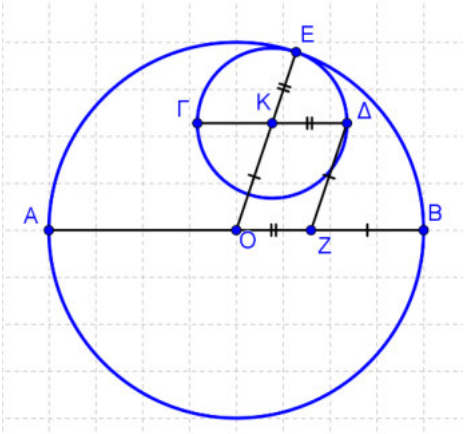


Το πιο πιθανό το βιβλίο των λημμάτων είναι απλώς μία συλλογή προτάσεων που αποδίδονται στο Αρχιμήδη από κάποιον Έλληνα μαθηματικό των ύστερων Αλεξανδρινών χρόνων.
Το βιβλίο εισάγει αρκετές νέες γεωμετρικές μορφές, όπως την άρβηλο και το σαλινόν.

Οι δεκαπέντε προτάσεις που περιέχει είναι οι ακόλουθες (θα αποδείξουμε μόνο όσες μας ενδιαφέρουν για την ενασχόλησή μας με τα sangaku) :

Πρόβλημα 92ο

Πρόταση 1η



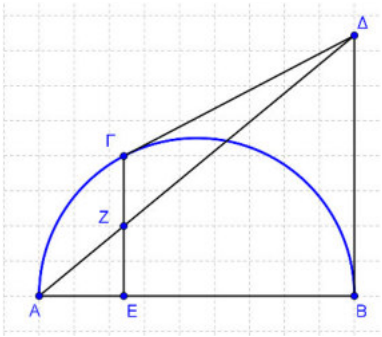
Έστω οι κύκλοι (Ο,R) και (Κ,ρ) που εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΑΒ και ΓΔ δύο παράλληλες διάμετροι των δύο κύκλων τότε τα σημεία Α,Γ,Ε και Β,Δ,Ε είναι συνευθειακά.

Απόδειξη

Έστω ΔΖ//ΟΕ. Από το παραλληλόγραμμο ΚΔΟΖ έχουμε ότι ΚΔ=ΟΖ και ΚΟ=ΔΖ. Επειδή ΚΕ=ΚΔ και ΟΕ=ΟΒ έχουμε τελικά ότι ΖΒ=ΔΖ=ΚΟ. Τώρα πιστεύω ότι είναι εύκολο να δείξουμε ότι Ε,Δ,Β συνευθειακά.

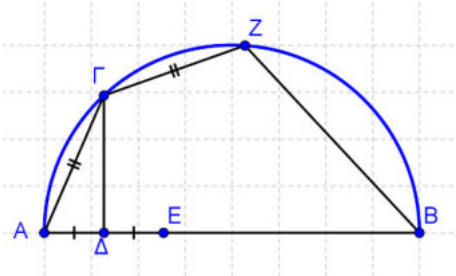
Πρόταση 2η

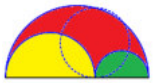
Έστω ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, η εφαπτομένη του στο Β και η εφαπτομένη του σε ένα άλλο τυχαίο σημείο Γ που τέμνονται στο Δ. Αν ΓΕ κάθετη στην ΑΒ και Ζ το σημείο τομής των ΑΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΓΖ=ΖΕ.



Πρόταση 3η

Έστω ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και Γ ένα τυχαίο σημείο του. Θεωρούμε Δ την προβολή του Γ στην ΑΒ και Ε σημείο της ΑΒ ώστε ΑΔ=ΔΕ. Αν Ζ σημείο του ημικυκλίου ώστε ΑΓ=ΓΖ, να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΒΕ.



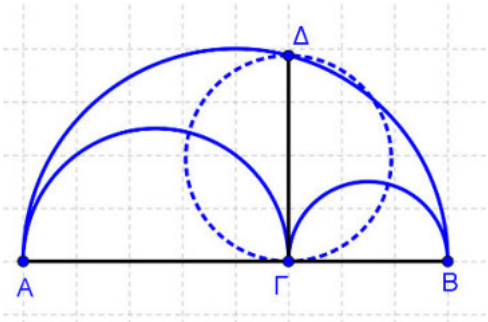


Πρόβλημα 93ο

Πρόταση 4η

Η **άρβηλος** (το μαχαίρι του υποδηματοποιού)

Έστω ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και Γ τυχαίο σημείο της ΑΒ. Γράφουμε ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, (όπως στο σχήμα). Αν η κοινή εφαπτομένη των δύο ημικυκλίων στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν που περιέχεται μεταξύ των τριών ημικυκλιών (άρβηλος) είναι ίσο με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου διαμέτρου ΓΔ.



Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{\pi(\frac{AB}{2})^2}{2}-\frac{\pi(\frac{A\Gamma}{2})^2}{2}-\frac{\pi(\frac{\Gamma B}{2})^2}{2}=\pi(\frac{\Delta\Gamma}{2})^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow AB^2-A\Gamma^2-\Gamma B^2=2\Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

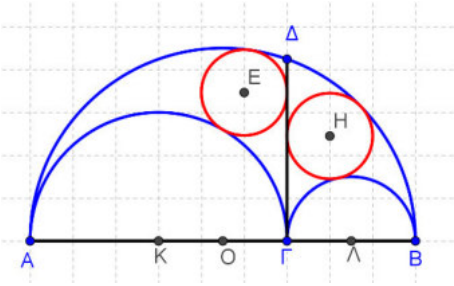
$$AB^2=A\Gamma^2+\Delta\Gamma^2+\Gamma B^2+\Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow AB^2=A\Delta^2+\Delta B^2$$

Που ισχύει από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ.

