

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-18975

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=9$, $A\Gamma=15$. Από το βαρύκεντρο Θ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις $AB, A\Gamma$ στα Δ, E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta, \Gamma E$. (Μονάδες 10)

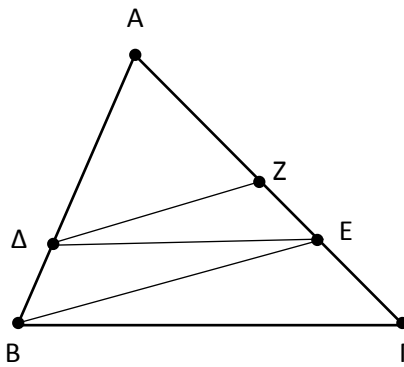
ΘΕΜΑ 2-19024

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη BE η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE}$ (Μονάδες 10)

β) $\frac{AZ}{A\Delta} = \frac{AE}{AB}$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AE}$ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2-19026

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB που τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\Delta E}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$ (Μονάδες 10)

β) $\frac{Z\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$ (Μονάδες 10) γ)

$\frac{\Delta E}{A\Gamma} + \frac{Z\Delta}{AB} = 1$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2-19033

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z, H και Θ των πλευρών του $A\Delta, AB, B\Gamma,$

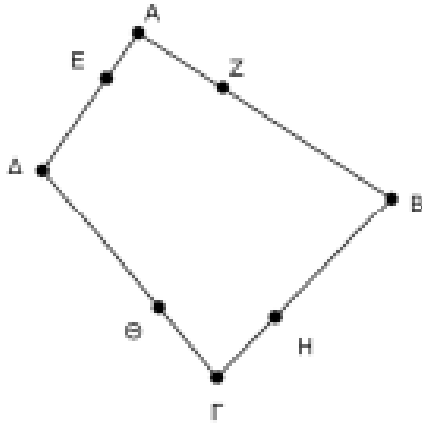
$\Gamma\Delta$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{AZ}{AB} = \frac{\Gamma H}{\Gamma B} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ // \Theta H // \Delta B$. (Μονάδες 10)

β) $EZ = \Theta H = \frac{1}{3} \Delta B$ (Μονάδες 10)

γ) το $EZH\Theta$ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2-19035

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα ώστε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο E φέρνουμε παράλληλη προς την AB, η οποία τέμνει την BΓ στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ABΓ και AΔE είναι όμοια. (Μονάδες 10)

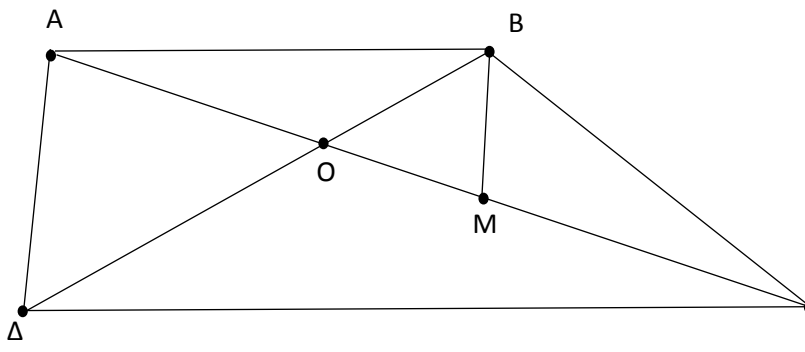
β) $3 \cdot BZ = B\Gamma$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-19036

Οι διαγώνιοι του τραπεζίου ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ τέμνονται στο O. Η παράλληλη από το B προς την AΔ τέμνει την AΓ στο M. Αν $OA = 12$, $OB = 9$ και $OG = 36$, να αποδείξετε ότι:

α) $OD = 27$. (Μονάδες 12)

β) $OM = 4$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4ο

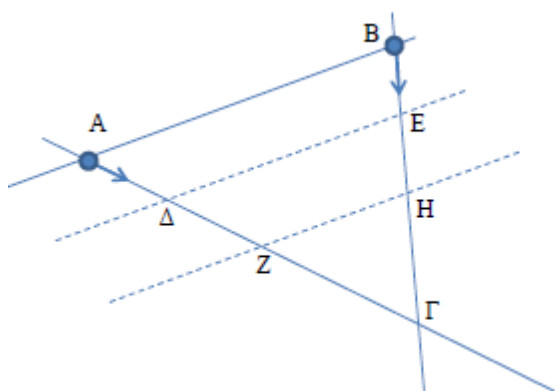
ΘΕΜΑ 4-22334

Δύο οχήματα κινούμενα με σταθερές ταχύτητες v_1 και v_2 , περνούν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από τα σημεία A και B αντίστοιχα και συναντιούνται στο σημείο Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

(Δίνεται ότι η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι ίση με το διάστημα που κινήθηκε προς τον αντίστοιχο χρόνο.)

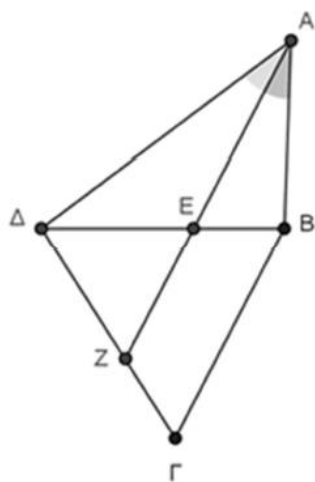
α) Μετά από χρόνο t_1 το όχημα που περνά από το σημείο A βρίσκεται στο σημείο Δ της διαδρομής ΑΓ ενώ το όχημα που περνά από το σημείο B βρίσκεται στο σημείο E της διαδρομής ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $\Delta E // AB$. (Μονάδες 12)

β) Έστω Z σημείο της διαδρομής ΑΓ και H σημείο της διαδρομής ΒΓ. Αν $ZH // AB$, να αποδείξετε ότι τα οχήματα περνούν ταυτόχρονα από τις θέσεις Z και H. (Μονάδες 13)



ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-19031



Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Αν $AD = 12$, $AB = 8$, $DE = 9$ και $ZΓ = 6$, να αποδείξετε ότι:

- α) $EB = 6$
- β) $\Delta Z = 9$

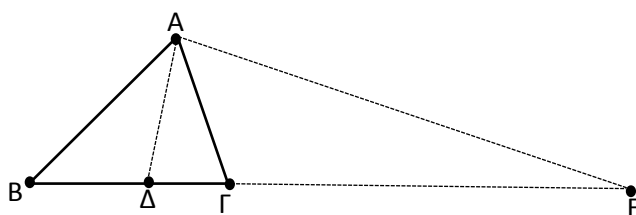
(Μονάδες 13)
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-19040

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($AB > AG$) και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι $AB = 6$, $\Delta B = 3$, $BΓ = 5$ και $BE = 15$, να αποδείξετε ότι:

- α) $AG = 4$
- β) $\Delta E = 12$

(Μονάδες 12)
(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2-22318

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ διχοτόμο της \hat{A} . Φέρουμε τις διχοτόμους ΔΕ και ΔΖ των γωνιών

$\hat{A}\hat{D}B$ και $\hat{A}\hat{D}G$ αντίστοιχα.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

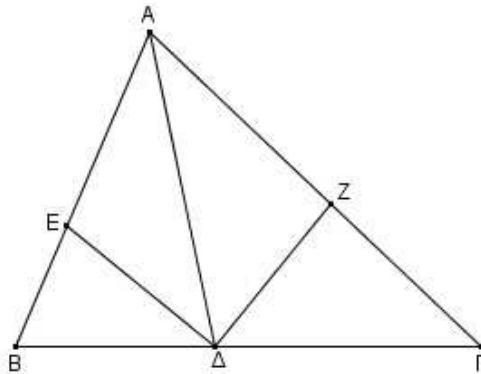
i. $\frac{AE}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta B}$.

ii. $\frac{\dots}{Z\Gamma} = \frac{\Delta A}{\dots}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{AG}{AB}$.

(Μονάδες 15)

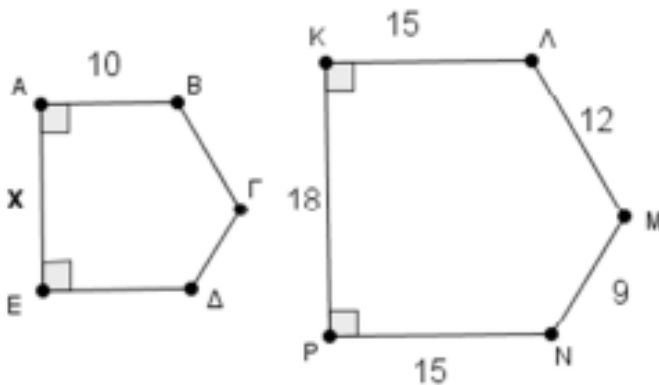
**ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ****ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 2-19023**

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν $\hat{A} = \hat{K}$ και $\hat{B} = \hat{L}$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. (Μονάδες 9)



ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-18984

Θεωρούμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ .

α) Να εξετάσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$AB=8, A\Gamma=12, \hat{A}=35^\circ, \Delta E=20, \Delta Z=30, \hat{\Delta}=35^\circ.$$

$$\hat{A}=47^\circ, \hat{B}=38^\circ, \hat{E}=47^\circ, \hat{\Delta}=95^\circ$$

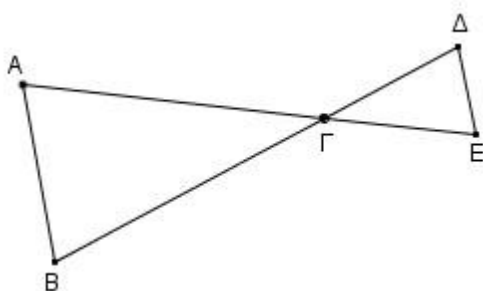
$$AB=A\Gamma, \hat{A}=\hat{\Delta}, \Delta E=\Delta Z.$$

(Μονάδες 15)

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι όμοιο με το ΔEZ , να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-18990

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα AE και $B\Delta$ τέμνονται στο Γ .



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $AB \parallel \Delta E$. (Μονάδες 12)

β) $B\Gamma=2 \cdot \Delta\Gamma$ και $E\Gamma=\frac{1}{2} A\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-18993

α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $A\Gamma=4, B\Gamma=16, BA=18, \Delta Z=10, EZ=40, \Delta E=48$.

ii) $\hat{A}=63^\circ, \hat{\Gamma}=83^\circ, \hat{\Delta}=63^\circ, \hat{E}=34^\circ$. (Μονάδες 15)

β) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=6, A\Gamma=7$ και $B\Gamma=8$. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔEZ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$, με λόγο ομοιότητας 3; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-19011

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB και μία τέμνουσα $\Sigma\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) i. Τα τρίγωνα $\Sigma B\Gamma$ και $\Sigma\Delta B$ είναι όμοια.

ii. Τα τρίγωνα $\Sigma A\Gamma$ και $\Sigma\Delta A$ είναι όμοια.

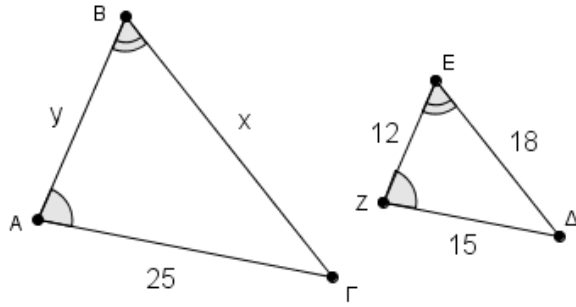
(Μονάδες 16)

β) $A\Gamma \cdot B\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2-19014

Τα παρακάτω τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $\hat{A}=\hat{Z}, \hat{B}=\hat{E}$ και $A\Gamma=25, EZ=12, E\Delta=18$ και $Z\Delta=15$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου ΔEZ:

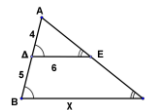
$$\frac{BA}{\dots} = \frac{AΓ}{\dots} = \frac{ΓB}{\dots}$$

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα x και y. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2-19015

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά BΓ του τριγώνου ABΓ και επιπλέον ισχύουν $AΔ = 4$, $ΔB = 5$ και $ΔE = 6$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και AΔE είναι όμοια. (Μονάδες 9)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{ΔE} = \frac{AΓ}{\dots}$$

(Μονάδες 9)

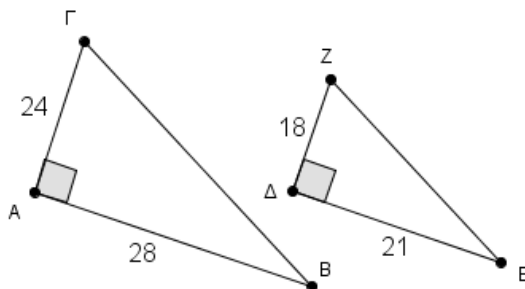
γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x.

Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή του x. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2-19017

Τα παρακάτω τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες \hat{A} και $\hat{Δ}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ABΓ και ΔEZ αντίστοιχα ισχύουν $AB = 28$, $AΓ = 24$ και $ΔE = 21$, $ΔZ = 18$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 10)



β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{AG}{\dots}$$

(Μονάδες 9)

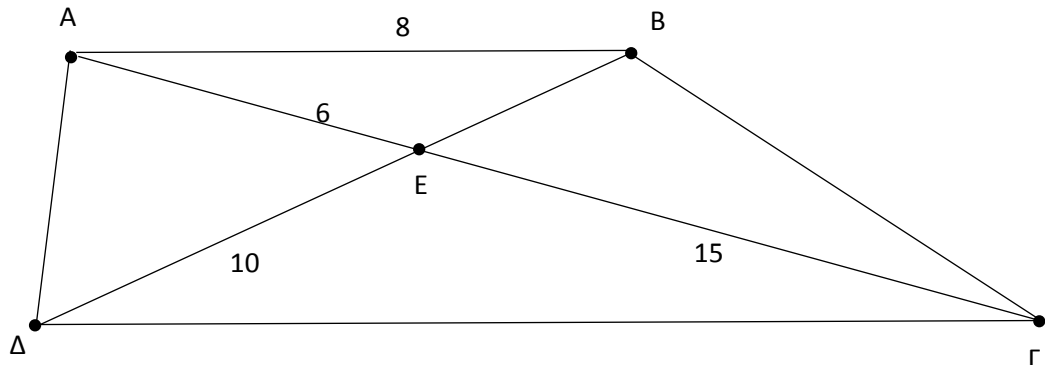
γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή.

i. $ZE = \frac{18}{21} \Gamma B$ ii. $ZE = \frac{24}{28} \Gamma B$ iii. $ZE = \frac{3}{4} \Gamma B$ iv. $ZE = \frac{4}{3} \Gamma B$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2-19019

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν $AB \parallel \Delta\Gamma$, $AE = 6$, $AB = 8$, $\Gamma E = 15$ και $\Delta E = 10$.



α) Να βρείτε δυο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων AEB και $\Delta E\Gamma$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2-19021

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:

α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποιο δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 14)

β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,

i. να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών.

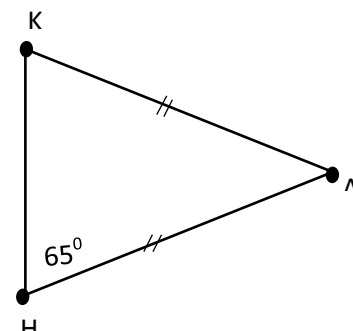
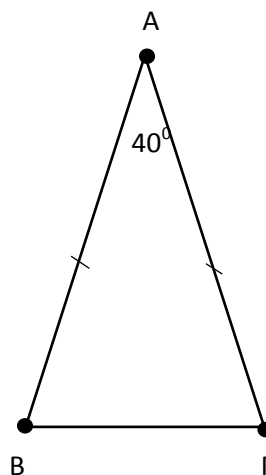
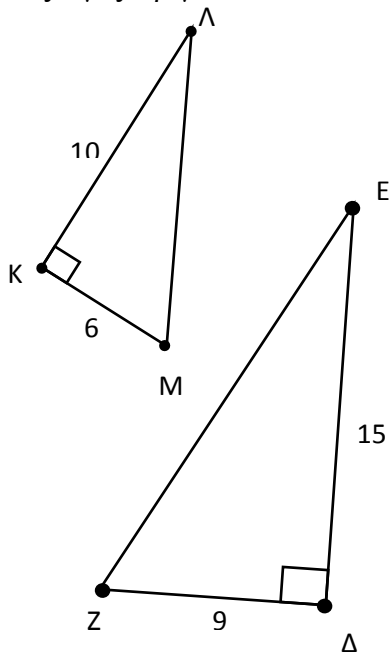
(Μονάδες 6)

ii. να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 5)

