

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1} = \frac{16}{81}$ και

$$\begin{aligned} A &= \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} = \frac{\frac{81}{16} - 1}{\frac{81}{16} - 3} + \frac{1}{33} + \frac{16}{81} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{\frac{65}{16}}{\frac{16}{33}} + \frac{1}{33} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{65}{33} + \frac{1}{33} + \frac{9}{27} = \frac{66}{33} + \frac{9}{27} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2°

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha = 4, \text{ για } \nu = 7, \alpha = 2, \text{ για } \nu = 14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma = 6, \text{ για } \nu = 7, \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha = 4, \gamma = 6, \text{ για } \nu = 7$ και $\alpha = 2, \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14$.

Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

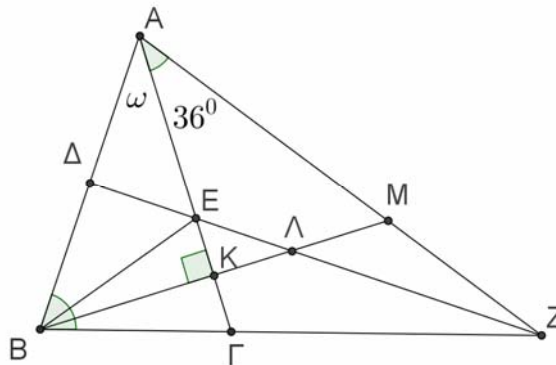
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Z . Η κάθετη από το σημείο B προς την πλευρά $A\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο K , το ευθύγραμμο τμήμα ΔZ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα AZ στο σημείο M . Αν είναι $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega = 36^\circ$,

(β) $AM = \Gamma Z$,

(γ) $BL = LZ$.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ θα έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η ΔZ είναι μεσοκάθετη της πλευράς AB , το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές $ZA = ZB$, οπότε θα έχουμε:

$$\hat{Z}\hat{A}\hat{B} = \hat{Z}\hat{B}\hat{A} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{B} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ABM η AK είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\hat{A}\hat{B}\hat{K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \hat{A}\hat{M}\hat{K} .$$

Επομένως το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές με $AM = AB$. Από υπόθεση είναι $AB = AG$. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ZAB έχουμε

$$\hat{A}\hat{Z}\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} .$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓAZ είναι ισοσκελές με $AG = \Gamma Z$. Άρα έχουμε:

$$AM = AB = AG = \Gamma Z .$$

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε: $\hat{\Lambda}\hat{Z}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{Z}\hat{B} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓKB έχουμε: $\hat{\Lambda}B\hat{Z} = \hat{K}B\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Άρα έχουμε: $\hat{\Lambda}\hat{Z}\hat{B} = \hat{\Lambda}\hat{B}\hat{Z} = 18^\circ \Rightarrow \Lambda BZ$ ισοσκελές τρίγωνο με $B\Lambda = \Lambda Z$.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x + y) \cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w = 1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m . Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z = 4, m = 5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x + y = 2 + 3 = 5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5 \cdot 4^5 - 1 = 5 \cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w = 5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z = 1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x + y$ είναι $x + y = 2 + 3 = 5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5 \cdot 1^4 - 5 = 0$.