Πρόβλημα 94ο

Πρόταση 5η

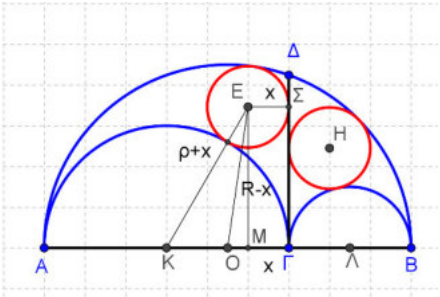
Θεωρούμε τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ,ΑΓ και ΓΒ και την εφαπτομένη ΔΓ (όπως στο σχήμα) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που εφάπτεται του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΓ και της ΔΓ είναι ίσος με τον κύκλο που εφάπτεται του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, του ημικυκλίου διαμέτρου ΓΒ και της ΔΓ.



Απόδειξη

Έστω R,ρ οι ακτίνες των ημικυκλίων διαμέτρων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και x η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται των δύο ημικυκλίων και της ΓΔ.

Έστω Μ και Σ οι προβολές του Ε στην ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα.



Από Π.Θ. στο ΕΜΚ έχουμε : $EM^2 = EK^2 - KM^2 = (\rho+\chi)^2 - (\rho-\chi)^2 = 4\rho\chi$ (1)

Από Π.Θ. στο ΕΟΜ έχουμε :

$EM^2 = OE^2 - OM^2 = (R-\chi)^2 - (2\rho - R - \chi)^2 = \ldots = 4\rho R - 4R\chi - 4\rho^2$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε τελικά ότι : $\chi = \dfrac{\rho(R-\rho)}{R}$.

Αν δουλέψουμε όμοια στον άλλο κύκλο θα καταλήξουμε ότι για την ακτίνα του ψ και την ακτίνα r του ημικυκλίου διαμέτρου ΓΔ ισχύει : $\psi = \dfrac{r(R-r)}{R}$

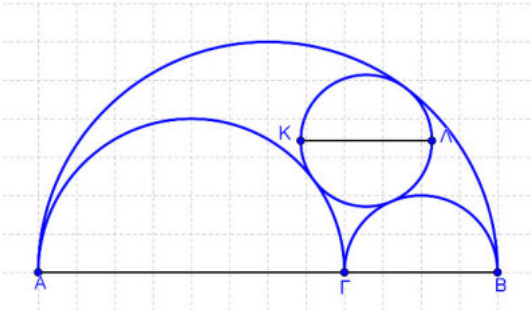
Όμως ισχύει ότι $R = r + \rho$ (3) , οπότε :

$\chi = \dfrac{\rho(R-\rho)}{R} \overset{(3)}{=} \dfrac{(R-r)\cdot(R-R+r)}{R} = \dfrac{(R-r)r}{R} = \psi$, άρα οι δύο κύκλοι είναι ίσοι.

Πρόβλημα 95ο

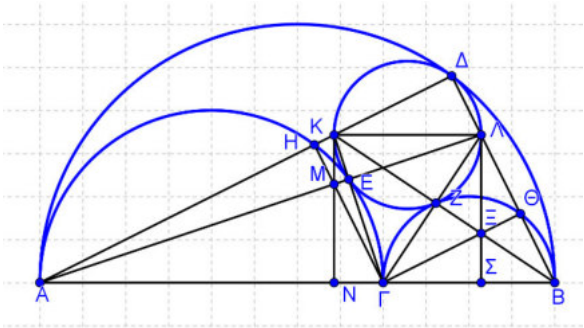
Πρόταση 6η

Δίνονται τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ και ΓΒ. Γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΚΛ με (ΚΛ//ΑΒ) που εφάπτεται και των τριών ημικυκλίων, όπως στο σχήμα. Αν λ=ΑΓ/ΓΒ, να βρείτε την διάμετρο ΚΛ συναρτήσει του λ και του ΑΒ.



Υπολογισμοί

Ονομάζουμε Δ,Ε,Ζ τα σημεία επαφής των τριών ημικυκλίων. Ονομάζουμε Η το σημείο τομής της ΑΔ και του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΓ, με παρόμοιο τρόπο ορίζονται και το σημείο Θ. Από την 1η πρόταση έχουμε ότι τα σημεία Α,Κ,Δ και Α,Ε,Λ και Γ,Ε,Κ και Γ,Ζ,Λ και Β,Λ,Δ και Β,Ζ,Κ και Γ,Ζ,Λ και Γ,Ε,Κ είναι συνευθειακά.



Αν ΚΝ κάθετη στην ΑΓ και ΛΣ κάθετη στην ΓΒ, τότε στα τρίγωνα ΚΑΓ και ΛΓΒ έχουμε φέρει τα τρία ύψη και ονομάζουμε Μ και Ξ τα ορθόκεντρά τους.

Ισχύουν οι αναλογίες : $\lambda = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΜΛ}} = \frac{\text{ΑΝ}}{\text{ΝΣ}}$ (1), όμοια $\frac{1}{\lambda} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΒΞ}}{\text{ΞΚ}} = \frac{\text{ΒΣ}}{\text{ΣΝ}}$ (2)

Άρα $\frac{\text{ΑΝ}}{\text{ΝΣ}} = \frac{\text{ΣΝ}}{\text{ΒΣ}} = \lambda$, οπότε ΑΝ=λΝΣ και ΝΣ=λΒΣ

Ισχύει : $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΝΣ}}{\text{ΑΝ}+\text{ΝΣ}+\text{ΣΒ}} = \frac{\text{ΝΣ}}{\lambda\text{ΝΣ}+\text{ΝΣ}+\frac{1}{\lambda}\text{ΝΣ}} = \frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}$, άρα

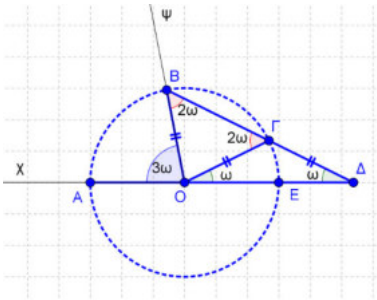
$$\text{ΚΛ} = \frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}\cdot\text{ΑΒ}$$

Πρόταση 7η

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ γράφουμε τον εγγεγραμμένο και τον περιγεγραμμένο κύκλο του. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου είναι διπλάσιο του εγγεγραμμένου.