1ο ζεύγος: τρίγωνα KAM και $Z\Delta E$

2ο ζεύγος: τρίγωνα $AB\Gamma$ και $HK\Lambda$

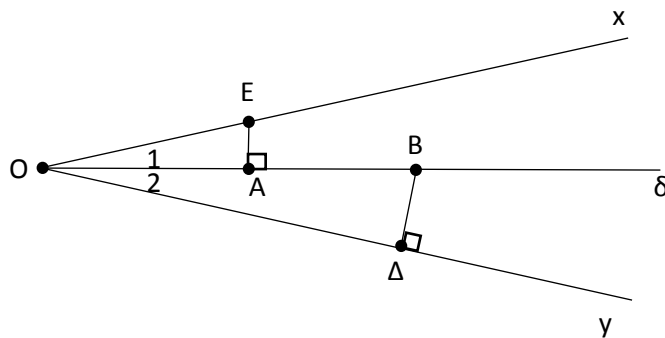


ΘΕΜΑ 2-19030

Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας \widehat{xOy} θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε $OB = 2 \cdot OA$. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy. Να αποδείξετε ότι:

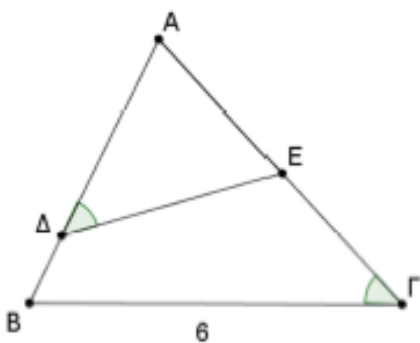
α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) $2 \cdot OA^2 = OD \cdot OE$. (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 2-22308**

Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\Gamma B}$ και $B\Gamma = 6$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια και να συμπληρώσετε τα κενά



στην ισότητα $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\dots}$ (Μονάδες 15)

β) Αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με $\frac{3}{2}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔΕ. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-22320

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ εσωτερική διχοτόμο της γωνίας \widehat{A} και Ε σημείο της ΑΔ τέτοιο

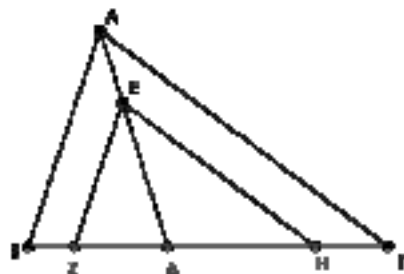
ώστε $\Delta E = \frac{2}{3} A\Delta$. Από το Ε φέρνουμε παράλληλες προς τις

πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τη

ΒΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = \frac{2}{3} AB$. (Μονάδες 12)

β) $\frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{AB}{A\Gamma}$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4-18976

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη του $A\Delta$ και BE .

α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και σκαληνό, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $A\Delta B$ και BEA δεν μπορεί να είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ , τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και BEA είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4-18994

Στην πλευρά AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και στην

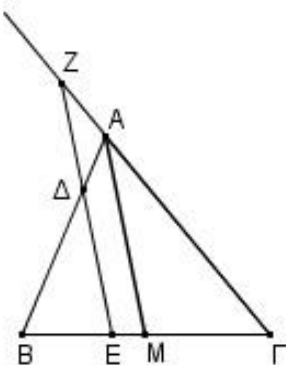
πλευρά $\Delta\Gamma$ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Αν η διαγώνιος $A\Gamma$ τέμνει τις ΔE και BZ

στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $AM = \Gamma N = 2 \cdot MN$. (Μονάδες 13)

β) $MN = \frac{1}{5} \cdot A\Gamma$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4-19000



Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσο του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκτασή της ΓA στο Z .

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i) $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{AB}$

ii) $\frac{EZ}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma M} = \frac{\dots}{\dots}$

(Μονάδες 12)

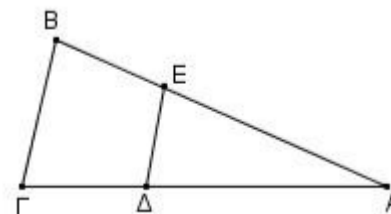
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\Delta E + EZ$ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του E στο BM . (Μονάδες 13)

θέση του E στο BM .

ΘΕΜΑ 4-19016

Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να

ισχύουν: $AE = \frac{2}{3}A\Gamma$ και $A\Delta = \frac{2}{3}AB$.



α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{A\Gamma B}$ (Μονάδες 9)

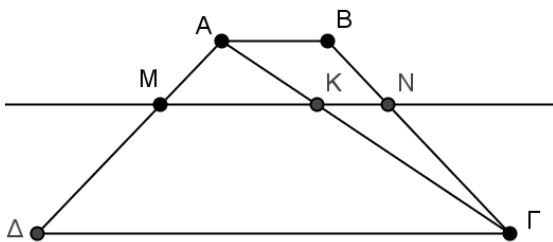
β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα $B\Gamma$ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔE .

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4-19029

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και σημείο M της πλευράς του $A\Delta$ ώστε $\frac{AM}{A\Delta} = \frac{1}{3}$. Από το M



φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπέζιου, η οποία τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$ (Μονάδες 8)

β) $\frac{KN}{AB} = \frac{2}{3}$ (Μονάδες 8)

γ) $MN = \frac{1}{3}\Gamma\Delta + \frac{2}{3}AB$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-19039

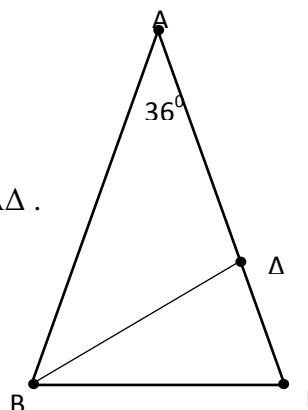
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = 36^\circ$ και η διχοτόμος του $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

ii) $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

β) Αν $A\Gamma = 1$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Delta$.



(Μονάδες 6)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 10)

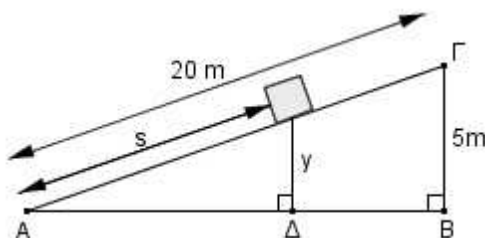
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-18997

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y , που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή,

ισχύει ότι $y = \frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα. (Μονάδες 15)

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα. (Μονάδες 3)

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας A . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2-19005

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ σε σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{3}{4} A\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma = \frac{5}{4} A\Gamma$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-19008

α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. 3, 4, 5.

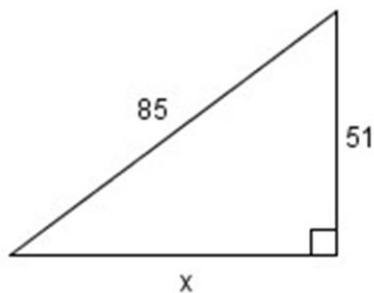
ii. $3\lambda, 4\lambda, 5\lambda$ ($\lambda > 0$).

iii. 4, 5, 6. (Μονάδες 18)

β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι, το μήκος x είναι ακέραιο

πολλαπλάσιο του 4.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2-19041

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος $A\Delta$ και $A\Gamma = 8$, $\Delta\Gamma = \frac{32}{5}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

- α) $B\Gamma$. (Μονάδες 9)
β) AB . (Μονάδες 8)
γ) $A\Delta$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2-19043

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $A\Gamma = 4$ και ύψος $A\Delta = \frac{12}{5}$.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{5}$. (Μονάδες 10)
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2-22316

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 18$ cm και $B\Gamma = 30$ cm. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Αν $A\Delta = 9$ cm τότε:

- α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$. (Μονάδες 13)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-22317

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην πλευρά AB παίρνουμε ένα τμήμα $AE = \frac{3}{5} AB$ και στην $A\Delta$ ένα τμήμα $AZ = \frac{4}{5} A\Delta$. Αν το εμβαδόν του πενταγώνου $EB\Gamma\Delta Z$ είναι 76, να υπολογίσετε:

- α) Το μήκος a της πλευράς του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)
β) Την περίμετρο του πενταγώνου $EB\Gamma\Delta Z$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4-18985

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε ένα σημείο M .

α) Αν το σημείο A είναι το μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

i. Όταν η χορδή AB είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, τότε $AM \cdot AB = A\Gamma^2$. (Μονάδες 8)

ii. Όταν η χορδή AB δεν είναι κάθετη στη χορδή $\Gamma\Delta$, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = A\Gamma^2$;

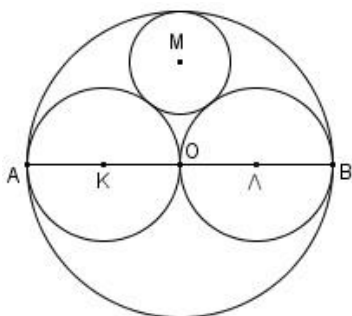
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε σημείο M ισχύει ότι $AM \cdot AB = A\Gamma^2$,

να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το μέσο του τόξου $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4-19006

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρος του AB . Με διαμέτρους τα τμήματα OA και OB γράφουμε τους κύκλους κέντρων K και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου M και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων K και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου O .



