

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8} = (2^2)^{-8} = 2^{-16}, z = 8^{-6} = (2^3)^{-6} = 2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182} = (2^{-10})^2 \cdot (2^{-16})^4 \cdot (2^{-18})^6 \cdot 2^{182} \\ &= 2^{-20} \cdot 2^{-64} \cdot 2^{-108} \cdot 2^{182} = 2^{-10}. \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} \Pi &= 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1} = 3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^4 \cdot 3^6)^{-1} = 3 \cdot [2^2 \cdot 3^3 (13 + 2^2 \cdot 3^3)]^{-1} \\ &= 3 \cdot (2^2 \cdot 3^3 \cdot 121)^{-1} = 3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 121^{-1} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{2^{-10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 121^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 121}{2^8} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^8} = \left(\frac{33}{2^4}\right)^2 = \left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4 \cdot 3 - 5\alpha + 2 < \alpha(3-3) + 2(\alpha-1) \Leftrightarrow 12 - 5\alpha + 2 < 2\alpha - 2 \Leftrightarrow 16 < 7\alpha \Leftrightarrow \alpha > \frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

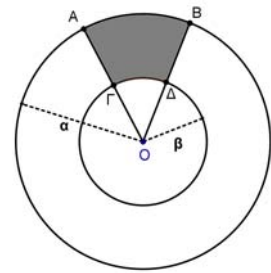
$$4 \cdot (-3) - 5\alpha + 2 < \alpha(-3-3) + 2(\alpha-1) \Leftrightarrow -12 - 5\alpha + 2 < -6\alpha + 2\alpha - 2$$

$$\Leftrightarrow -8 < \alpha \Leftrightarrow \alpha > -8$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha > \frac{16}{7}$ και $\alpha > -8$, δηλαδή όταν $\alpha > \frac{16}{7}$.

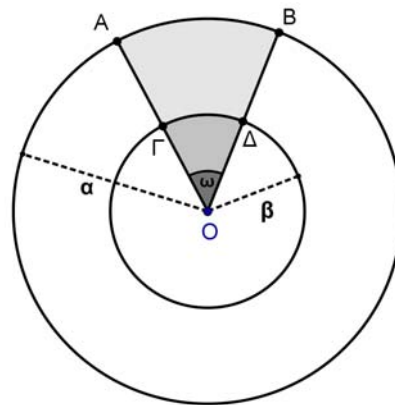
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν E του χωρίου $AB\Delta\Gamma$ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O, α) και (O, β) , $0 < \beta < \alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = \widehat{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:



$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$

Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου $AB\Delta\Gamma$ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων (O, \widehat{AB}) και $(O, \widehat{\Gamma\Delta})$, δηλαδή είναι

$$E(AB\Delta\Gamma) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} - \pi\beta^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O, α) και (O, β) , $0 < \beta < \alpha$, ισούται με $E(O, \beta, \alpha) = \pi(\alpha^2 - \beta^2)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{E(AB\Delta\Gamma)}{E(O, \beta, \alpha)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, έχουμε

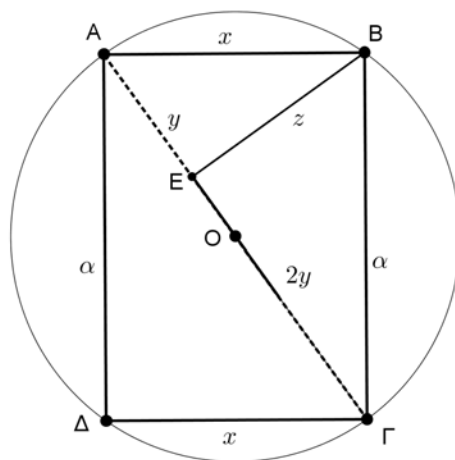
$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3 = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = \alpha$ cm και $AB < A\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή B προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ την τέμνει στο σημείο E . Αν ισχύει ότι $E\Gamma = 2 \cdot AE$, να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς AB
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $AB = \Gamma\Delta = x$, $AE = y$, $E\Gamma = 2y$ και $BE = z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2. \quad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο $B\Gamma E$ έχουμε:

$$\alpha^2 = 4y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - 4y^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2 - 4y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 - 3y^2 \quad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$9y^2 = x^2 + \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 9y^2 - \alpha^2. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \alpha^2 - 3 \cdot \frac{\alpha^2}{6} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $A\Gamma = 3y$, οπότε η ακτίνα του είναι

$$R = \frac{3}{2}y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}. \text{ Το εμβαδόν του κύκλου είναι } E = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{6\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8}.$$