Πρόταση 8η (Η τριχοτόμηση της γωνίας με την μέθοδο της νεύσης)

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τυχαία χορδή του ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΓΔ=ρ. Αν η ΔΟ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ε και Α, να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα : $AB = 3ΓE$



Πρόταση 9η

Δίνονται δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) που τέμνονται σε σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι : $AΔ + ΓB = AΓ + ΔB$

Πρόταση 10η

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Σ εκτός αυτού. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΣΑ και ΣΒ και θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του μη κυρτού τόξου ΑΒ. Από το Β φέρνουμε παράλληλη προς την ΣΓ που τέμνει τον κύκλο στο Δ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των ΑΔ και ΣΓ. Να αποδείξετε ότι η προβολή του Ε στην ΒΔ διχοτομεί το ΒΔ.

Πρόταση 11η

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και δύο κάθετες μεταξύ τους χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι : $AK^2 + BK^2 + ΓK^2 + ΔK^2 = 4ρ^2$

Πρόταση 12η

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Από τυχαίο σημείο Σ εκτός του ημικυκλίου φέρνουμε ΣΓ και ΣΔ τα εφαπτόμενα τμήματα. Ονομάζουμε Τ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΣΤ είναι κάθετη της ΑΒ.

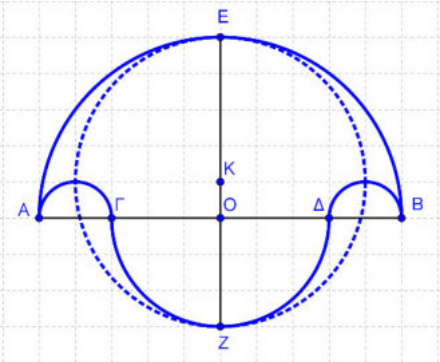
Πρόταση 13η

Δίνεται κύκλος και η διάμετρός του ΑΒ. Μία τυχαία χορδή ΓΔ του (Ο,ρ) τέμνει το ΑΒ στο Ε. Ονομάζουμε Μ και Ν τις προβολές των Α και Β στην ΓΔ. Να αποδείξετε ότι ΓΜ=ΔΝ.

Πρόβλημα 96ο

Πρόταση 14η

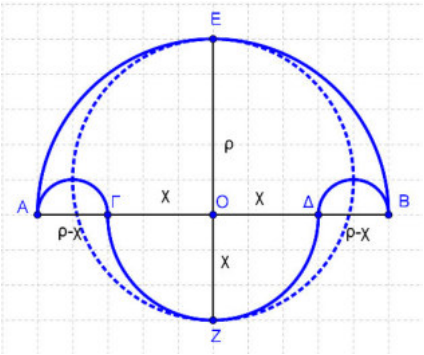
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και ονομάζουμε Ο το μέσο του ΑΒ. Θεωρούμε σημείο Γ και Δ συμμετρικά ως προς το Ο και τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ, όπως στο σχήμα. Ονομάζουμε Ε και Ζ τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του ΑΒ με τα σχηματιζόμενα ημικύκλια. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του του σχηματιζόμενου σάλινου είναι ίσο με το εμβαδόν κυκλικού δίσκου διαμέτρου ΕΖ.



Απόδειξη

Ονομάζουμε ΟΕ=ρ και ΟΓ=χ οπότε ΟΖ=ΟΔ=χ και ΑΓ=ΔΒ=ρ-χ. Θα δείξουμε ότι :

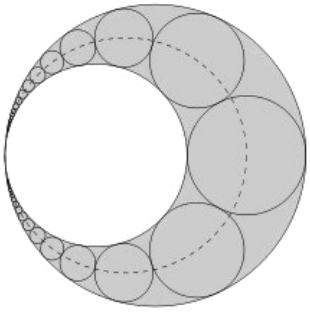
$$\frac{\pi\rho^2}{2} - 2\frac{\pi(\frac{\rho-\chi}{2})^2}{2} + \frac{\pi\chi^2}{2} = \pi(\frac{\rho+\chi}{2})^2$$ που είναι εύκολο να το δείξουμε μετά από απλές πράξεις …



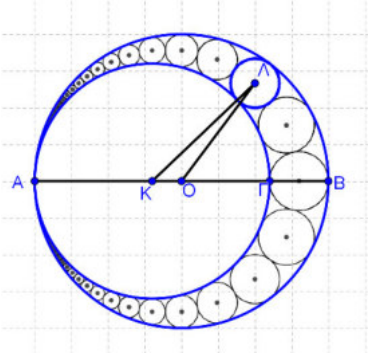
Πρόταση 15η

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και σημείο Γ ώστε η ΑΓ να είναι πλευρά κανονικού πενταγώνου. Θεωρούμε Δ το μέσο του τόξου ΑΓ και ονομάζουμε Ε το σημείο τομής της ΔΓ και της προέκτασης της ΑΒ, όπως και Ζ το σημείο τομής της ΑΓ με την ΔΒ. Αν Μ η προβολή του Ζ στην ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΜ είναι ίσο με την ακτίνα ρ του ημικυκλίου.