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους KM , ΛM και OM των αντιστοίχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

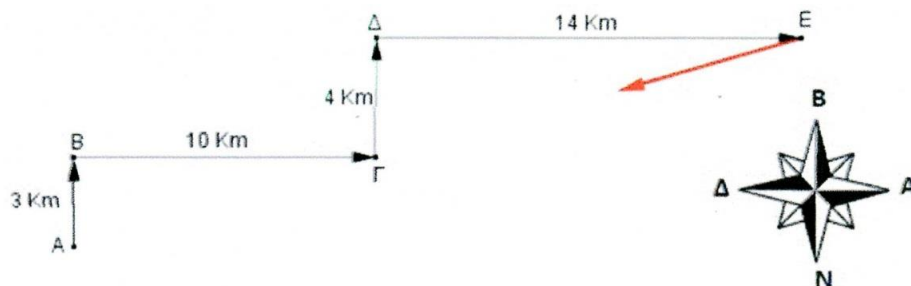
β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4-19009

Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο A και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο E .

α) Αν από το σημείο E επιστρέψει στο σημείο A από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμο, να βρείτε την απόσταση AE που θα διανύσει. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία A , Γ και E είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας (Μονάδες 13)

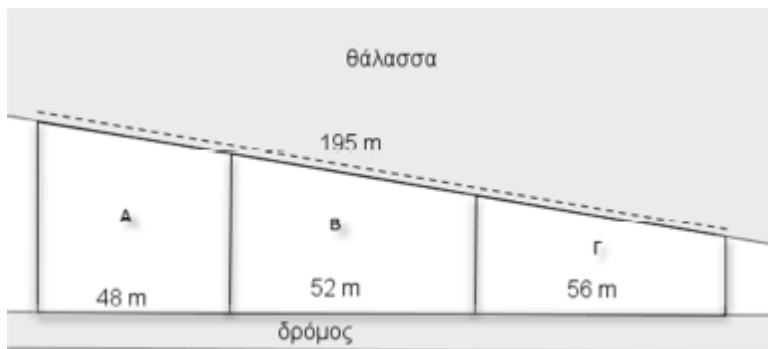


ΘΕΜΑ 4-22335

Ιδιοκτήτης μεγάλης ακίνητης περιουσίας διαθέτει προς πώληση μια ιδιοκτησία του, η οποία περιλαμβάνει τρία διαδοχικά οικοπέδα με συνολική πρόσοψη 195 m σε ακτή θάλασσας, τα οποία αποτυπώνονται στο σχέδιο που ακολουθεί. Οι επιφάνειες της ιδιοκτησίας και των οικοπέδων είναι σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου. Σημειώνεται ότι, ως πρόσοψη οικοπέδου θεωρείται το μήκος της πλευράς του οικοπέδου που συνορεύει με την ακτή της θάλασσας.

(σημειώνεται ότι το σχέδιο δεν έχει γίνει υπό κλίμακα)

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της πρόσοψης του κάθε οικοπέδου. (Μονάδες 12)
- β) Αν τα μήκη των δυο άλλων πλευρών της ιδιοκτησίας είναι ανάλογα των αριθμών 2 και 1, να υπολογίσετε την περίμετρο της ιδιοκτησίας. (Δίνεται ότι $\sqrt{13689} = 117$). (Μονάδες 13)



ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-19001

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 8$, $\beta = 6$ και $\gamma = 5$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 11)
- β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$. (Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2-19045

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = 6$, $B\Gamma = 9$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε την προβολή της AB πάνω στη $B\Gamma$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2-22292

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $a=5$, $\beta=7$ και $\gamma=3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 120^\circ$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς a πάνω στην ευθεία AB . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22293

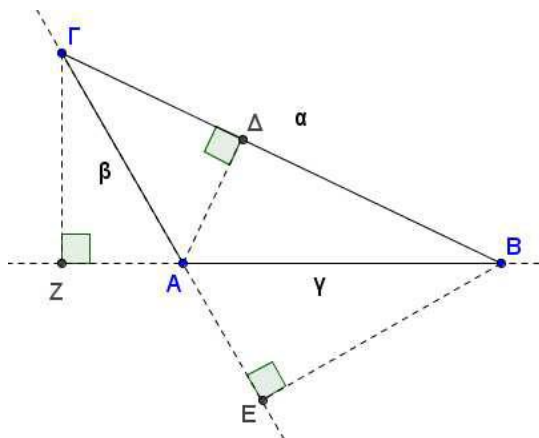
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=12$, $A\Gamma=6$, $B\Gamma=8$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην ευθεία $B\Gamma$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2-22312

Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) φέρουμε τα ύψη του $A\Delta$, BE και ΓZ .



α) Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη; Στη συνέχεια να την γράψετε σωστά.

A. $\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2aB\Delta$

B. $\gamma^2 = \beta^2 + a^2 - 2\beta A E$

Γ. $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta A E$ (Μονάδες 12)

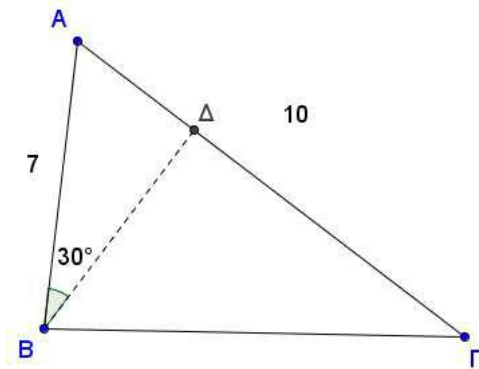
β) Αν $a=7$, $\beta=4$ και $\gamma=5$, να υπολογίσετε την προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $A\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22313

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος του $B\Delta$. Αν $AB=7$, $A\Gamma=10$ και $\hat{A B \Delta} = 30^\circ$, να υπολογίσετε:

α) το τμήμα $A\Delta$. (Μονάδες 8)

β) την πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 17)



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-19042

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 4$ και $\mu_\beta = \sqrt{33}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 5$.

(Μονάδες 13)

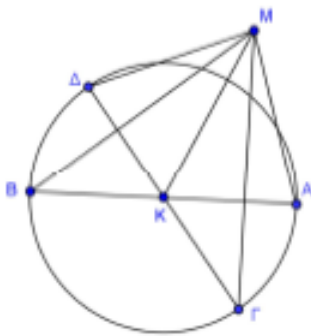
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-22291

Δίνεται κύκλος (K,R) και δύο διάμετροί του AB και $\Gamma\Delta$. Έστω M εξωτερικό σημείο του κύκλου

τέτοιου, ώστε $AM=10$, $BM=12$ και $\Gamma M=14$.



α) Να αποδείξετε ότι : $MA^2 + MB^2 = 2(MK^2 + R^2)$

(Μονάδες 9)

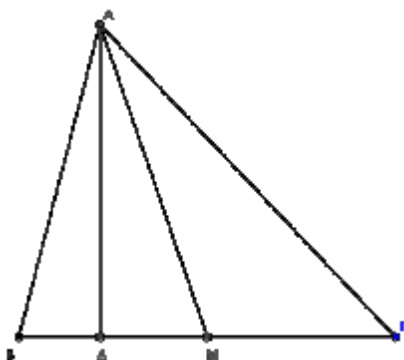
β) Να αποδείξετε ότι : $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(MK^2 + R^2)$

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΔM .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2-22304



Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 6$, $A\Gamma = 8$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσο AM και ισχύει ότι: $\Delta M = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 7$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος του ύψους $A\Delta$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22306

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $B\Gamma = \alpha\sqrt{3}$, $A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$ και $AB = \alpha$, όπου $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια είναι η ορθή γωνία. (Μονάδες 12)

β) $\mu_\gamma = \frac{3\alpha}{2}$, όπου γ η διάμεσος του $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στην πλευρά AB . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22309

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ για το οποίο έχουμε $\beta=7$, $\gamma=6$ και η διάμεσος του $\mu_\alpha = \frac{\sqrt{89}}{2}\alpha$.