Η αλυσίδα του Πάππου του Αλεξανδρινού.



Στη γεωμετρία, η αλυσίδα του Πάππου είναι ένας δακτύλιος κύκλων μεταξύ δύο εφαπτόμενων κύκλων που ερευνήθηκε από τον Αλεξανδρινό μαθηματικό τον 3ο αιώνα μ.Χ.
Οι κύκλοι που βρίσκονται στην σκιασμένη επιφάνεια εφάπτονται μεταξύ τους αλλά συγχρόνως εφάπτονται εξωτερικά του ενός κύκλου και εσωτερικά του άλλου.

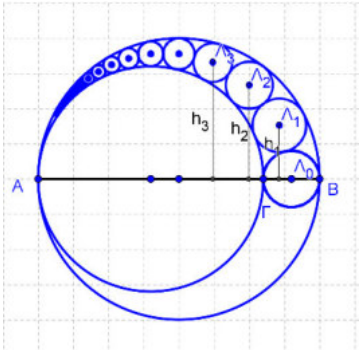


Οπότε αν ο κύκλος (O,R) είναι ο μεγαλύτερος κύκλος και (K,ρ) ο μικρότερος – που βρίσκεται εσωτερικά του πρώτου τότε για τον τυχαίο κύκλο της αλυσίδας (Λ,χ) θα ισχύει :

$$K\Lambda + \Lambda O = (\rho + \chi) + (R - \chi) = \rho + R$$

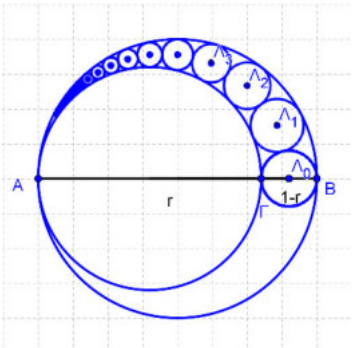
Οπότε όλα τα **κέντρα των κύκλων της αλυσίδας ανήκουν σε έλλειψη** με εστίες τα σημεία K και O και σταθερά 2α=ρ+R.
Και εστιακή απόσταση 2γ=KO=R-ρ.

Στο 4ο βιβλίο της «**Συναγωγής**» του Πάππου , παρουσιάζεται το λεγόμενο «**αρχαίο θεώρημα**» που είναι γνωστό στην σύγχρονη βιβλιογραφία ως αλυσίδα του Πάππου. Στο θεώρημα αυτό αποδεικνύεται ότι « **η απόσταση h_ν του κέντρου του νιοστού κύκλου της αλυσίδας από την AB είναι ίση με ν φορές την διάμετρο του κύκλου**».
Αυτό σημαίνει ότι :
Για τον πρώτο κύκλο ισχύει ότι : $h_1 = 1 \cdot 2r_1$
για τον δεύτερο κύκλο ισχύει ότι : $h_2 = 2 \cdot 2r_2$
για τον τρίτο κύκλο ισχύει ότι : $h_3 = 3 \cdot 2r_3$ κ.ο.κ.



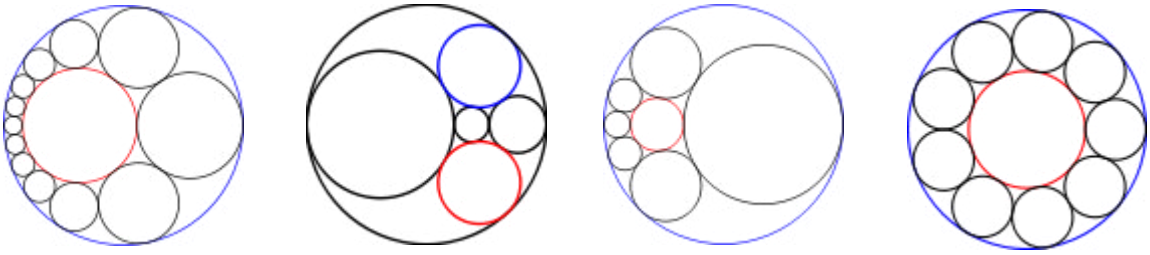
Συγχρόνως με τη βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας είμαστε σε θέση να καταλήξουμε σε αναδρομικούς τύπους που μας δίνουν τις συντεταγμένες των κέντρων της αλυσίδας, όπως και της ακτίνας τους.
Συγκεκριμένα αν ονομάσουμε ΑΓ=r και ΓΒ=1-r, ισχύουν οι τύποι :

$$x_n = \frac{r \cdot (1+r)}{2 \cdot [n^2 \cdot (1-r) + r]}, \quad y_n = \frac{n \cdot r \cdot (1-r)}{n^2 \cdot (1-r)^2 + r}, \quad r_n = \frac{(1-r) \cdot r}{2[n^2 \cdot (1-r)^2 + r]}$$

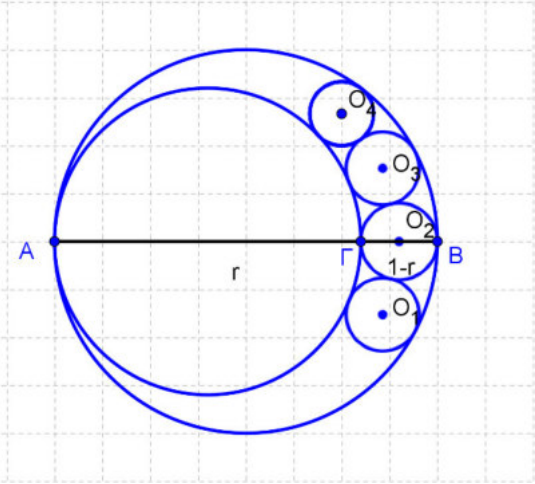


Η αλυσίδα του Steiner

Κατά παρόμοιο τρόπο ο Ελβετός μαθηματικός Steiner δημιούργησε ένα σύνολο από n κύκλους, οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι σε δύο δεδομένους μη τεμνόμενους κύκλους (ο κόκκινος και ο μπλε κύκλος στα διπλανά σχήματα). Ο αριθμός n είναι πεπερασμένος και ο κάθε κύκλος στην αλυσίδα είναι εφαπτόμενος με τον προηγούμενο και τον επόμενο κύκλο της ακολουθίας των κύκλων της αλυσίδας. Στις συνηθισμένες **κλειστές** αλυσίδες Steiner, ο πρώτος και ο τελευταίος κύκλος είναι επίσης εφαπτόμενοι μεταξύ τους. Αντίθετα, στις **ανοικτές** αλυσίδες Steiner, δεν χρειάζεται να είναι. Οι δεδομένοι αρχικοί κύκλοι δεν τέμνονται, αλλά μπορεί ο μικρότερος κύκλος να βρίσκεται μέσα ή έξω από τον μεγαλύτερο κύκλο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα κέντρα των κύκλων αλυσίδας Steiner βρίσκονται σε έλλειψη ή υπερβολή, αντίστοιχα.



Πρόβλημα 97ο



Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται τέσσερεις κύκλοι μιας αλυσίδας με ακτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 . Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα :

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{3}{\rho_3}=\frac{3}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}$$

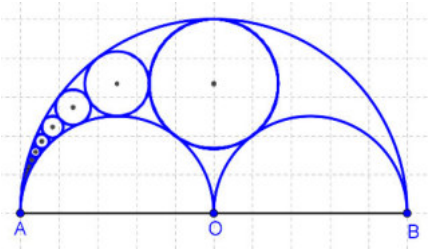
Απόδειξη

Εφαρμόζουμε τον αναδρομικό τύπο που δίνει την ακτίνα του νιοστού κύκλου της αλυσίδας του Πάππου και έχουμε :

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{3}{\rho_3}=\frac{2[(1-r)^2+r]}{(1-r)\cdot r}+3\cdot\frac{2[(1-r)^2+r]}{(1-r)\cdot r}=8\frac{(1-r)^2+r^2}{(1-r)\cdot r}$$ και

$$\frac{3}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}=\frac{6r}{(1-r)\cdot r}+\frac{2[4(1-r)^2+r]}{(1-r)\cdot r}=8\frac{(1-r)^2+r}{(1-r)\cdot r}$$

Πρόβλημα 98ο



Αν ΟΑ=ρ να βρεθεί η ακτίνα του νιοστού κύκλου της αλυσίδας.

Υπολογισμοί

Στον τύπο $r_n = \dfrac{(1-r)\cdot r}{2[n^2\cdot(1-r)^2+r]}$ για $r = 1-r \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}$

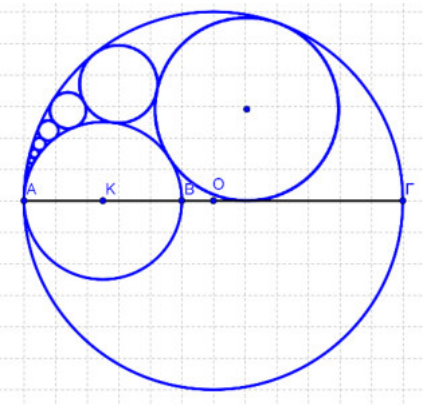
καταλήγουμε στην σχέση : $\rho_\nu = \dfrac{1}{2\cdot(\nu^2+2)}$ ή γενικότερα $\rho_\nu = \dfrac{r}{(\nu^2+2)}$

Ο τύπος της ακτίνας του τυχαίου κύκλου της αλυσίδας του Πάππου μπορεί να πάρει και την ισοδύναμη μορφή : $\rho_\nu = \dfrac{r\cdot k}{k^2\cdot\nu^2+k+1}$, όπου r η ακτίνα του βασικού ημικυκλίου και k=ΓΒ /ΑΓ – όπου ΓΒ, ΑΓ οι διάμετροι των δύο μικρότερων ημικυκλίων που γράφουμε για να σχηματίσουμε την άρβηλο. Οπότε στην περίπτωση μας για k=1 έχουμε ότι $\rho_\nu = \dfrac{r}{(\nu^2+2)}$.

Αν ονομάσουμε t=ΑΓ/ΓΒ ο τύπος παίρνει την μορφή : $\rho_\nu = \dfrac{r\cdot t}{t^2+t+\nu^2}$

Τύπος που έρχεται σε συμφωνία με τον αντίστοιχο τύπο του 6ου λήμματος του Αρχιμήδη.

Πρόβλημα 99ο



Στην διπλανή αλυσίδα να αποδείξετε ότι μεταξύ των ακτίνων του 1ου – 4ου και 7ου κύκλου ισχύει η σχέση : $\frac{7}{r_4}=\frac{2}{r_7}+\frac{5}{r_1}$.