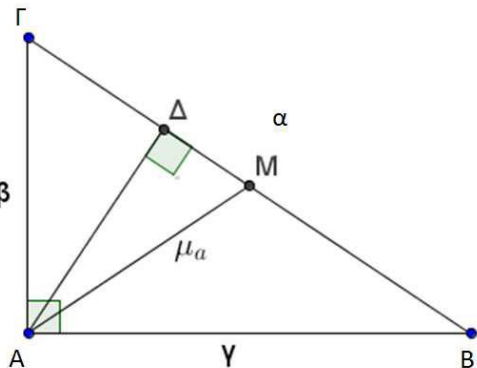
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 9$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την προβολή $M\Delta$ της διαμέσου AM πάνω στην πλευρά α . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-22314

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB > A\Gamma$, φέρουμε τη διάμεσό του AM και το ύψος του AD .

α) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σχέσεις είναι σωστές ή λανθασμένες. Αν κάποια είναι



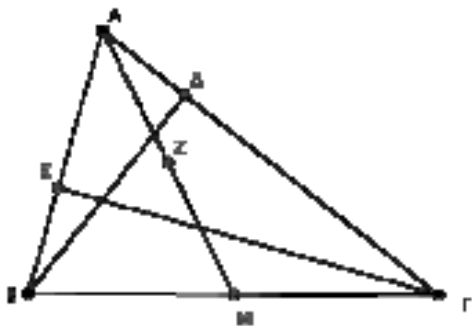
λανθασμένη να την ξαναγράψετε διορθωμένη.

A. $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_\alpha^2$

B. $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta$ (Μονάδες 10)

β) Αν $AB=8$ και $A\Gamma=6$, να υπολογίσετε την προβολή $M\Delta$ της διαμέσου AM στην πλευρά $B\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο**ΘΕΜΑ 4-22323**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ για το οποίο ισχύει ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Φέρουμε τα ύψη $B\Delta, \Gamma E$ και τη διάμεσο AM το μέσο της οποίας είναι το σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} < 90^\circ$. (Μονάδες 6)

$$\beta) AE = \frac{\alpha^2}{2\gamma}.$$

(Μονάδες 10)

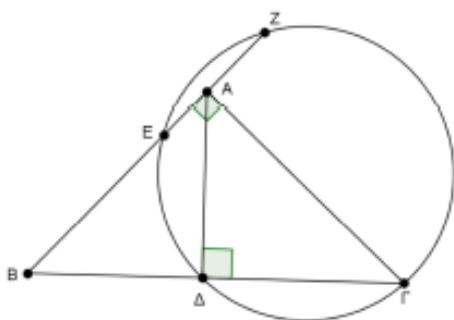
$$\gamma) AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

(Μονάδες 9)

ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-22311



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και το ύψος του $A\Delta$. Ένας κύκλος διέρχεται από τα σημεία Δ , Γ και τέμνει την BA στο E και την προέκτασή της στο Z έτσι ώστε: $BE=6$, $BZ=8$ και $B\Delta=4$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων:

α) $B\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) AB . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4-19025

Κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο M , το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$ (Μονάδες 9)

γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-19037

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο $AM = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$. Αν τα ύψη του $A\Delta$ και BE τέμνονται στο σημείο H , να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι οξεία. (Μονάδες 13)

β) $AH \cdot A\Delta = A\Gamma \cdot AE$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4-22324

Δίνεται κύκλος κέντρου O και μία διάμετρος του AB . Από σημείο E στην προέκταση της διαμέτρου AB προς το A , φέρουμε την εφαπτομένη $E\Gamma$ του κύκλου. Η κάθετη στην AB στο

σημείο E, τέμνει την προέκταση της BΓ (προς το Γ) σε σημείο Δ.

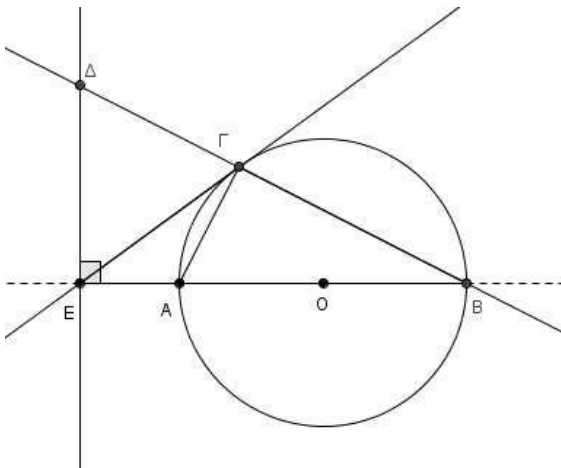
α) Να επιλέξετε τη σωστή ισότητα:

i. $EG^2 = EA \cdot AB$ ii. $EG^2 = EA \cdot EB$ iii. $EG^2 = EO \cdot EB$ iv. $EG^2 = EO \cdot OB$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BΓ \cdot BΔ = BA \cdot BE$. (Μονάδες 9)

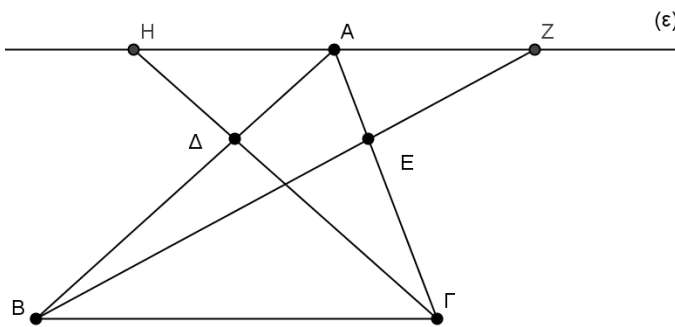
ii. $EB^2 = EG^2 + BΓ \cdot BΔ$. (Μονάδες 9)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4-19027



Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ και E των πλευρών του AB και AΓ αντίστοιχα, ώστε $\frac{AΔ}{AB} = \frac{AE}{AΓ} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο A φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη BΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των BE και ΓΔ στα σημεία Z, H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔE // ΓB$ (Μονάδες 8)

β) $ZE = \frac{1}{2} \cdot EB$. (Μονάδες 8)

γ) $AZ = \frac{1}{2} \cdot BΓ$. (Μονάδες 9)

ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2-19028

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) και BE το ύψος του. Αν είναι $AB=3$, $\Gamma\Delta=7$ και $B\Gamma=4$, τότε,

α) να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-22289

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ εσωτερικό σημείο του $B\Gamma$. Φέρουμε από το Δ παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο σημείο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

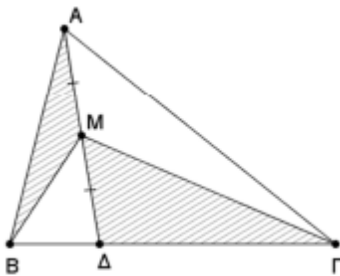
α) $(EK\Delta) = \frac{1}{2}(BE\Delta)$. Μονάδες 7

β) $(E\Delta Z) = \frac{1}{2}(AE\Delta Z)$. Μονάδες 7

γ) $2(KEZ\Lambda) = (AB\Gamma)$. Μονάδες 11

ΘΕΜΑ 2-22294

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$ και έστω M στο μέσον της $A\Delta$.

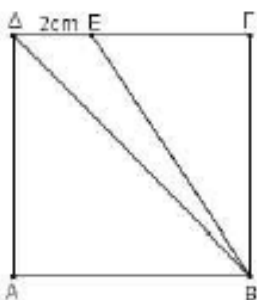


Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$. (Μονάδες 12)

β) $(AMB) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22297



Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a , θεωρούμε σημείο E της πλευράς $\Delta\Gamma$ έτσι

ώστε $\Delta E = 2$ cm. Αν ισχύει ότι $(BE\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου a είναι 8 cm. (Μονάδες 13)

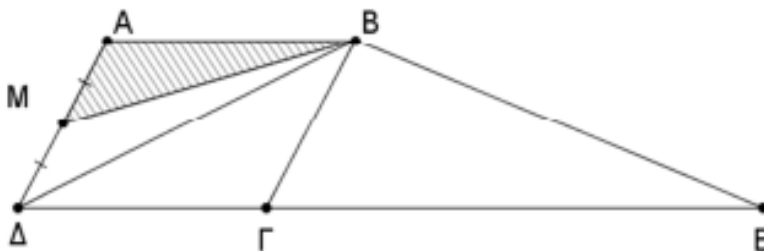
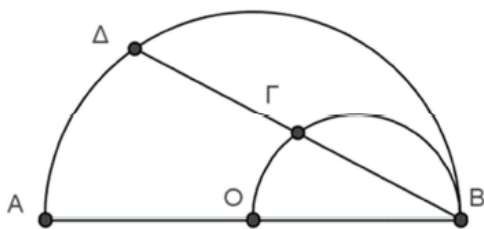
β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2-22298