Δίνεται ότι ΑΟ=2r και ΑΓ=2s

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε τον τύπο της αλυσίδας του Αρχιμήδη για r=s και για n τα κλάσματα 1/2, 3/2, 5/2, …, συγχρόνως οι όροι της ακολουθίας που προκύπτει με τον τρόπο αυτόν να αποδίδουν τις ακτίνες ρ_0, ρ_1, ρ_2, …

Συγκεκριμένα έχουμε :

$$\rho_0=r_{1/2}=\frac{t\cdot s}{\frac{1}{4}+t+t^2}=\frac{4ts}{1+4t+4t^2}$$

$$\rho_1=r_{3/2}=\frac{t\cdot s}{\frac{9}{4}+t+t^2}=\frac{4ts}{9+4t+4t^2}$$

$$\rho_2=r_{5/2}=\frac{t\cdot s}{\frac{25}{4}+t+t^2}=\frac{4ts}{25+4t+4t^2}$$

Γενικά έχουμε : $\rho_n=\ldots=\frac{4ts}{(2n-1)^2+4t+4t^2}$

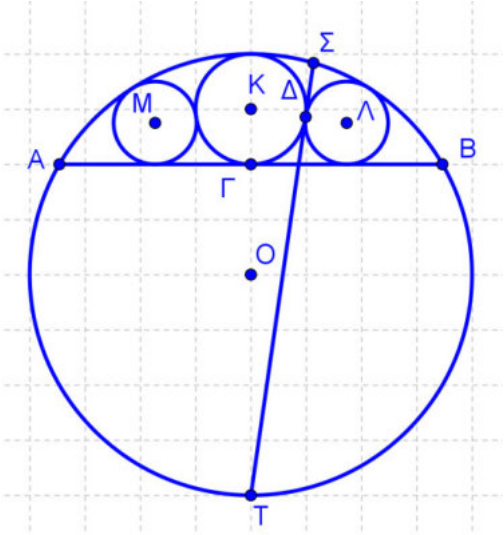
Οπότε για την άσκησή μας έχουμε :

$$\frac{2}{\rho_7}+\frac{5}{\rho_1}=2\cdot\frac{13^2+4t+4t^2}{4ts}+5\cdot\frac{1+4t+4t^2}{4ts} \quad (1)$$

$$\frac{7}{\rho_4}=7\cdot\frac{7^2+4t+4t^2}{4ts} \quad (2)$$

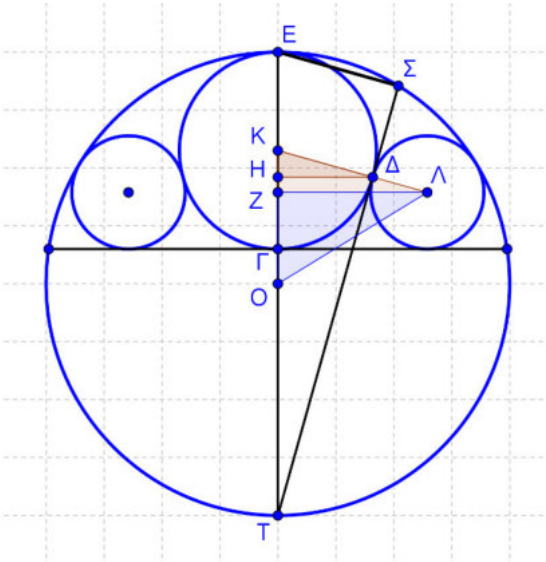
Αρκεί να δείξουμε ότι $2\cdot 13^2+5=7^3$ που ισχύει .

Πρόβλημα 100ο



Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τυχαία χορδή του ΑΒ για την οποία υποθέτουμε ότι το απόστημα της ΟΓ είναι γνωστό και ίσο με χ. Γράφουμε τους κύκλους (Κ,ρ_1),(Λ,ρ_2) και (Μ,ρ_2), όπως στο σχήμα Αν η κοινή εφαπτομένη των κύκλων (Κ,ρ_1) και (Λ,ρ_2) τέμνει τον (Ο,R) στα σημεία Σ και Τ, να αποδείξετε ότι το Τ είναι μέσο του τόξου ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος του ΣΤ συναρτήσει της ακτίνας R.

Απόδειξη – Υπολογισμοί



Ονομάζουμε ΟΓ=χ, ΟΕ=R, ΚΕ=ρ_1, ΛΔ=ρ_2

Από Π.Θ. στο ΖΟΛ έχουμε :

$$O\Lambda^2 = Z\Lambda^2 + OZ^2 \Leftrightarrow$$

$$(R-\rho_2)^2 = (2\sqrt{\rho_1\rho_2})^2 + (x+\rho_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \overset{\rho_1=\frac{R-x}{2}}{\Leftrightarrow} \rho_2 = \frac{R^2-x^2}{4R}$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΚΗΔ και ΚΖΛ έχουμε :

$$\frac{KH}{KZ} = \frac{H\Delta}{Z\Lambda} = \frac{K\Delta}{K\Lambda} \Leftrightarrow$$

$$\frac{KH}{\rho_1-\rho_2} = \frac{H\Delta}{2\sqrt{\rho_1\rho_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}$$

Από όπου έχουμε : $KH = \frac{\rho_1(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1+\rho_2}$ (1) , $H\Delta = \frac{2\rho_1\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1+\rho_2}$ (2)

Αν Τ το μέσο του τόξου ΑΒ τότε από Π.Θ. στο ΗΔΤ ισχύει $\Delta T^2 = H\Delta^2 + HT^2$ (3)

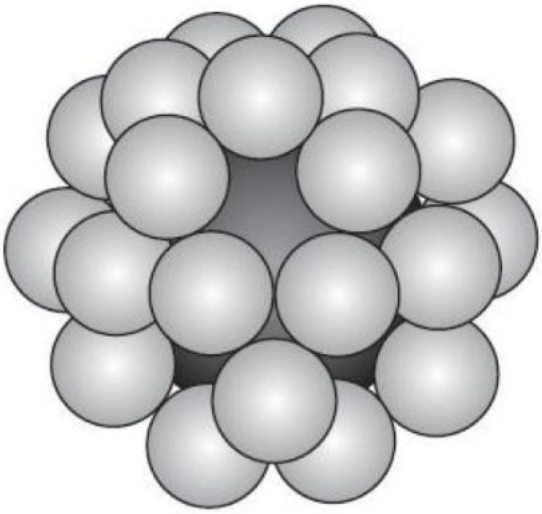
Για να δείξω ότι η κοινή εφαπτομένη των κύκλων (Κ,ρ_1) και (Λ,ρ_2) διέρχεται από το Τ αρκεί να δείξω ότι το τρίγωνο ΚΔΤ είναι ορθογώνιο δηλαδή αρκεί να ισχύει : $KT^2 = K\Delta^2 + \Delta T^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Delta T^2 = 4R(R-\rho_1)$, που ισχύει μετά από πράξεις από τις σχέσεις (1),(2) και (3).

Για το μήκος ΣΤ , από τα όμοια τρίγωνα ΕΣΤ και ΚΔΤ έχουμε :

$$\frac{\Sigma T}{\Delta T} = \frac{ET}{KT} \Leftrightarrow \frac{\Sigma T}{2\sqrt{R(R-x)}} = \frac{2R}{2R-\rho_1} \Leftrightarrow \ldots$$

Πρόβλημα 101ο

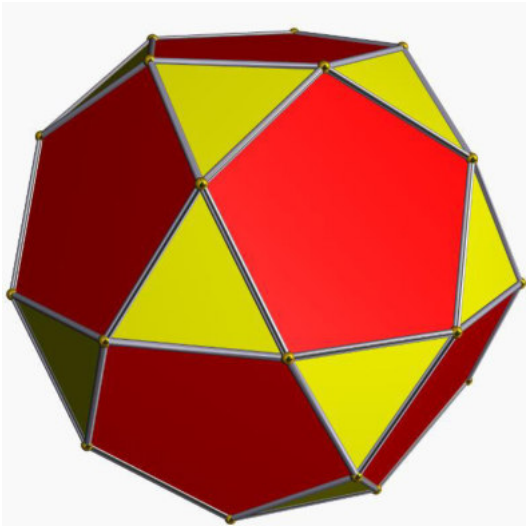
Ένα 3D ! sangaku



Μία σφαίρα περιβάλλεται από 30 μικρότερες ώστε η κάθε μία να εφάπτεται της μεγάλης σφαίρας και συγχρόνως με άλλες 4 μικρότερες γειτονικές της. Αν γνωρίζουμε την ακτίνα των μικρών κύκλων ποια είναι η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας.

Υπολογισμοί

Και πάλι ο Αρχιμήδης !



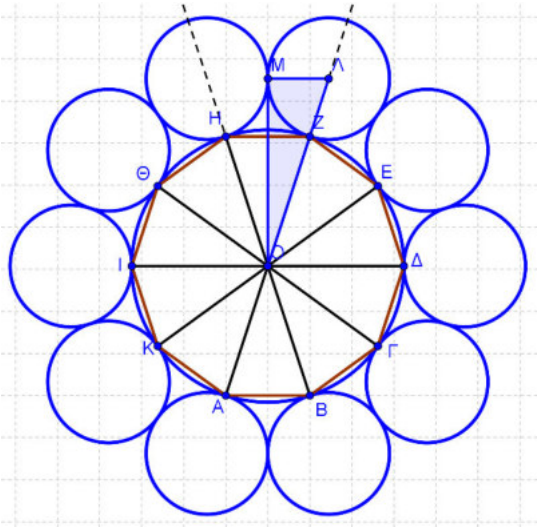
Ένα από τα ημικανονικά πολύεδρα που υπάρχουν είναι το εικοσι-δωδεκάεδρο

Διαθέτει 32 έδρες: 20 ισόπλευρα τρίγωνα και 12 κανονικά πεντάγωνα.

Έχει 30 κορυφές – στις οποίες τοποθετούμε τις μικρές σφαίρες - και 60 ακμές.

Σ ε κάθε κορυφή του ενώνονται εναλλάξ δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα.

Όλες οι ακμές σχηματίζουν έναν σκελετό έξι κανονικών δεκαγώνων, που τέμνονται ανά δύο στις κορυφές του πολυέδρου.



Αν προβάλουμε το στερεό στο επίπεδο ώστε να φαίνεται το δεκάγωνο και οι δέκα κύκλοι που περιβάλλουν την βασική σφαίρα, θα έχουμε ένα σχήμα σαν το διπλανό. Η γωνία ΜΟΛ είναι 18ο , οπότε στο ορθογώνιο ΜΟΛ θα ισχύει :

$$\text{συν}18^{o} = \frac{M\Lambda}{O\Lambda} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{r}{r+R} \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow r = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

Η παραπάνω λύση είναι του Yoshida και το sangaku είναι του 1798 και δόθηκε από τον μαθηματικό Ishikawa Nagamasa στον ναό Gyuto Tennosha στο Τόκιο.