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε $Μ$ το μέσο της $ΑΔ$. Προεκτείνουμε τη $ΔΓ$ προς το $Γ$ κατά $ΓΕ = 2ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = \frac{1}{2}(BΓΔ)$. (Μονάδες 12)

β) $(ΑΒΓΒ) = (BΓΕ)$. (Μονάδες 13)

**ΕΜΒΑΛΑ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ****ΘΕΜΑ 2-19038**

Σε ημικύκλιο διαμέτρου $ΑΒ$ κέντρου $Ο$ θεωρούμε σημείο του $Δ$. Η χορδή $ΔΒ$ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου $ΟΒ$ στο $Γ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΟΓΒ$ είναι όμοια. (Μονάδες 12)

β) $(ΑΔΒ) = 4 \cdot (ΟΓΒ)$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4-19022

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκτασή της διαμέσου του $ΑΜ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο P , να αποδείξετε ότι :

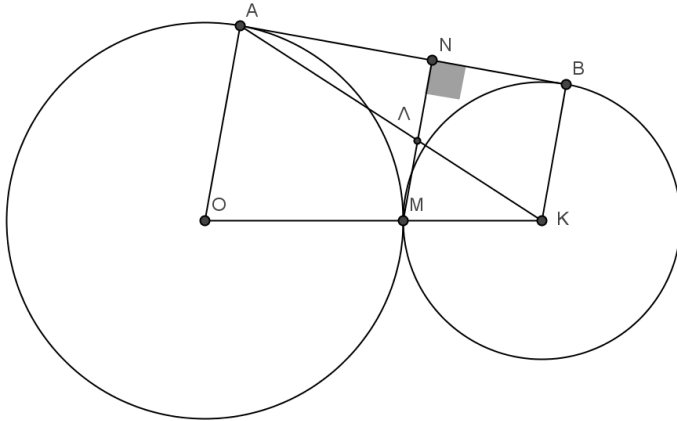
α) $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) $MP = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ (Μονάδες 8)

γ) $(ΑΒΓ) = 6 \cdot (MPΓ)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-19032

Δίνονται δύο κύκλοι (O, α) και (K, β) με $\alpha > \beta$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο M . Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα AB , με A, B σημεία των κύκλων (O, α) και (K, β) αντίστοιχα. Από το M θεωρούμε την κάθετη στο AB , η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα AK και AB στα σημεία Λ και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



α) $M\Lambda = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (Μονάδες 8)

β) $\Lambda N = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (Μονάδες 8) γ)

Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (O, α) και (K, β) αντίστοιχα,

τότε: $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda N)} \right)^2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-19034

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία M, Λ και Z πάνω στις πλευρές $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AM = \frac{1}{2} AB$, $A\Lambda = \frac{2}{3} A\Gamma$ και $BZ = \frac{1}{3} B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AM\Lambda) = \frac{1}{3} (AB\Gamma)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{5}{18}$. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AMZA)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4-22310

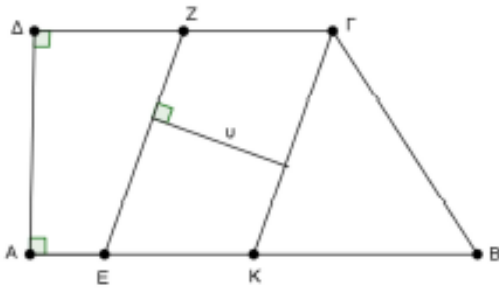
Ένα οικόπεδο $AB\Gamma\Delta$ σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) έχει πλευρές $\Gamma\Delta = 40$ m, $AB = 60$ m και $A\Delta = 30$ m. Ένας δρόμος αποκόπτει από το οικόπεδο το κομμάτι $ZEK\Gamma$ σχήματος παραλληλογράμμου. Αν $\Delta Z = 20$ m και $AE = 10$ m τότε:

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(K\Gamma B)$. (Μονάδες 5)

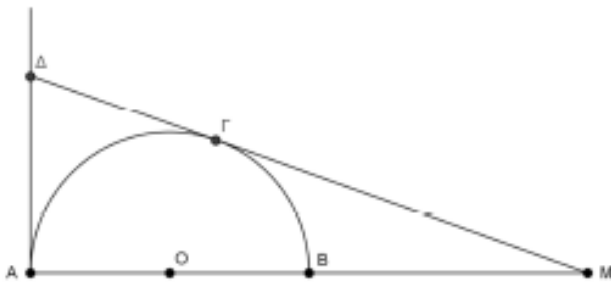
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που αποκόπτει ο δρόμος. (Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το πλάτος (v) του δρόμου. (Μονάδες 9)

δ) Να υπολογίσετε την $B\Gamma$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4-22319



Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου $AB = 2R$. Στην προέκταση του AB προς το Β,

θεωρούμε ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε $BM = 2R$. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ

στο ημικύκλιο. Φέρουμε εφαπτόμενη στο ημικύκλιο στο σημείο Α η οποία τέμνει την

προέκταση του τμήματος ΜΓ στο σημείο Δ. Να

αποδείξετε ότι:

α) $ΜΓ = 2\sqrt{2}R$. (Μονάδες 8)

β) $ΜΟ \cdot ΜΑ = ΜΓ \cdot ΜΔ$. (Μονάδες 8)

γ) $(ΑΟΓΔ) = (ΜΟΓ)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-22328

Δίνεται κύκλος (K,R) και διάμετρος του AB . Από σημείο Ε στην προέκταση της AB προς το μέρος του Β φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο και έστω Γ το σημείο επαφής. Στο σημείο Ε φέρουμε κάθετη στην AB η οποία τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΒΕΔΓ$ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)

β) $ΑΓ \cdot ΑΔ = ΑΕ^2 - ΒΕ \cdot ΑΕ$. (Μονάδες 10)

γ) $\frac{(ΑΓΕ)}{(ΒΕΓ)} = \frac{ΑΕ}{ΒΕ}$. (Μονάδες 7)

ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2-22302

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma = 2$ cm $B\Gamma = \sqrt{3}$ cm και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι $AB = 1$ cm. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 4-22327

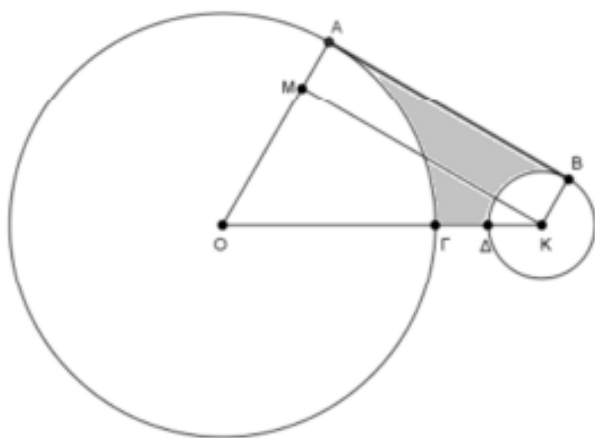
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία M , Λ και Z πάνω στις πλευρές AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα

τέτοια ώστε $AM = \frac{1}{2} AB$, $A\Lambda = \frac{2}{3} A\Gamma$ και $BZ = \frac{1}{3} B\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι $(AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{5}{18}$. (Μονάδες 12)
- γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AMZA)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4-22321

Δίνονται δύο κύκλοι $(O,8)$, $(K,2)$ με διάκεντρο $OK = 12$ η οποία τους τέμνει στα σημεία Γ και Δ



αντίστοιχα. Αν AB είναι κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δυο κύκλων και KM κάθετο τμήμα στην OA τότε να αποδείξετε ότι:

- α) $MK = 6\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)
- β) $(AOKB) = 30\sqrt{3}$. (Μονάδες 5)
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία MOK . (Μονάδες 7)
- δ) $(OAG) = 16(\Delta BK)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4-22336

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) προεκτείνουμε την πλευρά AG κατά τμήμα $Γ\Delta = \frac{AG}{2}$. Αν η

προέκταση του ύψους AM , τέμνει την $B\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{BE}{E\Delta} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 8)

β) $\frac{(B\Gamma E)}{(ΓE\Delta)} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) $\frac{(AB\Delta)}{(ΓE\Delta)} = \frac{5}{2}$. (Μονάδες 8)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11**ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ****ΘΕΜΑ 2-22295**

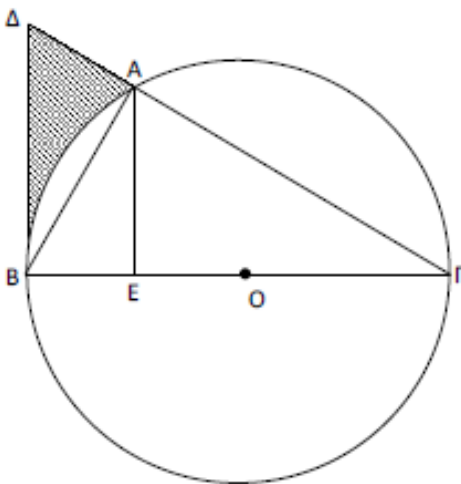
Με ένα σύρμα μήκους c κατασκευάζουμε ένα κανονικό εξάγωνο.