Βιβλιογραφία – αρθρογραφία – sites

Sangaku Journal of Mathematics (SJM)

A note on a problem involving a square in a curvilinear triangle
Hiroshi Okumura

A note on an isosceles triangle containing a square and three congruent circles
Hiroshi Okumura

A three tangent congruent circle problem
Yasuo Kanai*a* and Hiroshi Okumura*b*
a Department of Mathematics, Yamato University, Osaka, Japan

Con-gurations of congruent circles on a line

Hiroshi Okumura

Theorems on two congruent circles on a line
Hiroshi Okumura

A note on the problems involving congruent circles in Tenzan Kaitei
Hiroshi Okumura

Haga's theorems in paper folding and related theorems in Wasan geometry Part 1
Hiroshi Okumura

A Note on a Pappus Sangaku Problem and a Family of Integer Sequences
Giovanni Lucca

Japanese mathematics - Hiroshi Okumura
Department of Information Engineering, Maebashi Institute of Technology

SOLVING *SANGAKU*: A TRADITIONAL SOLUTION TO A NINETEENTH CENTURY JAPANESE TEMPLE PROBLEM
Rosalie Joan Hosking

OUR FIRST INSIGHT IN SANGAKU PROBLEMS
Ivanka Stipančić-Klaić1, Josipa Matotek

The New Temple Geometry Problems in Hirotaka's Ebisui Files
Miroslaw Majewski - Jen-Chung Chuan - Nishizawa Hitoshi

Sangaku – Japanese Temple Mathematics
Rosalie Hosking

Japanese theorem : a little known theorem with many proofs
Mangho Ahuja – Wataru Uegaki – Kayo Matsushita

***Sangaku*--Japanese Mathematics and Art in the 18th,19th and 20th Centuries**
Hidetoshi Fukagawa - Kazunori Horibe

Japanese temple geometry
Jill Vincent & Claire Vincent - University of Melbourne

A Sangaku-Type Problem with Regular Polygons, Triangles, and Congruent Incircles
Naoharu Ito and Harald K. Wimmer

TRADITIONAL JAPANESE GEOMETRY
A selection of problems (Most of these problems are taken from the following books: H.Fukagawa and D. Pedoe, Japanese Temple Geometry Problems, H.Fukagawa and J. F. Rigby, Trrditiona1 Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries.)
John Rigby

Japanese Temple Geometry
Tony Rothman, with the cooperation of Hidetoshi Fukagawa
Scientific American May 1998

A Collection *Sangaku* Problems
J. Marshall Unger - Ohio State University

Traditional Japanese Geometry
John Rigby- Mathematical Medley

Sangaku: A Mathematical, Artistic, Religious, and Diagrammatic Examination
Rosalie Hosking

Sites …

http://mathworld.wolfram.com/SangakuProblem.html

http://www.wasan.jp/english/

https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml

http://www.maths.ed.ac.uk/school-of-mathematics/outreach/contours-magazine/2014-15-edition/sangaku-problems

https://issuu.com/jeff_holcomb/docs/sangaku

https://www.maa.org/press/periodicals/loci/the-japanese-theorem-for-nonconvex-polygons-the-japanese-theorem-for-quadrilaterals

http://www.gogeometry.com/math_geometry_online_courses/sangaku_japanese_geometry_table_index.html

https://www.obscurehistories.com/japanese-temple-geometry

http://people.missouristate.edu/lesreid/HS163.html

http://ph403.edu.physics.uoc.gr/Quantum/Quantum_-_Tom2Tef2.Mar-Apr.1995.pdf

https://www.slideshare.net/gdoubos/sangaku-63754166

https://www.slideshare.net/DolonPal/sci-am-special-online-issue-2005no21-science-and-art

https://www.geogebra.org/b/MRJ8d3xu

http://hermay.org/jconstant/wasan/sangaku/index.html

https://drive.google.com/file/d/0Bzhsoo18oqmZOXpudzlVUjJqNlk/view

https://www.cut-the knot.org/Curriculum/Geometry/InversionInArbelos.shtml#(5)

https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/BookOfLemmas/BOL5.shtml

https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_chain

https://mathlesstraveled.com/2016/06/10/apollonian-gaskets-and-descartes-theorem-ii/

https://en.wikipedia.org/wiki/Descartes%27_theorem

https://brilliant.org/wiki/descartes-theorem/

http://www.pballew.net/soddy.html

http://foothills-ts.net/mother/DescartesCircleTheorem.htm

http://www.ndl.go.jp/math/e/s1/1.html

http://slideplayer.com/slide/5291218/

http://faculty.madisoncollege.edu/kmirus/Reference/SanGaku.html

http://seekecho.blogspot.gr/2017/06/sangaku-squares.html

https://books.google.gr/books?id=OxKKDCmGDlEC&pg=PA97&lpg=PA97&dq=sangaku+three+square&source=bl&ots=yfi6v3b5fr&sig=htjV1qJ8jiz16bMydoE2Xd58Sqs&hl=el&sa=X&ved=0ahUKEwjeuaaY7rzaAhUDMewKHWDSBGA4ChDoAQhaMAc#v=onepage&q=sangaku%20three%20square&f=false

https://researchmap.jp/hokmr/?lang=english

Ελληνική αρθρογραφία

Περιοδικό **Quantum τεύχος Μαρτίου – Απριλίου 1995** με τίτλο **Γεωμετρία της παγόδας του George Berzseny**.

Μεταπτυχιακή εργασία της **Γεωργίας Γκρίτζαλη** με τίτλο «**Ιστορία των προβλημάτων στα μαθηματικά**» (σελ. 117).

Εργασία του **Λυγάτσικα Ζήνων** με τίτλο **Sangakou 19,999 προβλήματα στη γεωμετρία Π.ΓΕΛ Βαρβακείου σχολής**

Περιοδικό «**Απολλώνιος**» της **Ε.Μ.Ε. Ημαθίας τεύχος 4ο** το άρθρο του **Γιάννη Απλακίδη SAN-GAKU «πολύχρωμα γεωμετρικά προβλήματα από την Ιαπωνία».**

Κλασικά βιβλία

Sacred Mathematics: **Japanese Temple Geometry** by **Hidetoshi Fukagawa and Tony Rothman**. PRINCETON UNIVERSITY

Japanese temple geometry problems, **Hidetoshi Fukagawa** - **Daniel Pedoe** Charles Babbage Research Centre

Traditional Japanese mathematics problems from the 18th and 19th centuries- Fukagawa and Sokolowsky.