α) Να εκφράσετε την πλευρά του εξαγώνου ως συνάρτηση του c . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, το εμβαδόν του εξαγώνου ισούται με $\frac{c^2\sqrt{3}}{24}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4-22322

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία διάμετρος του $B\Gamma$. Η κάθετος στο μέσο E της ακτίνας OB τέμνει το ένα ημικύκλιο στο σημείο A και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B τέμνει την προέκταση της χορδής AG στο σημείο Δ .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AG = \lambda_3 = R\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

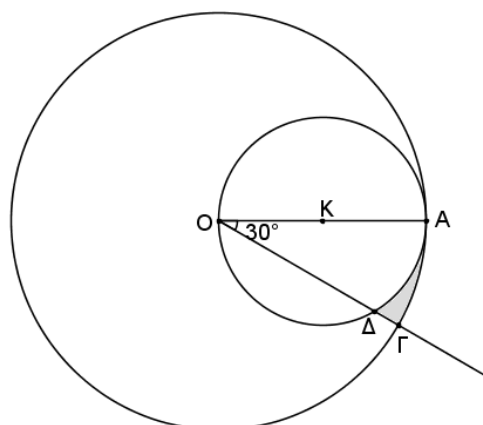
ii. $A\Delta = \frac{AG}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών: $\frac{(\Delta AB)}{(\Delta B\Gamma)}$.

(Μονάδες 9)

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΜΑ 4-22333



Με διάμετρο την ακτίνα OA ενός κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (K) και από το O φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με την ακτίνα OA γωνία 30° και τέμνει τον κύκλο (O) στο Γ και τον κύκλο (K) στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τόξα $A\Gamma$ και $A\Delta$ έχουν ίσα μήκη.

(Μονάδες 10)

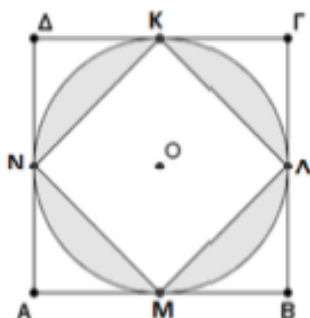
β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου (O, R) την περίμετρο του μικτόγραμμου (σκιασμένου) τριγώνου $A\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΜΑ 2-22296

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 10, θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του κέντρου O και εντός



του κύκλου το εγγεγραμμένο τετράγωνο $KLMN$.

α) Να αποδείξετε ότι $(KLMN)=50$.

(Μονάδες 12)

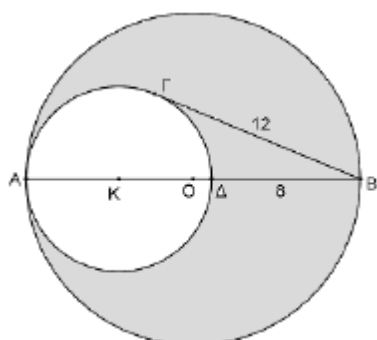
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του κύκλου που βρίσκεται στο εξωτερικό του τετραγώνου $KLMN$ και

εσωτερικά του κύκλου, είναι $25(\pi - 2)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22300

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι (O, R) και (K, ρ) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A . Από το



άκρο B της διαμέτρου AB του κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $B\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και είναι $B\Gamma=12$. Αν η διάμετρος BA τέμνει τον κύκλο (K, ρ) στο Δ και ισχύει ότι $B\Delta=8$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για τις ακτίνες R και ρ των κύκλων (O, R) και

(K, ρ) ισχύουν $R=9$ και $\rho=5$.

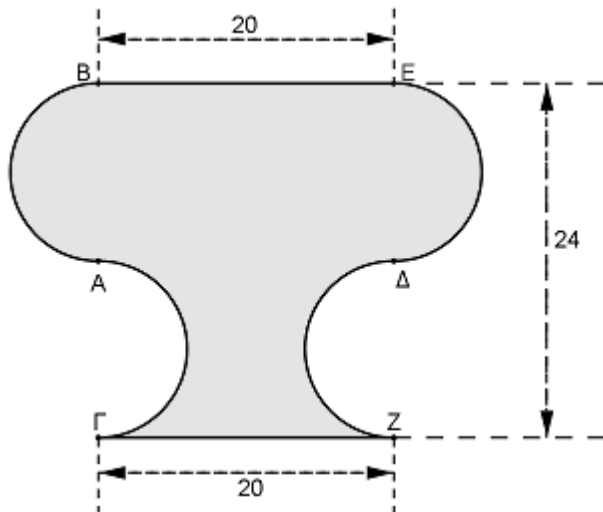
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου (σκιασμένο) που

περικλείεται μεταξύ των 2 κύκλων.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2-22301

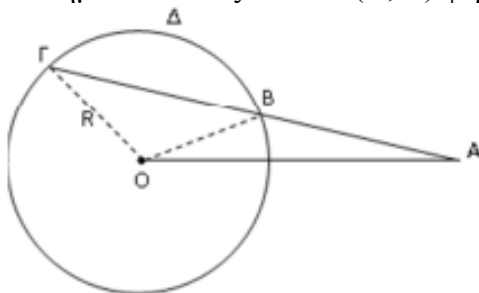


Στο παρακάτω σχήμα, τα καμπυλόγραμμα τμήματα BA, AΓ, ZΔ και ΔE είναι ίσα ημικύκλια. Αν BE//AΔ//ΓZ, BE=AΔ=ΓZ=20 και το ύψος του σχήματος είναι 24, να υπολογίσετε:

- α) Την περίμετρο του σχήματος. (Μονάδες 12)
 β) Το εμβαδόν του. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2-22305

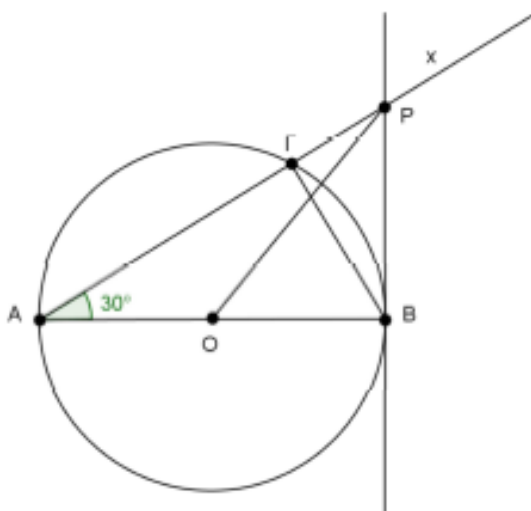
Από σημείο A εκτός κύκλου (O, R) φέρουμε τέμνουσα ABΓ έτσι ώστε AB=BΓ. Αν OA = $R\sqrt{7}$ τότε:



- α) Να αποδείξετε ότι $BΓ = \lambda_3 = R\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΓΔB. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4-22315

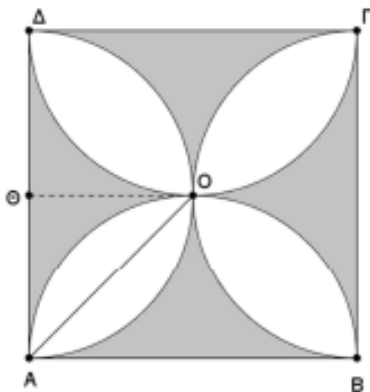
Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB και ημιευθεία Ax τέτοια, ώστε η γωνία BAx να είναι 30° . Η



Ax τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B, η οποία τέμνει την Ax στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι:

- α) $BΓ = R$. (Μονάδες 5)
 β) $\frac{(PΒΓ)}{(PAB)} = \frac{1}{4}$. (Μονάδες 8)
 γ) $PB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 6)
 δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία BOΓ είναι: $E = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4-22325

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 10, κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του και έχουν κοινό σημείο το κέντρο Ο του τετραγώνου.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\widehat{A\Theta O}$, όπου Θ το μέσο της πλευράς ΑΔ.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\widehat{A\Theta O}$ είναι $\frac{25}{4}(\pi - 2)$.

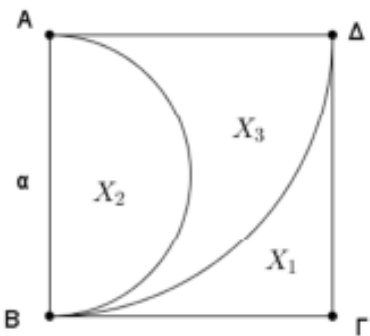
(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου, είναι

$50(4 - \pi)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4-22326

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο



Α και ακτίνα α.

α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκύκλιου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι:

$$(X_1) = \frac{\alpha^2}{4}(4 - \pi). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 . (Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-22329

Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) τέμνονται στα σημεία Α και Β έτσι ώστε το μήκος της διακέντρου τους να είναι $K\Lambda = R\sqrt{2}$.

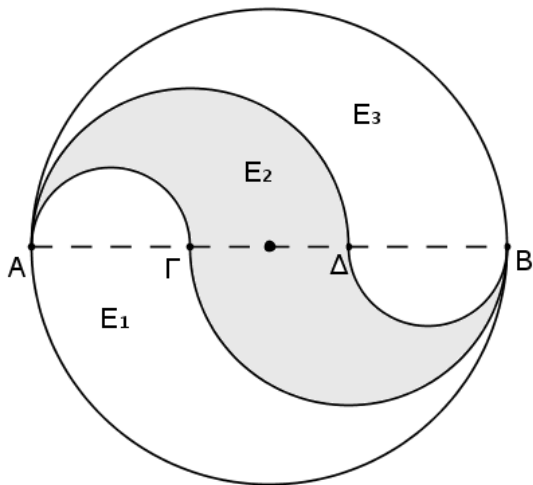
α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κοινού χωρίου των δύο κύκλων. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4-22330

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ που διαιρούν τη διάμετρό του $AB = \delta$ σε τρία ίσα τμήματα. Στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της AB

γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους τις $A\Gamma$ και $A\Delta$ και στο αντικείμενο ημιεπίπεδο γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους $B\Delta$ και $B\Gamma$. Να αποδείξετε:



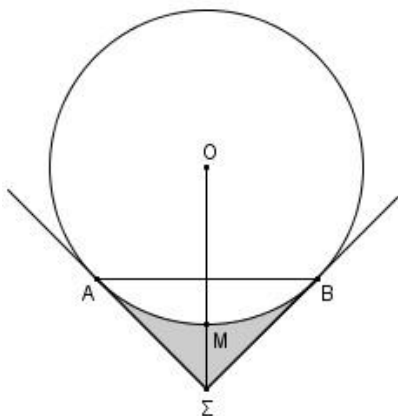
α) Το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου διαμέτρου $AB = \delta$ ισούται με $E = \frac{\pi\delta^2}{4}$. (Μονάδες 5)

β) Το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος $A\Gamma B\Delta A$ (το γραμμοσκιασμένο) ισούται με το μήκος του κύκλου (O,R) . (Μονάδες 10)

γ) Οι καμπύλες γραμμές $A\Gamma B$ και $A\Delta B$ διαιρούν τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου $AB = \delta$ σε τρία ισεμβαδικά χωρία τα E_1, E_2, E_3 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4-22331

Στα άκρα της χορδής $AB = R$ ενός κύκλου (O, R) , φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB . Αν η ΣO τέμνει το τόξο AB στο σημείο M , τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

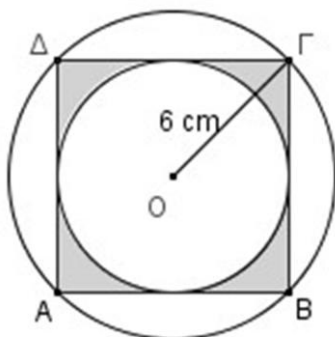
i) το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο, (Μονάδες 10)

ii) $\Sigma M = R(\sqrt{2} - 1)$. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν (ΣAB) ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4-22332

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R = 6 \text{ cm}$ εγγράφουμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και στο τετράγωνο εγγράφουμε νέο κύκλο.



α) Να υπολογίσετε:

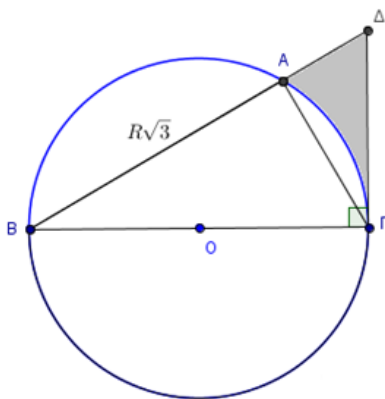
i. Το εμβαδόν του τετραγώνου. (Μονάδες 7)

ii. Το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου, δηλαδή του χωρίου του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που βρίσκεται έξω από τον εγγεγραμμένο κύκλο του.

(Μονάδες 9)

β) Να συγκρίνετε το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου με το εμβαδόν του τμήματος του κύκλου ακτίνας R που βρίσκεται έξω από το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-22290



Δίνεται κύκλος (O, R) , η διάμετρος του $B\Gamma$ και η χορδή του $AB = R\sqrt{3}$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την προέκταση της χορδής BA στο σημείο Δ . Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R :

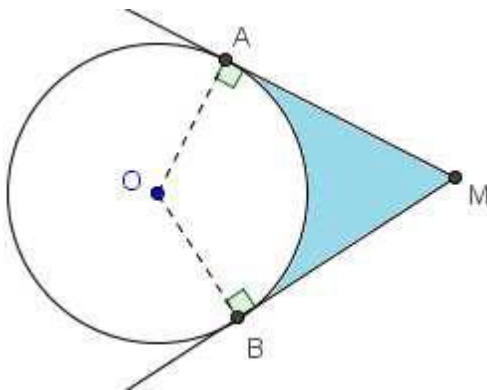
α) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4-22299

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο M τέτοιο, ώστε η δύναμή του ως προς τον κύκλο (O, R) να



είναι $3R^2$. Αν MA, MB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο M προς τον κύκλο, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $MA = R\sqrt{3}$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν

i) του τετραπλεύρου $OAMB$ (Μονάδες 6)

ii) του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου AMB

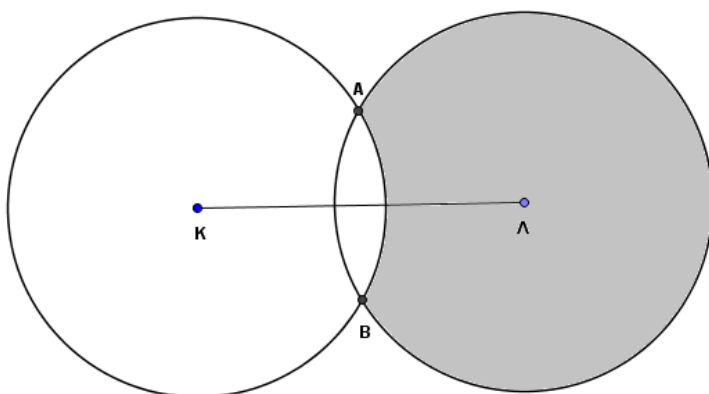
(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $(OAG\Gamma) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, όπου Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου με το

ευθύγραμμο τμήμα OM .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4-22303



Δύο ίσοι κύκλοι $(K, R), (\Lambda, R)$ τέμνονται στα σημεία A, B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχουν διάκεντρο $K\Lambda = R\sqrt{3}$.

α) Να βρείτε τη γωνία $\widehat{K\Lambda A}$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν:

i) Του τετραπλεύρου ΑΚΒΛ.

(Μονάδες 10)

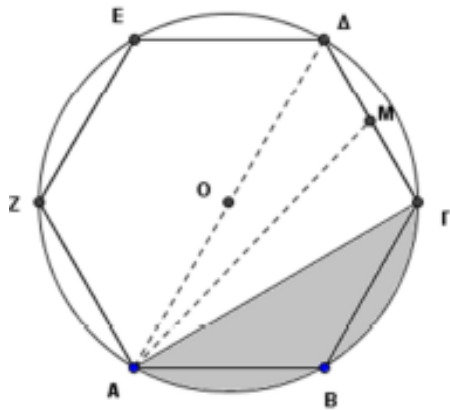
ii) Του σκιασμένου μηνίσκου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4-22307

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ

και ΑΜ, όπου Μ το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 5)

β) $(ΑΜΔ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 7)

γ) $(ΑΜΔΕΖ) = 2(ΑΒΓΜ)$ (Μονάδες 5)

δ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή ΑΓ και το τόξο ΑΒΓ είναι ίσο με:

$\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$. (Μονάδες 8)